

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

Метод комплексного аналізу моделювання процесу витіснення сланцевого газу з урахуванням тріщин гідророзриву

А. Я. Бомба, А. М. Сінчук

Рівненський державний гуманітарний університет, Україна

На основі модифікації закону Дарсі (шляхом введення критичного значення градієнта тиску), побудовано математичну модель процесу квазістаціонарної фільтраційної течії сланцевого газу з урахуванням тріщин гідророзриву, як одного із технологій інтенсифікації відтоку. З використанням ідей методів комплексного аналізу (квазіконформних відображень) та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, розроблено алгоритм числового наближення розв'язків відповідних нелінійних крайових задач.

Ключові слова: тріщина гідророзриву, квазістаціонарна фільтрація, сланцева порода, критичне значення градієнту тиску, квазіконформне відображення.

На основании модификации закона Дарси (путем введения критического значения градиента давления), построена математическая модель процесса квазистационарной фильтрации течения сланцевого газа с учетом трещин гидроразрыва, как одного из технологий интенсификации оттока. С использованием идей методов комплексного анализа (квазиконформных отображений) и поэтапных фиксации характеристик среды и процесса, разработан алгоритм численного приближения решений соответствующих краевых задач.

Ключевые слова: трещина гидроразрыва, квазистационарная фильтрация, сланцевая порода, критическое значение градиента давления, квазиконформное отображение.

Based on law of Darcy modifications (by introducing critical value of the pressure gradient) described mathematical model of a quasi-stationary flow filtration shale including hydraulic fracture as one outflow intensification technologies. Using the ideas of complex analysis methods (quasi-conformal mappings), and step-by-step fixation of process and environment characteristics developed an algorithm for the numerical approximations to solutions of the corresponding boundary value problems.

Key words: hydraulic fracture, a quasi-stationary filtration, shale breed, critical value of gradient of pressure, quasi-conformal mapping.

1. Вступ

Особливості будови сланцевих осадових порід, їх низька проникність та тріщинуватість, вимагають відшукання ефективних технологій їх розробки [1-2], які б враховували закономірності відтоку газу із систем тріщин та мікротріщин до стовбурів свердловин. Однією із таких технологій (інтенсифікації притоку сланцевого газу до свердловин) є гідравлічний розрив пласта (ГРП), який використовують для об'єднання тріщин та мікротріщин, що пронизують пласт, в деревовидні структури тим самим розширюючи зону впливу, що дронується свердловиною [3-6].

У цій роботі, на основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу [7-8], розроблено комплексний підхід до розв'язання крайових задач на інтенсифікацію відтоку газу з сланцевих осадових порід з урахуванням суміжних деформаційних процесів у присвердловинній зоні пласта [7], коли за умов квазістаціонарності

фільтраційної течії досліджуваній процес описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі (відносно критичного значення градієнта тиску).

2. Загальна постановка задачі

Розглянемо задачу комплексного дослідження фільтраційних процесів в присвердловинній зоні пласта G_z ($z = x + iy$), що виникають внаслідок відтоку газу через мікротріщини сланцевої породи до стовбуру експлуатаційної свердловини (див., рис. 1).

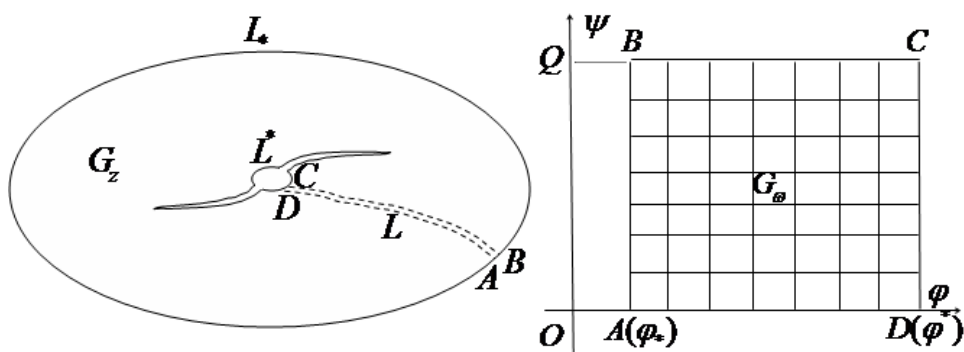


Рис. 1. Схематичне зображення фізичної області фільтрації G_z та відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_w .

