

УДК 532.5

Алгоритм численного решения системы уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов

В. Б. Погрибный, Е. А. Стрельникова

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Рассмотрен способ численного решения системы уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов на структурированной сетке. Для каждой из проекций скорости и давления используется своя сетка. Уравнение Пуассона решается методом релаксации. Получены решения для задачи течения жидкости между двумя пластинами и в квадратной трубе.

Ключевые слова: метод конечных объемов, численное решение уравнений Навье-Стокса

Розглянуто спосіб чисельного рішення рівнянь Нав'є-Стокса методом скінчених об'ємів на структурованій сітці. Для кожної із проєкцій швидкості і для тиску використовується окрема сітка. Рівняння Пуассона розв'язується методом релаксацій. Отримано рішення для задачі току рідини між двома пластинами і у прямокутній трубі.

Ключові слова: скінчених об'ємів, чисельне рішення рівнянь Нав'є-Стокса

A method of numerical solving Navier-Stokes system of equation is considered. Finite-volume method on structured uniform grid, and different grids for pressure and velocity are used. Poisson equation is solved with SOR method. There are obtained solutions for flows between two plates and in a square tube.

Key words: finite-volume method, numerical solution of Navier-Stokes equations.

1. Постановка задачи

Статья посвящена решению уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов, потому что эти уравнения имеют одновременно две неизвестные переменные, и уравнение приходится разделять на части. Предложен новый метод разделения, в несколько этапов, где сначала находится распределение скорости без учета давления, потом находится давление и скорость корректируется. Идея взята у Grétar Tryggvason, здесь же предложена ее реализация в двумерном и трехмерном пространстве.

2. Простой двумерный случай

Начнем с описания программы для расчета двумерных потоков жидкости.

Используемые уравнения движения

Уравнения движения жидкости, если на нее не действуют внешние силы, кроме гравитации, и вязкость одинакова, будут выглядеть так:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(\nabla u)u = -\nabla p + \rho g + \mu \Delta u \quad (2.1)$$

$$\nabla u = 0 \quad (2.2)$$

2.1. Интегрирование по времени

Для интегрирования уравнения Навье-Стокса разделим его на две части, рассчитаем сначала поток без учета давления

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -A^n + g + \frac{1}{\rho^n} D^n \quad (2.3)$$

А потом добавим давление

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\frac{\nabla_h p}{\rho^n} \quad (2.4)$$

Здесь индекс n обозначает данный шаг по времени, $n+1$ – следующий шаг. A – дискретное приближение конвективного слагаемого, D – диффузионного, индекс h обозначает дискретное приближение градиента.

Давление должно быть выбрано таким образом, чтобы оно удовлетворяло уравнение неразрывности в дискретном виде.

$$\nabla_h u^{n+1} = 0 \quad (2.5)$$

Подставив сюда уравнение для давления, получим уравнение Пуассона.

$$\nabla_h \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla_h p \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla_h u^* \quad (2.6)$$

Как только давление будет найдено, можно найти скорость на следующем шаге по времени, используя уравнение (2.4).

2.2. Пространственная дискретизация

Для дискретизации уравнений движения используем метод конечных объемов, то есть допустим, что уравнение удовлетворяется в малом контрольном объеме. Определим среднюю скорость в объеме как

$$u = \frac{1}{V} \int_V u(x) dv. \quad (2.7)$$

После этого запишем средние величины конвективного и диффузионного слагаемых, и из интеграла по объему перейдем к интегралу по поверхности:

$$A = \frac{1}{V} \int_V (\nabla u) u dv = \frac{1}{V} \oint_S u(u \cdot n) ds, \quad (2.8)$$

$$D = \frac{\mu}{V} \int_V \Delta u dv = \frac{1}{V} \oint_S \nabla u \cdot n ds. \quad (2.9)$$

Давление аппроксимируется как интеграл градиента давления по контрольному объему.

$$\nabla_h p = \frac{1}{V} \int_V \nabla p dv = \frac{1}{V} \oint_S n ds \quad (2.10)$$

Таким образом, неопределенной остается только форма контрольного объема. Для простоты будем использовать равномерную сетку, образованную перпендикулярными прямыми. Для обозначения позиции на сетке будем использовать индексы – i для оси x и j для оси y .

Для несжимаемых жидкостей, как показал опыт, удобнее всего использовать одну сетку для скоростей и другую для давления.

Выберем направление прямых, образующих сетку, таким образом, чтоб горизонтальные прямые совпадали с осью абсцисс, а вертикальные – с осью

ординат. Тогда размеры нашего контрольного объема будут $\Delta x, \Delta y$, а его объем – $V = \Delta x \Delta y$.

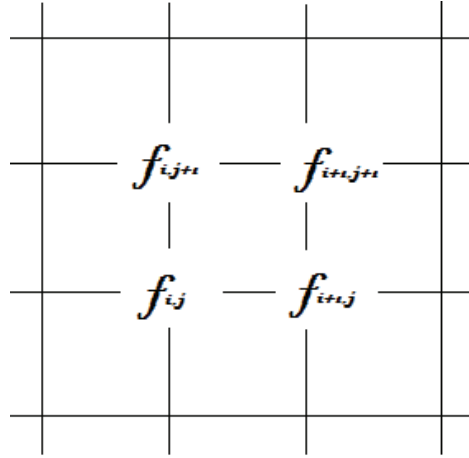


Рис.1. Распределение функции на сетке.

