УДК 681.5

Метод оптимизации надежности технической системы в условиях ограниченной информации

Н. С. Подцыкин
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье построена математическая модель для оптимизации надежности и работоспособности технических систем, рассматриваемых на неограниченном интервале времени. В основу модели положено состояние системы. Модель построена в условиях недостатка статистической информации. При построении модели использовались экспертные оценки и суждения. Предложен оптимизационный алгоритм. Реализация алгоритма требует использования компьютерных вычислений.

Ключевые слова: *надежность, отказ, восстановление, управление, вложенная марковская цепь, марковский процесс принятия решений, переходная функция, оптимизация,*

У статті побудована математична модель для оптимізації надійності і працездатності технічних систем, що розглядаються на необмеженому інтервалі часу. В основу моделі покладено стан системи. Модель побудована в умовах обмеженої статистичної інформації. При побудові моделі використовувалися експертні оцінки і судження. Запропоновано оптимізаційний алгоритм. Реалізація алгоритму вимагає використання комп'ютерних обчислень.

Ключові слова: *надійність, відмова, відновлення, управління, вкладена марковська ланцюг, марковський процес прийняття рішень, перехідна функція, оптимізаціяи.*

In article the mathematical model for optimization of reliability and operability of the technical systems considered on an unlimited interval of time is constructed. The model is based on the state of the system. The model is constructed in terms of deficit of statistical information. When building the model we used expert estimates and judgments. The author proposed the optimization algorithm. Implementation of the algorithm requires the use of computer calculations.

Key words: *reliability, failure, recovery, management, embedded Markov chain, Markov decision process, the transition function, optimization.*

1. Общая постановка задачи, актуальность и цель исследования

Рассматривается техническая система, работоспособность и надежность которой снижается в процессе эксплуатации. Это связано с тем, что в процессе эксплуатации происходит износ системы, ее параметры меняются таким образом, что качество выходного продукта ухудшается, вероятность отказа увеличивается. Отказ системы нежелателен, так как обычно влечет существенные потери от простоя, кроме того, восстановление системы связано с большими затратами. Предполагается, что система контролируется через заданный детерминированный период времени, если отказ на этом периоде не произошел, а если произошел, то в момент отказа. В момент контроля принимается решение о выборе средства восстановления системы в работоспособное состояние, если произошел отказ, обновление и регулировка системы в плановый момент контроля. Всякое воздействие на систему, которое в дальнейшем назовем управлением, связано с определенным простоем системы, в течение которого доход отсутствует, а применение управления требует определенных затрат, зависящих, вообще говоря, от вида управления. Формально будем считать, что имеется набор управлений, различающихся возможностью восстановления системы из состояния отказа, степенью обновления системы, то есть приближению значений параметров к их оптимальному уровню. Задача состоит в отыскании такой стратегии применения управлений, которая обеспечивала бы наибольшую эффективность использования системы на неограниченном интервале времени.

Ниже будет рассмотрено моделирование надежности технической системы “по состоянию”, которое является новым и перспективным направлением, так как позволяет повысить адекватность математической модели. Существующие методы моделирования системы “по наработке” на отказ не могут учитывать конкретные особенности системы в силу того, что в основу модели конкретной системы положены усредненные характеристики однотипных систем, к тому же, полученные в усредненном режиме эксплуатации и в усредненных внешних условиях [1]. Более высокий уровень адекватности модели позволит получить и более эффективное управление соответствующей системой.

На перспективность моделирования систем для оптимизации уровня надежности и работоспособности по состоянию указывалось в [1,2]. Однако до настоящего времени этот подход не получил должного развития.

Будем предполагать, что известен набор контролируемых параметров, содержащих информацию об уровнях надежности и работоспособности рассматриваемой системы. Такой набор информативных параметров, а также определение на его основе состояния, могут быть получены с помощью методов теории распознавания образов [3]. Необходимая информация для построения модели, очевидно, будет недостаточной, из-за необходимости специального метода ее формирования. Однако даже в условиях ограниченной информации модель будет более адекватной, чем обычно применяемые, в силу того, что она учитывает особенности конкретной системы. При необходимости правило управления системой можно улучшать, например, адаптивным методом.