Відповідний процес фільтрації, по аналогії з [9-10], опишемо за допомогою рівняння нерозривності та рівняння руху (спеціальним чином модифікованого закону Дарсі, відносно критичного значення градієнту тиску):

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = -\frac{k \chi(I, I_{kr})}{\mu} \operatorname{grad} p, \quad (1)$$

за відповідних умов на контурах пласта: $p|_{L^*} = p^*$, $p|_L = p^*$ ($p^* > p^*$). Тут

$I = I(x, y) = |\operatorname{grad} p(x, y)| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ – величина градієнта тиску p ;

$L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$, $L = \{z: f(x, y) = 0\}$ – контур живлення та контур свердловини, відповідно; $\rho = \rho(p)$, μ – густина і в'язкість газу; k – абсолютна проникність середовища, яку у випадку існування тріщин ГРП представимо у

виді $k(x, y) = \begin{cases} k_l, & (x, y) \in G_z^l, l=1,2,3... \\ k_0, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_l G_z^l \end{cases}$, G_z^l – ділянки пласта, яку займає l -

та тріщина; χ – коефіцієнт, що характеризує залежність проникності осадової породи (при ускладнених геологічних умовах фільтрації, для яких k_0/μ мала

величина) від величини градієнта тиску і визначається наступним співвідношенням

$$\chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}), & \text{при } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{при } I \leq I_{kr}, \end{cases} \quad (2)$$

де F – задана монотонно зростаюча функція, I_{kr} – критичне значення початкового градієнту.

Для побудови наближеного розв'язку задачі введемо квазіпотенціал швидкості у вигляді функції Лейбензона [11]:

$$\varphi(p) = \varphi_* + \frac{k}{\mu} \int_p^{p_*} \rho(\alpha) d\alpha$$

та перепишемо відносно нього рівняння (1) з відповідними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\chi(\tilde{I}, I_{kr}) \operatorname{grad} \varphi) &= 0, \quad \tilde{v} = \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \operatorname{grad} \varphi, \\ \varphi|_{L_*} &= \varphi(p_*) = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi(p^*) = \varphi^*, \quad (\varphi_* < \varphi^*), \end{aligned} \quad (3)$$

де $\tilde{\rho}(\varphi) = \rho(p(\varphi))$, $\tilde{I} = \frac{\mu}{k \tilde{\rho}(\varphi)} \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$.

Аналогічно до [7], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ та здійснивши умовний розріз L області G_z вздовж лінії розділу течії, що визначаються точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, поставлена вище задача зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus L$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \\ \varphi|_{AB} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \\ [\varphi]|_{\partial G_z^l} &= 0, \quad [\nu_n]|_{\partial G_z^l} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де $Q = \int_{AB} -\nu_y dx + \nu_x dy$ – невідома витрата; $\nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}$; $[\bullet]|_{\partial G_z^l}$

– стрибок заданої функції на ∂G_z^l .

Через геометричну складність області G_z^0 та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω ми розглядатимемо замість прямої задачі на квазіконформне відображення $G_z^0 \rightarrow G_\omega$ обернену до неї [8], яка, включаючи рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин

відповідної характеристичної функції течії $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ (виконання яких вимагатимемо і на розрізі, що «роздвоюється» при переході від області G_z до G_ω), запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} y_\psi = x_\varphi, & (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} x_\psi = -y_\varphi, & J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{cases} \quad (5)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q \quad (6)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad (7)$$

$$\left[\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right]_{\partial G_\omega^l} = 0, \quad \text{де } l = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\tilde{\rho}(\varphi)}{\chi(\tilde{I}, I_{kr})} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\tilde{\rho}(\varphi)}{\chi(\tilde{I}, I_{kr})} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Алгоритм числового розв'язування задачі

Для побудови **різницевого аналогу** задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, \text{ при } i = \overline{0, n}; \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \text{ при } j = \overline{0, m}\}$, де $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/n$, $\Delta\psi = Q/m$ – кроки сітки відповідно по змінним φ та ψ , $\gamma = \Delta\varphi/\Delta\psi$ – квазіконформний інваріант, $n, m \in \mathbb{N}$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу.

