

УДК 517.95+518.517

R-функции в математическом моделировании 3D-дома для реализации технологий 3D-печати

Ю. С. Литвинова, К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье на основе конструктивных средств теории R-функций построены уравнения фасадной стены дома, проектируемого в Амстердаме. Возможность введения буквенных параметров в уравнениях позволяет оперативно изменять форму проектируемого объекта. Свойство положительности построенной функции во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D печати.

Ключевые слова: R-функции, трансляционная симметрия, визуализация 3D-объектов, строительные конструкции.

В статті на основі конструктивних засобів теорії R-функцій побудовано рівняння фасадної стіни будинку, який проектується у Амстердамі. Можливість введення буквенних параметрів у рівняннях дозволяє оперативно змінювати форму об'єкта, що проектується. Властивість додатності побудованої функції у внутрішніх точках об'єкту є дуже зручною для реалізації 3D-друку.

Ключові слова: R-функції, трансляційна симетрія, візуалізація 3D-об'єктів, будівельні конструкції.

In the paper we built the equations of the face wall of the home, which is projected in Amsterdam, Netherlands. The possibility of alphabetic parameters embedding permitted to change the form of projected object efficiently. The property of the built function positivity inside the object is convenient for the 3D-printing realization.

Key words: R-functions, translation symmetry, 3D-objects visualization, building units.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В Амстердаме команда архитекторов работает над проектом, призванным освоить одно из самых важных направлений развития 3D-печати – строительство зданий. В марте 2013 года сотрудники голландской фирмы DUS Architects разработали гигантский 3D-принтер под названием KamerMaker XL и напечатали с его помощью часть дома в уменьшенном масштабе 1:20 (рис.1) [1]. Для печати использован плавкий пластик на 80-процентной биологической основе, разработанный немецкой химической компанией Henkel. 3D-принтер будет печатать целиком модульные блоки, из которых потом будет собрано целое здание. Также при печати конструктивных элементов будут предусмотрены каналы для прокладки электрических и коммуникационных кабелей, водопроводных и канализационных труб.

Руководители фирмы намерены возвести здание в северной части Амстердама на канале Buiksloter, и оно будет функционировать в качестве образца и исследовательского центра для технологий 3D-печати. Но главной целью проекта является удовлетворение потребностей в жилье семи миллиардов человек на планете. И хотя на данный момент дом будет построен из пластика, в

будущем компания планирует использовать другие, более традиционные материалы для строительства.

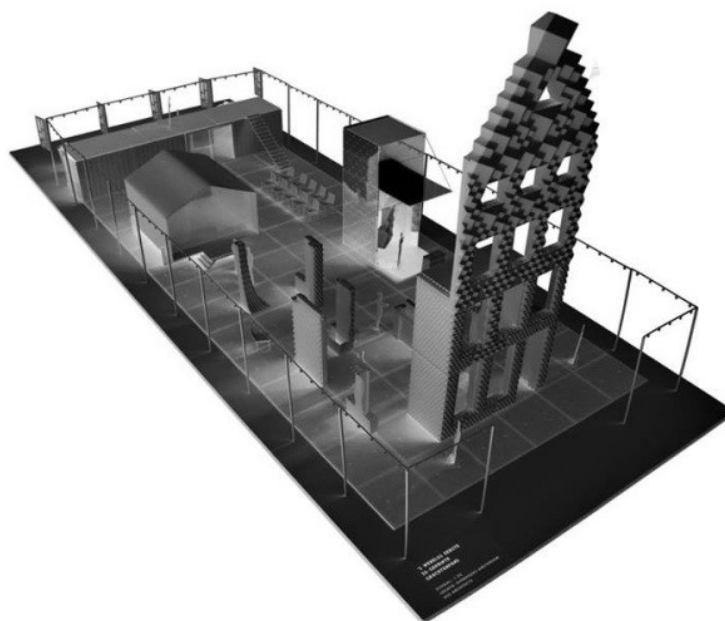


Рис.1. Проект дома в Амстердаме

Если проект будет иметь успех, то трёхмерная печать может стать основным методом производства строительных материалов любых размеров и состава. Это может не только перевернуть строительный бизнес, но и существенно улучшить экологию, уверены специалисты. Однако возникает проблема задания информации для печати, т.е. создания математической и компьютерной модели проектируемого объекта. Одним из методов решения этой проблемы является применение теории R-функций, которая позволяет описывать геометрические объекты сложной формы единым аналитическим выражением.

Целью данной работы является создание на основе теории R-функций математической и компьютерной модели фасадной стены дома по амстердамскому проекту.

