

УДК 539.3

## Плоска деформація багат шарової плити з пружними зв'язками між шарами

Н. М. Антоненко

*Запорізький національний технічний університет, Україна*

У статті запропоновано спосіб визначення напружено-деформованого стану багат шарової плити з пружними зв'язками між шарами для випадку плоскої деформації. Спосіб розв'язання ґрунтується на методі функцій податливості. Отримані аналітичні формули для розрахунку матриць податливості. Для двох шарової плити, яка знаходиться під дією нормальних зосереджених навантажень, наведено чисельні результати, які ілюструють вплив коефіцієнтів пружних зв'язків на розподіл напружень та переміщень у шарах плити.

**Ключові слова:** багат шарова плита, коефіцієнти пружних зв'язків, метод функцій податливості, матриці податливості, інтегральне перетворення Фур'є

В статье предложен способ определения напряженно-деформированного состояния многослойной плиты с упругими связями между слоями для случая плоской деформации. Способ решения основан на методе функций податливости. Получены аналитические формулы для расчета матриц податливости. Для двухслойной плиты, которая находится под действием нормальных сосредоточенных напряжений, приведены численные результаты иллюстрирующие влияние коэффициентов упругих связей на распределение напряжений и перемещений в слоях плиты.

**Ключевые слова:** многослойная плита, коэффициенты упругих связей, метод функций податливости, матрицы податливости, интегральное преобразование Фурье

The method of determination of the stress-strain state of a multilayer plate with elastic connections between layers in the case of the plane deformation is considered. The technique is based on the method of compliance functions. Analytical formulas for the calculation of compliance matrices are built. Numerical computations were carried out. The influence of coefficients of elastic connections on the distribution of stresses and distribution in the points of the two-layers plate is researched.

**Key words:** multilayer plate, elastic connections, method of compliance functions, compliance matrix, Fourier integral transformation

### 1. Вступ та актуальність

Широке застосування шаруватих елементів в інженерних конструкціях приводить до необхідності визначення їх напружено-деформованого стану. Якщо шари поєднані за допомогою клею, то виникає необхідність враховувати податливість пружного проміжного шару. У [1] запропоновано спрощений підхід до моделювання проміжного шару за допомогою пружних зв'язків: на спільній межі двох сусідніх шарів різниці горизонтальних (вертикальних) переміщень пропорційні дотичним (нормальним) напруженням у відповідних точках вказаної межі. В рамках цієї моделі, коли проковзування відбувається тільки в горизонтальному напрямі, виконано роботи [2, 3, 4].

У даній статті метод функцій податливості, запропонований Приварниковим А.К. [5], розповсюджується на багат шарові плити з пружними зв'язками між шарами. Раніше цим методом були знайдені розв'язки граничних задач для багат шарових плит з ідеальним типом контакту між шарами [6, 7, 8].

У роботі [9] отримано розв'язок першої граничної задачі для багатошарової основи (пакет пружних шарів, який лежить на півпросторі) з пружними зв'язками між шарами.

## 2. Постановка задачі

Розглянемо плоску деформацію багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. Багатошарову плиту моделюватимемо пакетом пружних невагомих шарів. Матеріал шарів вважаємо однорідним та ізотропним. Кожен шар характеризуємо товщиною  $h$  та двома пружними характеристиками – модулем зсуву  $\mu$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ . На верхній та нижній межах плити відомі навантаження. Необхідно визначити напруження та переміщення точок плити, якщо відомо, що плита знаходиться в рівновазі.

Нумерацію шарів будемо проводити зверху вниз, починаючи з одиниці. Усі величини, які відносяться до  $k$ -го шару, будемо позначати нижнім індексом  $k$ . Якщо це не призводитиме до неоднозначності, то індекси опускатимемо. В кожному шарі введемо локальну декартову систему координат  $O_k x_k z_k$  так, як показано на рис. 1.