Різницеві аналоги рівнянь (9) (з урахуванням умов (8)), крайових умов (6), а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) запишемо відповідно у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma^2 \left(\frac{\chi(\tilde{I}_{i,j+1/2}, I_{kr})(x_{i,j+1} - x_{i,j})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j+1/2})} - \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j-1/2}, I_{kr})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j-1/2})} \right) + \\ & + \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(x_{i+1,j} - x_{i,j})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} - \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} = 0, \\ & \gamma^2 \left(\frac{\chi(\tilde{I}_{i,j+1/2}, I_{kr})(y_{i,j+1} - y_{i,j})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j+1/2})} - \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j-1/2}, I_{kr})(y_{i,j} - y_{i,j-1})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j-1/2})} \right) + \\ & + \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(y_{i+1,j} - y_{i,j})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} - \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i-1/2,j})(y_{i,j} - y_{i,j-1})}{\chi(\tilde{I}_{i-1/2,j}, I_{kr})} = 0; \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ & x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n}; \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ & \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ & + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\varphi_{i,j\pm 1/2} = (\varphi_{i,j\pm 1} + \varphi_{i,j})/2$,
 $\varphi_{i\pm 1/2,j} = (\varphi_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j})/2$, $\tilde{I}_{i,j\pm 1/2} = (\tilde{I}_{i,j\pm 1} + \tilde{I}_{i,j})/2$, $\tilde{I}_{i\pm 1/2,j} = (\tilde{I}_{i\pm 1,j} + \tilde{I}_{i,j})/2$,
 $\tilde{I}_{i,j} = \frac{\mu \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}}{kJ_{i,j} \tilde{\rho}(\varphi_{i,j}) \Delta \psi}$.

Невідому витрату Q наближено шукаємо за формулою $Q = \frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$, величину γ одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників [3] двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j+1/2})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j+1/2}, I_{kr})} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad (13)$$

де $\alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}$, $\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}$.

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (5)–(9) різницевою задачею в загальному випадку, побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної

точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 та рівень квазіконформності δ_* відображення. Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (11), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (13), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та невідому величину витрати

$$Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}. \text{ Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів}$$

$(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (10) відносно $x_{i,j}$ та

$y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різниці аналогів умов типу Коші-Рімана (12). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (13), знаходимо нове наближення величини Q , якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо

$$\text{величину } S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} - \text{зміщення вузлів на}$$

границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізом вздовж лінії течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (5):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} \left| (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right|,$$

якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю.

4. Результати числових розрахунків

Проведемо числові розрахунки у випадку існування еліптичної тріщини гідралічного розриву, що характеризується своїми півосями $a_1 = 0.6$, $b_1 = 0.05$ і

$$\text{займає область } G_z^1 = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{b_1} \right)^2 \leq 1 \right\} \text{ пласта обмеженого контуром}$$

свердловини $L^* = \{x^*(t) = 0.1 \cos(t), y^*(t) = 0.1 \sin(t)\}$ та контуром живлення $L_* = \{x_*(t) = 2(\cos(t) + 0.1 \cos(2t)), y_*(t) = 2(\sin(t) - 0.1 \sin(4t))\}$ при $0 \leq t < 2\pi$, $n \times m = 40 \times 60$, $\rho = 0.9$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$, $k_1 = 10$, $k_0 = 0.01$, $\chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + \alpha(I - I_{kr}), & \text{при } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{при } I \leq I_{kr}, \end{cases}$ де $\alpha = 1$, $I_{kr} = 0.6$.

На основі отриманих результатів, підтверджено, що у випадку наявності тріщин гідравлічного розриву у сланцевому пласті відбуваються суміжні деформаційні процеси, зокрема, навколо цих тріщин утворюється зона (рис. 2), яка характеризується підвищеною проникністю по відношенню до всього пласта і благотворно впливає на дебіт експлуатаційної свердловини: при їх відсутності $Q = 2.104$, а при наявності – $Q = 12.726$.