Целью исследования является построение математической модели, в основе которой состояние. При этом предполагается лишь ограниченное количество статистической информации. В реальных условиях это и понятно: для получения статистической информации предварительно необходимо сформировать состояние для рассматриваемой системы.

2. Построение математической модели

Рассмотрим систему S, множество состояний которой $E=[0,1]$, с элементами x. Если предположить, что состояние системы не меняется, то состоянию $x=0$ соответствует система с минимальной вероятностью отказа на любом заданном интервале времени и максимальной эффективностью функционирования, а состоянию $x=1$ соответствует полностью изношенная система с вероятностью отказа равной единице на любом интервале времени. В процессе функционирования система ухудшает свое состояние, монотонно приближаясь к $x=1$.

Для моделирования эволюции состояния системы введем на вероятностном пространстве (Ω, F, P), где $\Omega=[0,\infty)$ с элементами ω, семейство случайных процессов $X(t,x_0)=\{\xi(t,\omega,x_0),\quad t\in T\}$, $\omega\in\Omega$, $x_0\in E$, $T=[0,\infty)$, со значениями в измеримом пространстве (R, B). Здесь R - числовая прямая и B - борелевская σ-алгебра на R [4]. Положим, что при фиксированном $\omega \in \Omega$ траектория процесса, начинающаяся из состояния $x_0 \in E$, имеет вид

$$x_t = x_0 + (1 - x_0)\frac{\omega t}{\omega t + 1} \quad . \tag{2.1}$$

Предположим, что процесс контролируется через случайный интервал времени $\varsigma = \min(\xi, \tau)$, где ξ - случайное время до отказа на рассматриваемом интервале, τ - заданный детерминированный интервал времени – период контроля. Обозначим моменты контроля через $t_1, t_2, \ldots$. В момент контроля применяется одно из возможных управлений, и, будем считать формально, что процесс мгновенно переходит в некоторое улучшенное состояние, которое будет начальным для следующего интервала времени.

Рассмотрим последовательность значений процесса перед применением управлений. Они образуют вложенную марковскую цепь [5]. Наличие такой цепи позволит выбрать удобный подход для моделирования системы, основанный на марковском процессе принятия решений [6].

Будем предполагать, что применение управления $y \in Y$ в состоянии $z \in E$ в момент контроля t приводит, во-первых, к переходу процесса в некоторое случайное состояние $u \in [0, z] \subset E$, во-вторых, определяет непосредственный средний доход на предстоящем периоде до момента следующего контроля равный $w(z, y)$. Обозначим случайную величину "улучшения" состояния через v, $v = z - u$. Из состояния u процесс идет по некоторой случайной траектории до момента следующего контроля.

Построение модели, основанной на марковском процессе принятия решений, предполагает конечность множества состояний. Дискретизацию множества E проведем следующим образом. Выберем количество N всех возможных состояний и образуем дискретное множество состояний $E_d = \{x^{(i)}, i = 0,1,\ldots, N-1\}$.
Если в момент контроля система находится в состоянии $x \in E$ из полуинтервала $\left[\frac{[x \cdot N]}{N}, \frac{[x \cdot N]+1}{N}\right)$, то поставим ему в соответствие состояние $x^{(i)} \in E_d$, где $i = [x \cdot N]$. Квадратные скобки обозначают здесь целую часть числа.

Отображение $f : E_d \to Y$ назовем решающей функцией. Каждой решающей функции f можно поставить в соответствие матрицу переходных вероятностей $Q(f)$ с элементами $Q(x|z, f(z))$, $x, z \in E_d$, и вектор-столбец непосредственных доходов $w(f)$ с компонентами $w(x, f(x))$, $x \in E_d$. Последовательность $\pi = \{f_1, f_2, \ldots\}$ решающих функций назовем стратегией управления. Стратегия определяет выбор управления $y \in Y$ для каждого состояния из E_d в каждый момент контроля. Стратегию вида $\pi = f^{(\infty)} = \{f, f, \ldots\}$ назовем стационарной.