Граничні умови задачі:

$$\sigma_{z1}(x,0) = f(x), \tau_{xz1}(x,0) = g(x), \sigma_{zn}(x,h_n) = \tilde{f}(x), \tau_{xzn}(x,h_n) = \tilde{g}(x), \quad (1)$$

Умови спряження шарів:

$$\sigma_{zk+1}(x,0) = \sigma_{zk}(x,h_k), w_{k+1}(x,0) = w_k(x,h_k) + r_k \sigma_{zk}(x,h_k), \quad (2)$$

$$u_{k+1}(x,0) = u_k(x,h_k) + m_k \tau_{xzk}(x,h_k), \tau_{xzk+1}(x,0) = \tau_{xzk}(x,h_k), \quad (3)$$

де  $m_k \geq 0$ ,  $r_k \geq 0$  – дотичні та нормальні коефіцієнти пружних зв'язків відповідно.

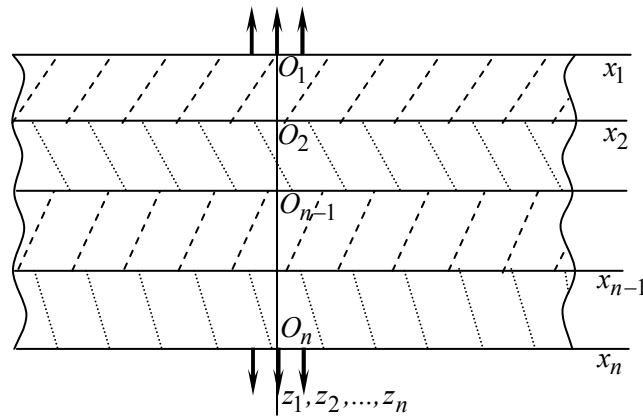


Рис.1

Для кожного з шарів плити виконуються рівняння Ламе та закон Гука.

Вважатимемо, що всі напруження та переміщення задовольняють умовам існування одномірного інтегрального перетворення Фур'є по змінній  $x$  (для будь-якого  $z \in h_k$ ):

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (4)$$

Уведемо безрозмірні величини  $\tilde{x}_k = \frac{x_k}{l}$ ,  $\tilde{z}_k = \frac{z_k}{l}$ ,  $\tilde{h}_k = \frac{h_k}{l}$ ,  $\tilde{\mu}_k = \frac{\mu_k}{M}$ ,  
 $\tilde{r}_k = \frac{r_k M}{l}$ ,  $\tilde{m}_k = \frac{m_k M}{l}$ ,  $\tilde{u}_k = \frac{u_k}{l}$ ,  $\tilde{w}_k = \frac{w_k}{l}$ ,  $\tilde{\tau}_{xzk} = \frac{\tau_{xzk}}{M}$ ,  $\tilde{\sigma}_{zk} = \frac{\sigma_{zk}}{M}$ , де  $l$ ,  $M$  –  
характерні величини ( $[l] = m$ ,  $[M] = Pa$ ). У подальшому тильди опускатимемо.  
Всі міркування та розрахунки проводитимемо з безрозмірними величинами.

### 3. Метод розв'язання

У просторі трансформант Фур'є напруження та переміщення в шарі можна представити у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій  $\alpha_k(\xi)$ ,  $\beta_k(\xi)$ ,  $\gamma_k(\xi)$ ,  $\delta_k(\xi)$ , які пов'язані з трансформантами напружень та переміщень точок верхньої межі  $k$ -го шару такими співвідношеннями:

$$\alpha_k = \bar{\sigma}_{zk}(\xi, 0), \quad \beta_k = \mu_k W_k(\xi, 0), \quad \gamma_k = \mu_k S_k(\xi, 0), \quad \delta_k = -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xzk}(\xi, 0), \quad (5)$$

де  $S_k = -i\xi \bar{u}_k(\xi, z)$ ,  $W_k = p \bar{w}_k(\xi, z)$ ,  $p = |\xi|$ .