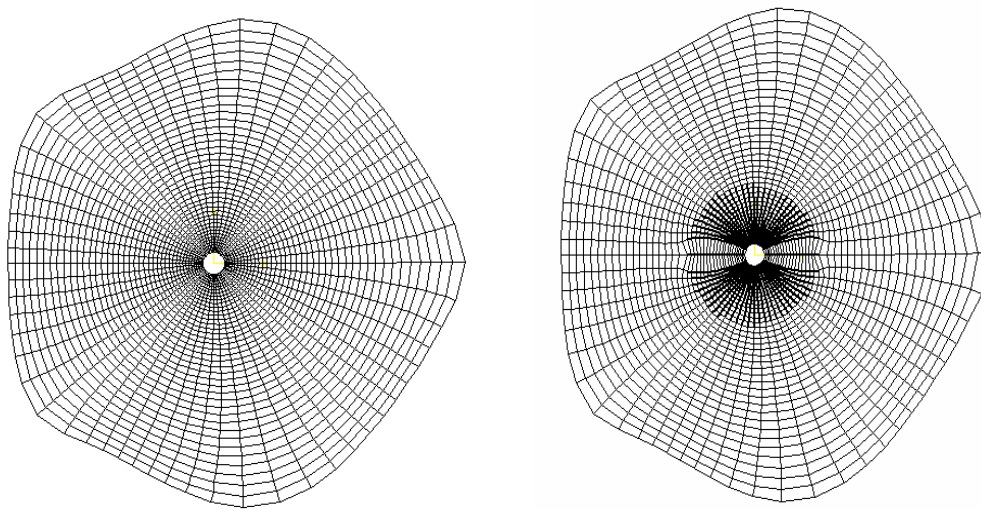


Рис. 2. Гідродинамічні сітки, відповідно при відсутності та наявності тріщин ГРП з урахуванням суміжних деформаційних ефектів

5. Висновки за результатами і напрямком подальших досліджень

Модифіковано класичний закон Дарсі на випадок врахування критичного значення градієнта тиску, що дозволило в умовах квазістаціонарності процесу фільтрації (з використанням поетапної фіксації характеристик процесу і середовища) провести моделювання нелінійних фільтраційно-масообмінних процесів у присвердловинній зоні пласта. Розроблено комплексний підхід до числового розв'язання відповідних крайових задач з урахуванням впливу тріщин гідравлічного розриву на інтенсифікацію відтоку газу з сланцевих осадових порід з урахуванням суміжних деформаційних процесів. **У перспективі** є поширення отриманих у роботі результатів на випадок багатофазної багатокомпонентної фільтрації.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дейк Л.П. Практический инжиниринг резервуаров / Л. П. Дейк. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 668 с.
2. Dahi Taleghani A. Analysis of hydraulic fracture propagation in fractured reservoirs: an improved model for the interaction between induced and natural fractures, PhD Dissertation, University of of Texas at Austin, pp. 216, 2009.
3. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин гідророзриву пласта / А. Я. Бомба, А.М. Сінчук, С. В. Ярощак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2011. – № 3(40) С. 32–36.
4. Бомба А. Я. Метод комплексного аналізу дослідження двохфазної фільтрації в горизонтальних пластах з урахуванням гідророзриву / А.Я. Бомба, А.М. Синчук, С.В. Ярощак // Журнал "Електронне моделювання", №2, 2013 г., том 35, С. 25-34.
5. Бомба А. Я. Один підхід до ідентифікації фільтраційно-ємкісних параметрів нафтогазового пласта / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак // Науковий журнал «Математичне моделювання», – Дніпродзержинськ : ДДТУ, – 2013. – № 1(28). – С. 31–35.
6. Сінчук А. М. Комплексне математичне моделювання нелінійних процесів витіснення з урахуванням включень / А. М. Сінчук // Вісник ТНТУ. – 2012. — № 4(68). — С. 209-219.
7. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу : монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярощак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
8. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродиніки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечкий – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
9. Bomba A. Ya. Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions / A. Ya. Bomba, S.V Yaroschak // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 184, No. 1, July, 2012, - P. 56-69.
10. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren , M. Yuanle. Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. - 531 pp.
11. Басниев К. С. Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, Н. И. Кочина, М. В. Максимов. – М. : Недра, 1993. – 416 с.