Определим формально величину $\varphi(\pi)$ среднего дохода в единицу времени на неограниченном интервале времени при управлении стратегией π.

$$\varphi(\pi)(x) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{M}_x^\pi \sum_{i=0}^{n-1} w\left(x_{(i)}, f_i\left(x_{(i)}\right)\right).$$

где: $x = x_{(0)} \in E_d$ - состояние в начальный момент, M - знак математического ожидания, $x_{(i)} \in E_d$ - состояние системы в момент контроля t_i.

Стратегию управления π^* назовем оптимальной, если для любой стратегии π и для любого $x \in E_d$ выполнено неравенство: $\varphi\left(\pi^*\right)(x) \geq \varphi(\pi)(x)$. Стратегию π_ε назовем ε-оптимальной, если для любой стратегии π и для любого $x \in E_d$ выполнено неравенство $\varphi(\pi)(x) - \varphi(\pi_\varepsilon)(x) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Известно [6], что в условиях регулярности, оптимальную стратегию можно искать в классе стационарных стратегий. При этом $\varphi(\pi)$ примет вид:

$$\varphi(\pi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Q^i(f) w(f).$$

Здесь $\varphi(\pi)$ - вектор-столбец с одинаковыми компонентами, размерность которого равна N.

Методы нахождения оптимальной и ε-оптимальной стратегии приведены в [6,8].

Определим далее все элементы марковского процесса принятия решений, который состоит из набора следующих объектов: E_d - конечное множество состояний (определено выше); $Y = \{y_1, ..., y_k\}$ - конечное множество управлений, которое считаем известным; Q - переходная функция, заданная на $E_d \times E_d$; w - функция непосредственных доходов, заданная на $E_d \times Y$.

Для определения переходной функции Q и функции w необходимо оценить распределение времени до отказа для каждого начального состояния из E_d, вероятностное распределение случайной величины v и вероятностную меру P на σ-алгебре F. Далее рассмотрим методы оценки этих объектов по имеющейся ограниченной информации [9]. Введем следующие обозначения. Пусть I_0 - множество индексов k, определяющих начала траекторий $x^{(k)} \in E_d$, для которых имеется статистическая информация о состояниях в моменты контроля. Для каждого $k \in I_0$ обозначим через J_k множество индексов i моментов контроля $t_i^{(k)}$, $i \in J_k$, о которых имеется информация. Определим множество $J_{k,\tau} = \left\{i : t_i^{(k)} = \tau\right\} \subset J_k$. Количество элементов в любом множестве M будем обозначать через $n(M)$.

Пусть имеется статистическая информация о применении управления $y \in Y$ в состояниях $z^{(i)} \in E_d$, $i \in I_y$. Причем для фиксированного $i \in I_y$ наблюдались состояния после перехода: $u^{(l_1)},...,u^{(l_i)} \in E_d$. Множество индексов $l_1,...,l_i$, с учетом возможных повторений, обозначим через L_i, $i \in I_y$. Назовем улучшением состояния под действием управления y величину $z^{(i)} - u^{(l)}$, $l \in [0, i]$. Очевидно, что l случайная величина, распределение которой зависит от управления.

Рассмотрим далее метод получения оценки переходной функции Q.

Мы рассматриваем класс изнашивающихся систем, для которых время до отказа случайно. В [10] показано, что для достаточно широкого класса систем распределение Вейбулла до отказа имеет место при наблюдении за отдельной траекторией. Случайная величина ξ имеет распределения Вейбулла, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид $f(t|\kappa,\lambda) = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\kappa}}$, $t > 0$, $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Математическое ожидание и дисперсия ξ равны: $M\xi = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)$, $D\xi = \lambda^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\kappa}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\right)$, где $\Gamma(\ )$ - гамма функция.

Оценим параметры λ и κ распределения Вейбулла для траекторий с имеющейся информацией, затем с помощью интерполяции - для всех остальных.