2. Построение математической модели и визуализация объектов, описанных полученными уравнениями

Для построения искомым уравнений геометрических объектов используем следующие конструктивные средства теории R-функций: наиболее простую и поэтому наиболее часто используемую систему R_0 [2,3]:

$$\begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases},$$

где $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ — символы R -конъюнкции, R -дизъюнкции и R -отрицания соответственно. Кроме того, для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема. Пусть трансляционная область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$ симметрична относительно оси Oy и может быть заключена в вертикальную полосу $-a < x < a$, а области $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y, z) \geq 0]$ получены в результате преобразования переноса области Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины, кратные $h > 2a$. Тогда уравнение границы $\partial\Omega$ области $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$ имеет вид

$$\omega(x, y, z) \equiv \sigma_0(\mu(x, h), y, z) = 0, \text{ где } \mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}.$$

Построим фасадную стену дома в Амстердаме. В плоскости $y = 0$ расположим орнамент в виде прямоугольных параллелепипедов w_1 и w_2 размером $(1;1;2)$ при $z \leq hi$:

$$\begin{aligned} w_1 &= \left\{ \left(0.25 - mx^2 \right) \wedge_0 \left(1 - mz^2 \right) \right\} \wedge_0 \left(0.25 - y^2 \right) \Big| \wedge_0 (hi - z) \geq 0, \\ w_2 &= \left\{ \left(0.25 - mx_1^2 \right) \wedge_0 \left(1 - mz_1^2 \right) \right\} \wedge_0 \left(0.25 - y^2 \right) \Big| \wedge_0 (hi - z) \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} mx &= \frac{4hx}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xm, \quad mz = \frac{4hz}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)zm, \\ mx_1 &= \frac{4hx}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xm_1, \quad mz_1 = \frac{4hz}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)zm_1, \\ xm &= \frac{\pi x}{hx}, \quad zm = \frac{\pi z}{hz}, \quad xm_1 = \frac{\pi \left(x - \frac{hx}{2} \right)}{hx}, \quad zm_1 = \frac{\pi \left(z - \frac{hz}{2} \right)}{hz}, \\ &hx = 2, \quad hz = 4, \quad hi = 43, \end{aligned}$$

hx — шаг трансляции вдоль оси Ox , hz — шаг трансляции вдоль оси Oz .

При $z > hi$ в плоскости $y = 0$ расположим орнамент в виде прямоугольных параллелепипедов w_3 и w_4 размером $(4;4;2)$:

$$\begin{aligned} w_3 &= \left\{ 4 - (mu - y)^2 \right\} \wedge_0 \left\{ 4 - (mu + y)^2 \right\} \wedge_0 \left\{ 1 - muz^2 \right\} \Big| \wedge_0 (z - hi) \geq 0, \\ w_4 &= \left\{ 4 - (mrx - y)^2 \right\} \wedge_0 \left\{ 4 - (mrx + y)^2 \right\} \wedge_0 \left\{ 1 - mpzz^2 \right\} \Big| \wedge_0 (z - hi) \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$mu = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xp, \quad muz = \frac{4hz}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)zp,$$

$$mpxx = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xp3, \quad mpzz = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)zp3,$$

$$xp = \frac{\pi x}{h}, \quad zp = \frac{\pi z}{h}, \quad xp3 = \frac{\pi \left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}, \quad zp3 = \frac{\pi \left(zq - \frac{h}{2}\right)}{h},$$

$h = 4$ — шаг трансляции вдоль осей Ox и Oz .

Выполним сборку фоновых орнаментов: $wof = (w_1 \vee_0 w_2) \vee_0 (w_3 \vee_0 w_4) \geq 0$.

На высоте $z = 67, z = 58, z = 47$ построим три набора параллелепипедов размером $(6, 6, 4)$:

$$wv1 = \left((9 - (x - y)^2) \wedge_0 (9 - (x + y)^2) \right) \wedge_0 zq1(4 - zq1) \geq 0, \quad \text{где } zq1 = z - 67.$$

$$wv2 = \left((9 - (muv - y)^2) \wedge_0 (9 - (muv + y)^2) \right) \wedge_0 zq2(4 - zq2) \geq 0, \quad \text{где } zq2 = z - 58.$$

$$wv3 = \left((9 - (muv3 - y)^2) \wedge_0 (9 - (muv3 + y)^2) \right) \wedge_0 zq3(4 - zq3) \geq 0,$$

где $zq3 = z - 47$.

$$muv = \frac{4hv}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xv, \quad xv = \frac{\pi x}{hv}, \quad hv = 5 \text{ — шаг трансляции}$$

вдоль оси Ox ,

$$muv3 = \frac{4hv3}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)xv3, \quad xv3 = \frac{\pi x}{hv3}, \quad hv3 = 10 \text{ — шаг трансляции}$$

вдоль оси Ox .