Вирази для обчислення трансформант напружень і переміщень у шарі, як показано в [10], мають вигляд:

$$2\mu W(\xi, z) = ((2 - \omega)sh pz - \omega pz ch pz)\alpha + 2(-\omega pz sh pz + ch pz)\beta + \\ + 2((1 - \omega)sh pz - \omega pz ch pz)\gamma - \omega pz sh pz \delta, \quad (6)$$

$$2\mu S(\xi, z) = \omega pz sh pz \alpha + 2((1 - \omega)sh pz + \omega pz ch pz)\beta + \\ + 2(\omega pz sh pz + ch pz)\gamma + ((2 - \omega)sh pz + \omega pz ch pz)\delta, \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = (ch pz - \omega pz sh pz)\alpha + 2\omega(sh pz - pz ch pz)\beta - \\ - 2\omega pz sh pz \gamma - ((1 - \omega)sh pz + \omega pz ch pz)\delta, \quad (8)$$

$$-i\xi p^{-1} \bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = -(1 - \omega)sh pz + \omega pz ch pz \alpha + 2\omega pz sh pz \beta + \\ + 2\omega(sh pz + pz ch pz)\gamma + (ch pz + \omega pz sh pz)\delta, \quad (9)$$

де  $\omega = 0,5/(1 - \nu)$ .

Отже, для визначення напружень і переміщень в  $k$ -му шарі необхідно знати чотири допоміжні функції  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\delta_k$ .

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів плити. Розглянемо спільну межу  $k$ -го та  $k+1$ -го шарів. Рекурентні співвідношення, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів мають вигляд [9]:

$$\bar{\alpha}_{k+1} = T_{11k} \bar{\alpha}_k + T_{12k} \bar{\beta}_k, \quad (10)$$

$$\bar{\beta}_{k+1} = (T_{21k} + NT_{11k}) \bar{\alpha}_k + (T_{22k} + NT_{12k}) \bar{\beta}_k, \quad (11)$$

де  $\Delta_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}$ ,  $S_k = sh p_k$ ,  $C_k = ch p_k$ ,  $p_k = ph_k$ ,  $N = \begin{pmatrix} r_k p \mu_{k+1} & 0 \\ 0 & m_k p \mu_{k+1} \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{aligned}
T_{11k} &= \begin{pmatrix} C_k - \omega_k p_k S_k & -(1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ -(1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & C_k + \omega_k p_k S_k \end{pmatrix}, \\
T_{12k} &= \begin{pmatrix} 2\omega_k (S_k - p_k C_k) & -2\omega_k p_k S_k \\ 2\omega_k p_k S_k & 2\omega_k (S_k + p_k C_k) \end{pmatrix}, \\
T_{21k} &= \frac{1}{2\Delta_k} \begin{pmatrix} (2 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k & -\omega_k p_k S_k \\ \omega_k p_k S_k & (2 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k \end{pmatrix}, \\
T_{22k} &= \frac{1}{\Delta_k} \begin{pmatrix} -\omega_k p_k S_k + C_k & (1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ (1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & \omega_k p_k S_k + C_k \end{pmatrix}, \\
\bar{\alpha}_k &= (\alpha_k, \delta_k)^t, \quad \bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^t.
\end{aligned} \tag{12}$$

Уведемо фіктивний шар з номером  $n + 1$ . Запишемо умови на спільній межі  $n$ -го та  $n + 1$ -го шарів:

$$\sigma_{zn+1}(x, 0) = \sigma_{zn}(x, h_n), \quad \tau_{xzn+1}(x, 0) = \tau_{xzn}(x, h_n).$$

Застосуємо до останніх співвідношень пряме перетворення Фур'є. Із використанням співвідношень (5), (8), (9) запишемо їх у матричному вигляді:

$$\bar{\alpha}_{n+1} = T_{11n} \bar{\alpha}_n + T_{12n} \bar{\beta}_n. \tag{13}$$