Обозначим через $m_q^{(k)} = \frac{n(J_k \setminus J_{k,\tau})}{n(J_k)} \sum_{i \in J_k \setminus J_{k,\tau}} \left(t_i^{(k)}\right)^q + \frac{n(J_{k,\tau})}{n(J_k)} \tau^q$. Для каждого $k \in I_0$ оценки $\tilde{\lambda}^{(k)}$ и $\tilde{\kappa}^{(k)}$ параметров λ и κ получим по методу моментов из систем уравнений:

$$\begin{cases} m_1^{(k)} = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right), \\ m_2^{(k)} - \left(m_1^{(k)}\right)^2 = \lambda^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\kappa}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\right). \end{cases}$$

Систему удобно решать в математическом пакете MAPLE.

Рассмотрим вариант аппроксимации параметров распределения Вейбулла для начал траекторий $x^{(k)} \in E_d$, $k \notin I_0$. Из постановки задачи следует, что математическое ожидание и дисперсия времени до отказа для траекторий, начинающихся в состоянии $x^{(N)}$ равны нулю. А для траекторий, начинающихся в состоянии $x^{(0)}$, имеют определенные конечные значения. С учетом этого выберем следующие функции для аппроксимации математического ожидания и дисперсии соответственно: $M(x) = ae^{-\left(\frac{b}{1-x}\right)}$,

$D(x) = Ae^{-\left(\frac{B}{1-x}\right)}$. Оценки параметров получим по методу наименьших квадратов. Обозначим

$$\delta = \sum_{k \in I_0} \left(\tilde{\lambda}^{(k)} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) - ae^{-\left(\frac{b}{1-x^{(k)}}\right)} \right)^2,$$

$$\Delta = \sum_{k \in I_0} \left(\left(\tilde{\lambda}^{(k)}\right)^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\kappa}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \right) - Ae^{-\left(\frac{B}{1-x^{(k)}}\right)} \right)^2.$$

Тогда оценки $\tilde{a}, \tilde{b}$ параметров a, b получим, решая систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{d\delta}{da} = 0, \\ \dfrac{d\delta}{db} = 0. \end{cases}$ с помощью математического пакета MAPLE. Аналогично получим оценки параметров $\tilde{A}, \tilde{B}$ из системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{d\Delta}{dA} = 0, \\ \dfrac{d\Delta}{dB} = 0. \end{cases}$

Для произвольно выбранной траектории, начинающейся из состояния $x^{(k)} \in E_d$, время до отказа имеет распределение Вейбулла с параметрами λ, κ, оценки которых получим из системы уравнений:

$$\begin{cases} \lambda\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\kappa}\right) = \tilde{a}e^{-\left(\frac{\tilde{b}}{1-x^{(k)}}\right)}, \\ \lambda^2\left(\Gamma\left(1 + \dfrac{2}{\kappa}\right) - \Gamma^2\left(1 + \dfrac{1}{\kappa}\right)\right) = \tilde{A}e^{-\left(\frac{\tilde{B}}{1-x^{(k)}}\right)}. \end{cases}$$

Обозначим полученные оценки через $\tilde{\lambda}^{(k)}$ и $\tilde{\kappa}^{(k)}$.

Естественно предположить, что случайная величина l, определяемая величиной улучшения $z^{(i)} - u^{(l)}$ состояния под действием управления $y \in Y$, имеет биномиальное распределение с параметрами i и $p(y)$. Очевидно, что чем больше обновляет систему управление, тем оно дороже, а параметр $p(y)$ меньше. Оценки параметра $p(y)$ получим для тех управлений, для которых имеется статистическая информация. Для остальных управлений оценка может быть получена на основе экспертных суждений. Пусть управление

$y \in Y$ фиксировано. Учитывая вес каждого состояния $z^{(i)} \in E_d$ в имеющемся объеме наблюдений, получим, что оценка параметра биномиального распределения $p(y)$, полученная по методу моментов, имеет вид:

$$\tilde{p}(y) = \sum_{i \in I_y} \frac{1}{i \cdot \sum_{j \in I_y} n(L_j)} \sum_{k=1}^{n(L_i)} l_k .$$

Далее считаем, что для каждого состояния $z^{(i)} \in E_d$, известны оценки параметров биномиального распределения случайной величины l, определяющей улучшение состояния под действием каждого управления $y \in Y$.