Выполним общую сборку орнаментов: $wof0 = (wv1 \vee_0 wv2 \vee_0 wv3) \vee_0 wof \geq 0$ и расположим их на стене толщиной L .
 $wo = wof0 \vee_0 y(L - y) \geq 0$.

Построим уравнения системы окон: одно — треугольное на высоте $z = 70$, три — малые размером $2c = 3, 2d = 4$ на высоте $z = 52$, и девять основных размером $2a = 6, 2b = 12$.

$$wtr = ((x - z + 75) \wedge_0 (-x - z + 75)) \wedge_0 (z - 70) \geq 0,$$

$$wmal = (c^2 - mx_o^2) \wedge_0 (d^2 - (z - 52)^2) \geq 0,$$

$$w9 = ((a^2 - mx_o^2) \wedge_0 (b^2 - mz_o^2)) \wedge_0 (45 - z) \geq 0,$$

$$\text{где } mx_o = \frac{4hx_o}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)x_o,$$

$$mz_o = \frac{4hz_o}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)z_o,$$

$$x_o = \frac{\pi}{hx_o} x, \quad z_o = \frac{\pi}{hz_o} z, \quad hx_o = 10, \quad hz_o = 18, \quad hx_o \text{ — шаг трансляции вдоль}$$

оси Ox , hz_o — шаг трансляции вдоль оси Oz .

Заметим, что во всех построениях начало координат находится в центре нижнего среднего окна.

Левое нижнее окно реорганизуем в дверной проем, уравнение которого будет иметь вид $wdv = (x+13)(-x-7) \wedge_0 (-z)(9+z) \geq 0$.

Соединим уравнения оконных и дверных проемов в одно:

$w0 = wtr \vee_0 wmal \vee_0 w9 \vee_0 wdv \geq 0$. На стене $w0$ вырежем окна и двери, получив уравнение $ww2 = w0 \wedge_0 \overline{w0} \geq 0$.

Построим уравнение ступенчатого ряда для оформления верхнего уровня фасадной стены.

$$wbok = (wp \vee_0 wl) \wedge_0 (83-z) \geq 0, \quad wp = wr \vee_0 wrr \geq 0,$$

$$wl(x, y, z) = wp(-x, y, z), \quad wr = wr3 \wedge_0 y(3-y) \geq 0,$$

$$wrr = w33 \wedge_0 (9-y^2) \geq 0, \quad wr3 = wr1 \wedge_0 wr2 \geq 0, \quad w33 = w11 \wedge_0 w22 \geq 0,$$

$$wr1 = (mx1 - z2 + 4) \wedge_0 (-mx1 + z2) \geq 0, \quad wr2 = (-mx1 - z2 + 4) \wedge_0 (mx1 + z2) \geq 0,$$

$$w11 = (mxx - z2 + 4) \wedge_0 (-mxx + z2) \geq 0, \quad w22 = (-mxx - z2 + 4) \wedge_0 (mxx + z2) \geq 0,$$

$$mx1 = \frac{4hx1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)x1, \quad mxx = \frac{4hx1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin(2i-1)x3,$$

$$x1 = \frac{\pi x2}{hx1}, \quad x3 = \frac{\pi \left(x2 - \frac{hx1}{2} \right)}{hx1}, \quad \begin{cases} x2 = x \cos \pi/4 - zq \sin \pi/4, \\ z2 = x \sin \pi/4 + zq \cos \pi/4, \end{cases} \quad zq = z - 83, \quad hx1 = 8.$$

Уравнение поверхностей, ограничивающих верх фасадной стены: $kr = (x-z+85) \wedge_0 (-x-z+85) \geq 0$. Ограничим стену с вырезанными оконными и дверными проемами построенными поверхностями и присоединим ступенчатое оформление, получив уравнение $ww3 = (ww2 \wedge_0 kr) \vee_0 wbok \geq 0$. Кроме того, верхнюю часть фасада венчает куб:

$$wsh = \left((16 - (x-y)^2) \wedge_0 (16 - (x+y)^2) \right) \wedge_0 zq(5-zq) \geq 0.$$

Это уравнение добавим к уравнению уже построенной стены, ограничив ее по бокам и снизу. Таким образом, окончательно получим общее уравнение фасадной стены $W = ((wv3 \vee_0 wsh) \wedge_0 (17^2 - x^2)) \wedge_0 (12 + z) \geq 0$, визуализированное с помощью разработанной в [5,6] программы на рис.2 для различных значений буквенных параметров.