Виразимо вектор  $\bar{\alpha}_{n+1}$  через вектори  $\bar{\alpha}_n$  та  $\bar{\beta}_n$ , потім через вектори  $\bar{\alpha}_{n-1}$  та  $\bar{\beta}_{n-1}$  і так далі до  $\bar{\alpha}_k$  та  $\bar{\beta}_k$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_{n+1} &= T_{11n} \bar{\alpha}_n + T_{12n} \bar{\beta}_n = [T_{11n} T_{11n-1} + T_{12n} (T_{21n-1} + N T_{11n-1})] \bar{\alpha}_{n-1} + \\
&+ [T_{11n} T_{12n-1} + T_{12n} (T_{22n-1} + N T_{12n-1})] \bar{\beta}_{n-1} = \dots
\end{aligned}$$

Із вище наведеного випливає, що вектор  $\bar{\alpha}_{n+1}$  є лінійною комбінацією векторів  $\bar{\alpha}_k$  та  $\bar{\beta}_k$ , а, отже, вектор  $\bar{\beta}_k$  можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів  $\bar{\alpha}_k$  та  $\bar{\alpha}_{n+1}$ :

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1}, \tag{14}$$

де матриці  $A_k$  та  $B_k$  – матриці податливості багат шарової плити за термінологією [7].

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості сусідніх плит. Для шару з номером  $n$  мають місце співвідношення:

$$\bar{\beta}_n = A_n \bar{\alpha}_n + B_n \bar{\alpha}_{n+1}.$$

Із співвідношення (13) отримуємо

$$\bar{\beta}_n = -T_{12n}^{-1} T_{11n} \bar{\alpha}_n + T_{12n}^{-1} \bar{\alpha}_{n+1}.$$

Оскільки два останні співвідношення мають збігатися для будь-яких  $\bar{\alpha}_n$  та  $\bar{\alpha}_{n+1}$ , маємо

$$A_n = -T_{12n}^{-1} T_{11n}, \quad B_n = T_{12n}^{-1}. \tag{15}$$

Перейдемо до побудови співвідношень, які пов'язують матриці податливості  $k$ -го та  $k + 1$ -го шарів. З одного боку із співвідношень (11) та (14) отримуємо

$$\bar{\beta}_{k+1} = (T_{21k} + N T_{11k}) \bar{\alpha}_k + (T_{22k} + N T_{12k}) (A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1}) =$$

$$= (T_{21k} + NT_{11k} + (T_{22k} + NT_{12k})A_k)\bar{\alpha}_k + (T_{22k} + NT_{12k})B_k\bar{\alpha}_{n+1}. \quad (16)$$

З іншого боку із співвідношень (14) одержуємо

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} &= A_{k+1}(T_{11k}\bar{\alpha}_k + T_{12k}\bar{\beta}_k) + B_{k+1}\bar{\alpha}_{n+1} = \\ &= A_{k+1}(T_{11k}\bar{\alpha}_k + T_{12k}(A_k\bar{\alpha}_k + B_k\bar{\alpha}_{n+1})) + B_{k+1}\bar{\alpha}_{n+1} = \\ &= A_{k+1}(T_{11k} + T_{12k}A_k)\bar{\alpha}_k + (A_{k+1}T_{12k}B_k + B_{k+1})\bar{\alpha}_{n+1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Із співвідношень (16) та (17) отримуємо

$$A_k = (T_{22k} + NT_{12k} - A_{k+1}T_{12k})^{-1}(A_{k+1}T_{11k} - T_{21k} - NT_{11k}). \quad (18)$$

$$B_k = (T_{22k} + NT_{12k} - A_{k+1}T_{12k})^{-1}B_{k+1}. \quad (19)$$

Якщо коефіцієнти пружних зв'язків покласти рівними нулю, то формули (18) та (19) співпадуть із отриманими в [7] для багатошарових плит з ідеальним контактом між шарами. Якщо матриця  $B_n$  нульова, то побудовані рекурентні співвідношення співпадають із побудованими в [9] для багатошарової основи з пружними зв'язками між шарами.