Для оценки переходной функции Q осталось оценить меру P на множестве траекторий случайного процесса $X\left(t, x^{(i)}\right)$ при каждом фиксированном начале $x^{(i)} \in E_d$.

Выше было определено множество I_0 индексов i состояний $x^{(i)} \in E_d$, для которых имеется статистическая информация о состоянии в следующий момент контроля. Это состояния $z_k^{(i)}$, наблюдавшиеся в моменты контроля $t_k^{(i)}$, $i \in I_0$, $k \in J_i$. Тогда из (2.1) следует, что из состояния $x^{(i)} \in E_d$, $i \in I_0$, наблюдались траектории, которым соответствуют элементарные исходы из Ω:

$$\omega_k^{(i)} = \frac{z_k^{(i)} - x^{(i)}}{t_k^{(i)}\left(1 - z_k^{(i)}\right)}, \qquad k \in J_i .$$

Положим, что распределение на исходном множестве траекторий процесса является Γ - распределением для каждого начального состояния. Для оценки его параметров α и β для начального состояния $x^{(i)}, i \in I_0$ применим метод моментов. Обозначим $m_r = \frac{1}{n(J_i)} \sum_{k \in J_i} \left(\omega_k^{(i)}\right)^r$.

Тогда оценки $\tilde{\alpha}^{(i)}$ и $\tilde{\beta}^{(i)}$ имеют вид:

$$\tilde{\alpha}^{(i)} = \frac{\left(m_1^{(i)}\right)^2}{m_2^{(i)} - \left(m_1^{(i)}\right)^2}, \qquad \tilde{\beta}^{(i)} = \frac{m_1^{(i)}}{m_2^{(i)} - \left(m_1^{(i)}\right)^2} .$$

Вид зависимости параметров α и β от начального состояния $x^{(i)}$, $i \in I_0$, определяется конкретной системой, условиями ее эксплуатации. Следует предположить, что экспертная информация здесь будет отсутствовать. Поэтому предлагается до накопления необходимой статистической информации пользоваться оценками: $\tilde{\alpha} = \frac{1}{n(I_0)} \sum_{i \in I_0} \tilde{\alpha}^{(i)}$, $\tilde{\beta} = \frac{1}{n(I_0)} \sum_{i \in I_0} \tilde{\beta}^{(i)}$.

Восстановление системы из состояния отказа, как правило, требует специальных управлений. Чтобы это учесть сделаем следующее предположение. Если в момент контроля в состоянии $x^{(i)} \in E_d$ произошел отказ, обозначим это состояние так: $\hat{x}^{(i)}$. При этом количество состояний множества E_d удвоится. Обозначим новое множество состояний через $\hat{E}_d = \left\{x^{(0)},\ldots,x^{(N-1)},\hat{x}^{(0)},\ldots,\hat{x}^{(N-1)}\right\}$, $n\left(\hat{E}_d\right) = 2N$.

Для удобства обозначим $a(i,j,t) = \frac{x^{(j)} - x^{(i)}}{t\left(1 - x^{(j)}\right)}$. Пусть в момент контроля в состоянии $x^{(i)} \in \hat{E}_d$ применено управление $y \in Y$. Тогда, пользуясь законами теории вероятностей, учитывая свойства траекторий, получим, что в следующий момент контроля процесс будет находиться в состоянии $x^{(j)} \in \hat{E}_d$ с вероятностью

$$Q\left(x^{(j)} \middle| x^{(i)}, y\right) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} C_i^k\, p(y)^k \left(1 - p(y)\right)^{i-k} \cdot$$

$$\cdot \frac{\tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \int_{a(k,j,\tau)}^{a(k,j+1,\tau)} x^{\tilde{\alpha}-1} e^{-\tilde{\beta}x}\, dx \int_{\tau}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\kappa}^{(k)}}{\tilde{\lambda}^{(k)}}\right) \left(\frac{t}{\tilde{\lambda}^{(k)}}\right)^{\tilde{\kappa}-1} e^{-\left(\frac{t}{\tilde{\lambda}^{(k)}}\right)^{\tilde{\kappa}}} dt \qquad (2.2)$$