Построенная с помощью R-операций функция $W(x, y, z)$ обладает свойствами: $W(x, y, z) > 0$ внутри области (тела), $W(x, y, z) = 0$ на границе и $W(x, y, z) < 0$ вне рассматриваемой области. Это свойство удобно при реализации 3D печати для заполнения рабочим веществом пространства, где $W(x, y, z) > 0$.

В заключение следует отметить, что введение буквенных параметров позволяет оперативно менять вид фасадной стены. Здесь для удобства чтения приведены лишь некоторые из них с соответствующей иллюстрацией. Меняя значения буквенных параметров hi , L , a , b , c , d , h , hx , hz и др. (пользователь может ввести много дополнительных геометрических параметров), можно существенно, и главное — оперативно изменять форму или фрагменты строящегося объекта.

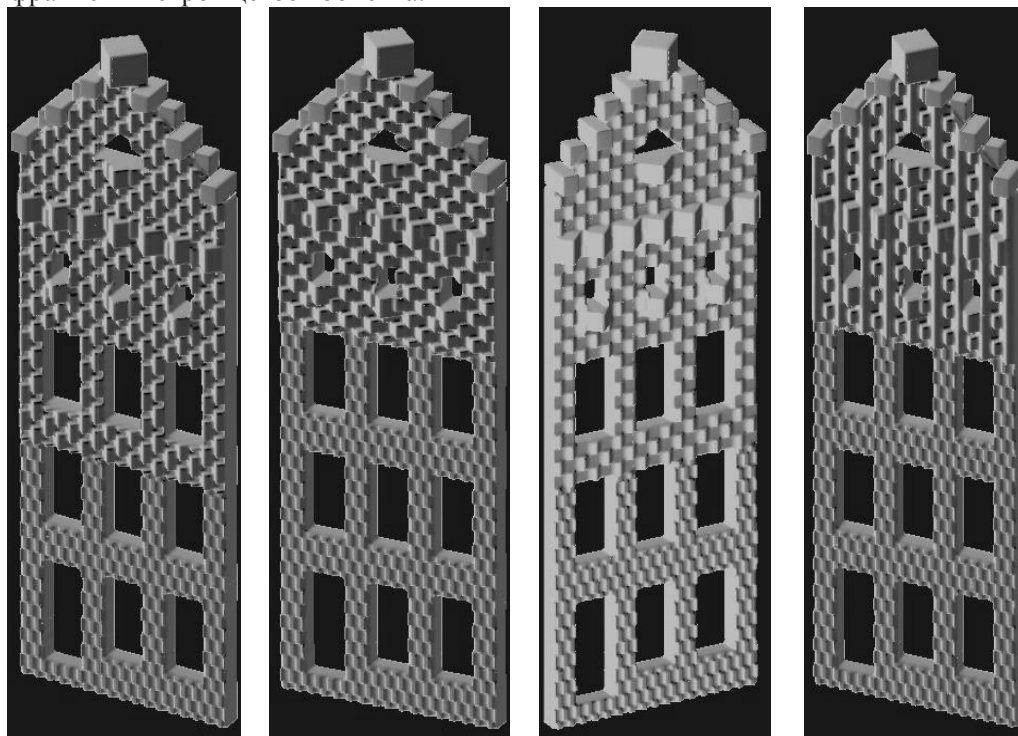


Рис.2. Визуализация уравнений фасадной стены для различных значений буквенных параметров

3. Выводы по результатам

Теория R-функций может оказаться незаменимой для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, вдоль отрезка прямой, с различными вариантами симметрии циклического типа и др. Аналитическая запись и, следовательно, возможность введения в логическую формулу буквенных параметров позволяют оперативно и порой существенно изменять форму проектируемого геометрического объекта. Свойство положительности построенной функции во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. В Амстердаме построят дом, напечатанный на 3D-принтере – BBC Ukrainian [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.bbc.co.uk/ukrainian/ukraine_in_russian/2013/04/130416_ru_s_3d_building_amsterdam.shtml
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — К.: Наук.думка, 1982.—552 с.
3. Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics // Applied Mechanics Reviews.—48, n.4.—1995.—Pp.151-188.
4. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. — Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. — 306 с.
5. Лисин Д.А., Максименко-Шейко К.В., Толоч А.В., Шейко Т.И. R-функции в компьютерном моделировании дизайна автомобиля // Прикладная информатика. — 2011. — № 6 (36). — С. 78-85.
6. Лісін Д.О. Комп'ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об'єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій «RFPreview» // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. — 2012. — № 45951.