#### 4. Чисельні результати

За допомогою розробленого апарату досліджено вплив пружних зв'язків на напруження та переміщення в точках нижньої межі верхнього шару двошарової плити. Розрахунки наведено для двошарової плити з такими характеристиками:  $h_1 = h_2 = 1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 2$ . До верхньої та нижньої меж плити прикладені нормальні зосереджені навантаження, дотичні навантаження відсутні  $\sigma_{z1}(x,0) = 1$ ,  $\tau_{xz1}(x,0) = 0$ ,  $\sigma_{z2}(x,h_2) = 1$ ,  $\tau_{xz2}(x,h_2) = 0$ .

Номери графіків на рисунках вказують на величини коефіцієнтів пружних зв'язків при яких проводились розрахунки (таблиця 1).

Таблиця 1

Номер графіка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m$	0	0,01	0,1	1	10	0	0	0	0,1	1	10
$r$	0	0,01	0,1	1	10	0,1	1	10	0	0	0

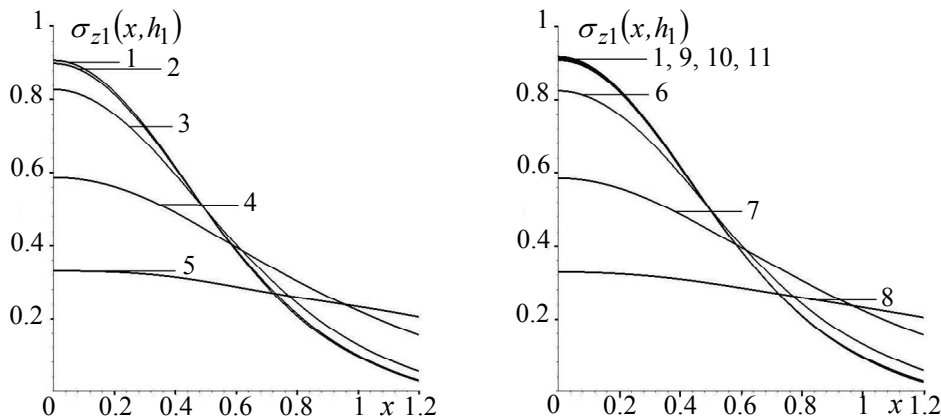


Рис. 2. Нормальні напруження у точках нижньої межі верхнього шару двошарової плити