Вероятность перехода из состояния $x^{(i)}$ в состояние $\hat{x}^{(j)} \in \hat{E}_d$ произойдет с вероятностью

$$Q\left(\hat{x}^{(j)} \middle| x^{(i)}, y\right) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} C_i^k\, p(y)^k \left(1 - p(y)\right)^{i-k} \cdot$$

$$\cdot \frac{\tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} \int_0^{\tau} \left\{ \int_{a(k,j,t)}^{a(k,j+1,t)} x^{\tilde{\alpha}-1} e^{-\tilde{\beta}x}\, dx \right\} \left(\frac{\tilde{\kappa}^{(k)}}{\tilde{\lambda}^{(k)}}\right) \left(\frac{t}{\tilde{\lambda}^{(k)}}\right)^{\kappa-1} e^{-\left(\frac{t}{\tilde{\lambda}^{(k)}}\right)^{\kappa}} dt\,. \qquad (2.3)$$

Пусть задана решающая функция f. Ей соответствует матрица переходных вероятностей $Q(f)$, размерность которой $2N \times 2N$. Вероятность $Q\left(x^{(j)} \middle| x^{(i)}, f\left(x^{(i)}\right)\right)$ того, что следующий момент контроля будет плановым, а состояние будет $x^{(j)} \in \hat{E}_d$, вычисляется по формуле (2.2) независимо от вида состояния $x^{(i)}$ (“с отказом” или “без отказа”) в начале периода. Вероятность

$Q\left(\tilde{x}^{(j)} \middle| x^{(i)}, f\left(x^{(i)}\right)\right)$ того, что отказ произойдет до момента очередного контроля, а состояние системы в этот момент будет $\tilde{x}^{(j)} \in \tilde{E}_d$, вычисляется по формуле (2.3) независимо от вида состояния $x^{(i)}$ в начале периода.

Рассмотрим теперь определение функции непосредственных доходов $w(x, y)$. Пусть средняя интенсивность дохода при работе системы составляет величину $\nu(x)$ на предстоящем периоде, если траектория начиналась в состоянии x. Положим, что стоимость управления $y \in Y$ равна $r(y)$. Простой системы при реализации управления y равен $T(y)$, $y \in Y$.

Далее считаем, что, вообще говоря, допустимые управления $y \in Y$ разные для состояния в условиях отказа $\tilde{x}^{(i)}$ и для состояния без отказа $x^{(i)}$.

Функция непосредственного дохода имеет вид:

$$w\left(x^{(i)}, y\right) = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \, p(y)^k \left(1 - p(y)\right)^{i-k} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{j=k}^{N-1} \left(\int_0^{\tau} \frac{t\nu\left(x^{(k)}\right)}{t + T(y)} \cdot \int_{a(k,j,t)}^{a(k,j+1,t)} \frac{\tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} x^{\tilde{\alpha}-1} e^{-\tilde{\beta}x} dx \left(\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\lambda}}\right)\left(\frac{t}{\tilde{\lambda}}\right)^{\tilde{\kappa}-1} e^{-\left(\frac{t}{\tilde{\lambda}}\right)^{\tilde{\kappa}}} dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\tau\nu\left(x^{(k)}\right)}{\tau + T(y)} \int_{a(k,j,\tau)}^{a(k,j+1,\tau)} \frac{\tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}}}{\Gamma(\tilde{\alpha})} x^{\tilde{\alpha}-1} e^{-\tilde{\beta}x} dx \int_{\tau}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\lambda}}\right)\left(\frac{t}{\tilde{\lambda}}\right)^{\tilde{\kappa}-1} e^{-\left(\frac{t}{\tilde{\lambda}}\right)^{\tilde{\kappa}}} dt \right)\right\}.$$

Величина $w\left(x^{(i)}, y\right)$ имеет смысл среднего дохода в единицу времени на периоде, начинающемся в состоянии $x^{(i)}$, в котором применено управление y.

Решающей функции f ставится в соответствие вектор-столбец $w(f)$ размерности $2N$ с компонентами $w(z, f(z))$, $z \in \left\{x^{(0)}, \ldots, x^{(N-1)}, \tilde{x}^{(0)}, \ldots, \tilde{x}^{(N-1)}\right\}$.