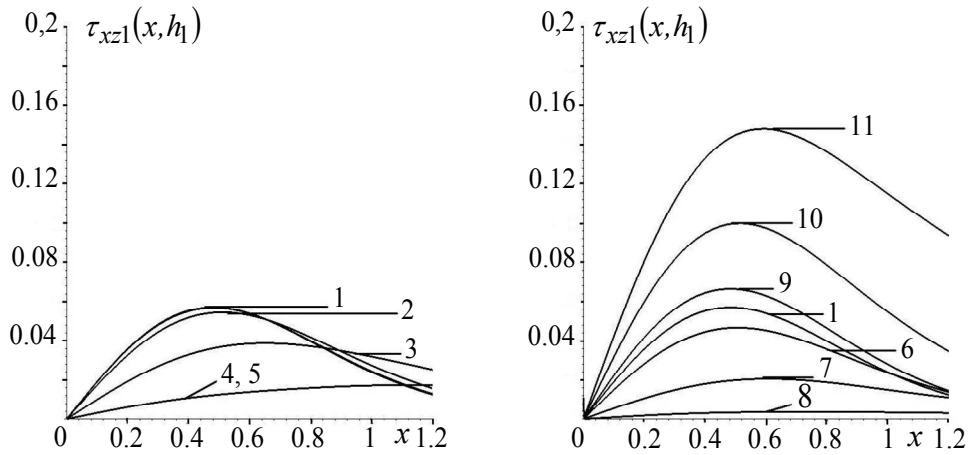


Рис. 3. Дотичні напруження у точках нижньої межі верхнього шару двошарової плити

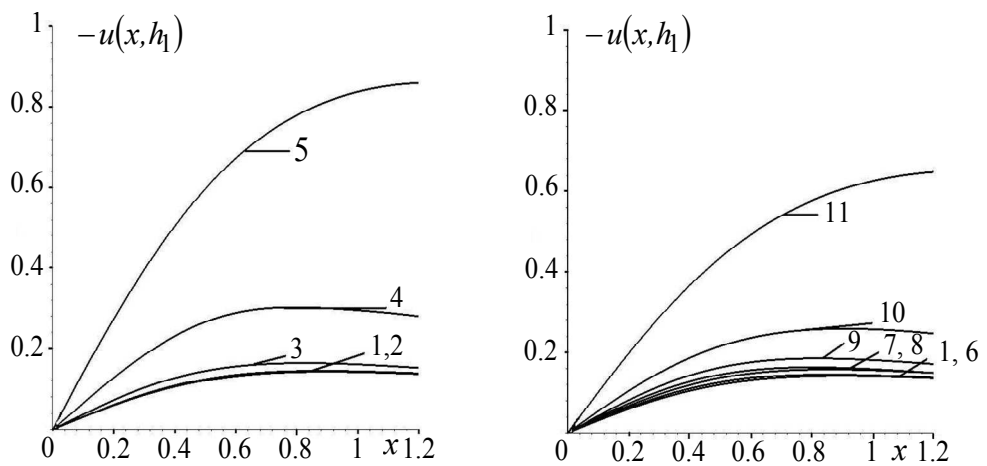


Рис. 4. Горизонтальні переміщення точок нижньої межі верхнього шару двошарової плити

## 5. Висновки

- Із графіків, наведених на рис. 2–4, можна зробити такі висновки:
- при одночасному спрямуванні коефіцієнтів пружних зв'язків до нуля ми отримуємо результати, які відповідають ідеальному контакту між шарами;
  - одночасне збільшення величин коефіцієнтів пружних зв'язків призводить до зменшення нормальних  $\sigma_{z1}$  і дотичних  $\tau_{xz1}$  напружень;
  - вплив дотичних пружних зв'язків на розподіл нормальних напружень менш суттєвий, ніж нормальних пружних зв'язків, для дотичних напружень спостерігаємо обернений ефект.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Jones J.P., Whitter J.S. Waves at a flexibly bonded interface // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967. – Vol. 34, № 4. – P. 178–183.
2. Годес Ю.Я. Функции податливости многослойного основания с упругими связями между слоями // Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости : межвуз. сб. научн. тр. – Днепропетровск, 1987. – С. 92 – 97.
3. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двух задачах анизотропной двухслойной полосы при неполном контакте между слоями // Изв. НАН Армении. Механика. – 1997. – Т. 50, № 3-4. – С. 34–41.
4. Барсегян В.М., Хачатрян А.М. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для трехслойной полосы при различных условиях контакта слоев // Изв. НАН Армении. Механика. – 2001. – Т. 54, № 1. – С. 17–25.
5. Приварников А.К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. – Днепропетровск.: ДГУ, 1976. – 60 с.
6. Вольский С.Л., Приварников А.К. К расчету слоистых плит // Расчеты прочности и пластичности : сб. научн. тр. – Днепропетровск, 1974. – С. 58–66.
7. Величко И.Г., Приварников А.К., Спица О.Г. Матричный алгоритм аналитического определения напряженно-деформированного состояния упругой многослойной плиты // Теор. и прикл. мех. – 2001. – Вып. 34. – С. 38–43.
8. Величко О.В. Плоска деформація пружної багат шарової плити під дією періодичної системи навантажень // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 1, № 6. – С. 162–170.
9. Антоненко Н.М., Величко І.Г. Узагальнення методу функцій податливості на випадок плоскої деформації багат шарової основи при наявності дотичних і нормальних пружних зв'язків між шарами // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2010. – Вип. 14. – Т. 1, № 5. – С. 39–45.
10. Ткаченко І.Г. Двовірна мішана задача термопружності для багат шарової основи / І.Г. Ткаченко // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 70 – 78.