3. Метод оптимизации

Приведем необходимые сведения и определения [7,8]. Пусть V - линейное векторное пространство. Вектору $v \in V$ с компонентами $v(i), i = 1,\ldots,2N$, поставим в соответствие полунорму $\|v\|_p = \max_i v(i) - \min_i v(i)$. Определим множество $S = \left\{c \in V : \|c\|_p = 0\right\}$. Фактор-пространство $V' = V / S$ определяет семейство непересекающихся классов эквивалентности, на котором введенная выше полунорма является нормой. Для определенности представителем класса эквивалентности будем считать вектор этого класса с нулевой первой компонентой и обозначать v'.

Для решения задачи оптимизации предлагается алгоритм, основанный на принципе сжатых отображений [6]. Этот алгоритм позволяет за конечное число итераций получить ε-оптимальную стратегию [6]. Обоснование правила остановки алгоритма приведено в [8].

1. Задать $\varepsilon > 0$.
2. Положить $v'_0 = 0$, $k = 1$.

k-я итерация.

Вычислить вектор v'_k фактор-пространства V' и решающую функцию f_k из системы линейных уравнений

$$v_k = \max_f \left(w(f) + Q(f) v'_{k-1} \right).$$

3. Проверить условие: $\|v'_k - v'_{k-1}\| < \varepsilon$.

Если оно выполнено, то $\pi_k = \{f_k, f_k, ...\}$ - ε-оптимальная стратегия.

Иначе увеличить k на 1 и перейти в 3.

За конечное число итераций гарантируется достижение ε-оптимальной стратегии.

Замечание. В п.3 алгоритма решающую функцию f_k и вектор v_k можно определять покомпонентно, то есть последовательно для каждого состояния находить управление, максимизирующее выражение в круглых скобках, и соответствующее значение компоненты вектора v_k.

4. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

В работе построена математическая модель технической системы для оптимизации ее уровня надежности и работоспособности. Класс рассматриваемых систем достаточно широкий. В него входят все технические системы, созданные для функционирования на неограниченном интервале времени, для которых предусмотрены (или могут быть предусмотрены) профилактические ремонты и восстановительные работы. В процессе эксплуатации такие системы подвержены износу, снижению уровня работоспособности, увеличению вероятности отказа.

В основу модели положено состояние системы, которая и определяет надежность и работоспособность. Такой подход в моделировании систем позволяет строить более адекватные модели, чем традиционный подход, основанный на наработке системы на отказ. Это связано с тем, что в традиционном подходе не учитываются особенности конкретной системы, условия ее эксплуатации. Однако при моделировании системы “по состоянию” возрастают требования на наличие статистических данных требуемого вида, а также возникает необходимость контроля некоторых параметров в заданные моменты времени. Определение информативных параметров и формирование статистических данных для рассматриваемой системы требует определенных временных затрат. Поэтому рассмотренная выше задача является актуальной, так как она решается в условиях ограниченной информации. Заметим, что при построении модели использовались экспертные оценки и суждения. Отметим также, что успешное построение модели и ее реализация без использования компьютерных вычислений практически невозможно.

В процессе управления системой накапливается необходимая статистическая информация для уточнения модели и выбора более эффективной стратегии управления. В связи с этим возникает необходимость разработки адаптивного метода управления, что может явиться направлением для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы математической теории надежности. / Под редакцией Б.В. Гнеденко. – М.: Радио и связь, 1983. – 376с.
2. Барзилович Е.Ю. Модели технического обслуживания сложных систем. М.: Высшая школа, 1982. – 231с.
3. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания. М.: Высшая школа, 1989. – 231с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. – 496с.
5. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. – 272с.
6. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. – 175с.
7. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. – 443с.
8. Подцыкин Н.С. Оптимизация периода наблюдений в марковском процессе принятия решений. // Вісник Харківського національного університету. Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”. 2004, № 629. – с.25-32.
9. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. – 648с.
10. Подцыкин Н.С. Математическая модель динамики восстанавливаемых систем.// Радиоэлектроника и информатика. 2001, № 4(17). – с.85-90.

Надійшла – 13.11.2013.