Аппроксимируем уравнение (2.5), интегрируя его по объему, обозначенному на рисунке ниже, с использованием дискретного выражения для дифференциала, и получаем

$$\Delta y \left(u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right) + \Delta x \left(v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - v_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Используя такую сетку напишем уравнение для скорости из (1.3)

$$u_{i+1/2,j}^* = u_{i+1/2,j}^n + \Delta t \left\{ (-A_x)_{i+\frac{1}{2},j}^n + (g_x)_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n)} (D_x)_{i+1/2,j}^n \right\}, \quad (2.12)$$

и

$$v_{i,j+1/2}^* = v_{i,j+1/2}^n + \Delta t \left\{ (-A_y)_{i,j+1/2}^n + (g_y)_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n)} (D_y)_{i,j+1/2}^n \right\}. \quad (2.13)$$

Уравнения для коррекции скоростей будут такими:

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n)} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}, \quad (2.14)$$

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n)} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y}. \quad (2.15)$$

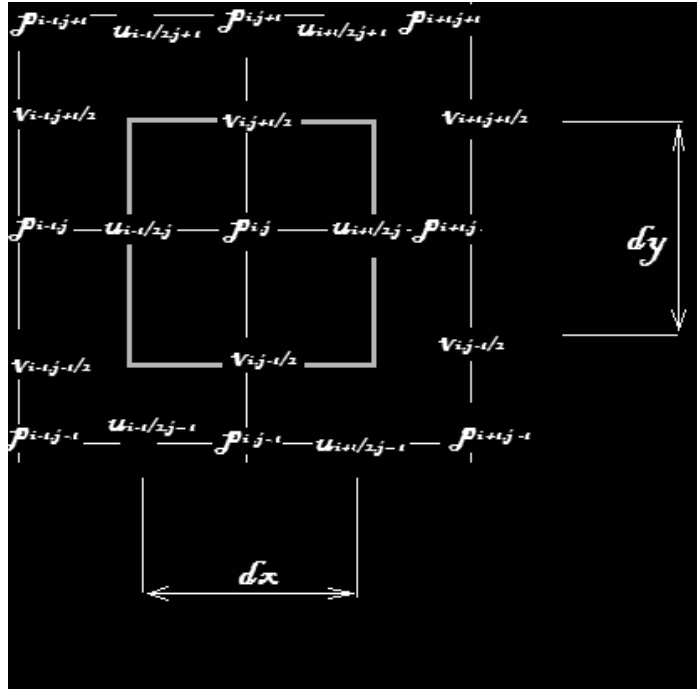


Рис.2. Расположение проекций скорости и давления.

2.3. Дискретизация конвекционного слагаемого

Аппроксимируем поток через границу контрольного объема значением в центре этой границы:

$$(A_x)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \{ [(uu)_{i+1,j} - (uu)_{i,j}] \Delta y + [(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}] \Delta x \}, \quad (2.16)$$

$$(A_y)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \{ [(vv)_{i,j+1} - (vv)_{i,j}] \Delta x + [(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}] \Delta y \}. \quad (2.17)$$

Для нахождения скоростей в тех местах, где они не определены, используем линейную интерполяцию и получаем:

$$(A_x)^n_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u^n_{i+\frac{3}{2},j} + u^n_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \right)^2 - \left(\frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j} + u^n_{i-\frac{1}{2},j}}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j+1} + u^n_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \left(\frac{v^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v^n_{i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) - \left(\frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j-1} + u^n_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \left(\frac{v^n_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{2} \right) \right] \quad (2.18)$$

$$(A_y)_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{v_{i,j+3/2}^n + v_{i,j+1/2}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j-1/2}^n}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+1/2,j+1}^n + u_{i+1/2,j}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j+1/2}^n + v_{i,j+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i-1/2,j+1}^n + u_{i-1/2,j}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i-1,j+1/2}^n + v_{i,j+1/2}^n}{2} \right) \right] \quad (2.19)$$

2.4. Дискретизация диффузионного слагаемого

Таким же образом находим выражение для диффузионного слагаемого.

$$(D_x)_{i+1/2,j}^n = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y} \left\{ \left(\left(\frac{du}{dx} \right)_{i+1,j} - \left(\frac{du}{dx} \right)_{i,j} \right) \Delta y + \left(\left(\frac{du}{dy} \right)_{i+1/2,j+1/2} - \left(\frac{du}{dy} \right)_{i+1/2,j-1/2} \right) \Delta x \right\}, \quad (2.20)$$

$$(D_y)_{i,j+1/2}^n = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y} \left\{ \left(\left(\frac{dv}{dy} \right)_{i,j+1} - \left(\frac{dv}{dy} \right)_{i,j} \right) \Delta x + \left(\left(\frac{dv}{dx} \right)_{i+1/2,j+1/2} - \left(\frac{dv}{dx} \right)_{i-1/2,j+1/2} \right) \Delta y \right\}, \quad (2.21)$$

Подставим выражение для производной

$$(D_x)_{i+1/2,j}^n = \mu \left\{ \left(\frac{u_{i+3/2,j}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{u_{i+1/2,j+1}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i+1/2,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right\}, \quad (2.22)$$

$$(D_y)_{i,j+1/2}^n = \mu \left\{ \left(\frac{v_{i+1,j+1/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i-1,j+1/2}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{v_{i,j+3/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y^2} \right) \right\}. \quad (2.23)$$

Стоит упомянуть, что это простая модель, которая работает только для некоторых случаев, в которых участвуют две жидкости с одинаковой вязкостью. В общем случае, нужно использовать полный тензор деформации.

2.5. Уравнение для давления

Уравнение получаем подстановкой уравнений для коррекции (2.14) и (2.15) в уравнение неразрывности (2.11). Вот результат:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n} - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i-1,j}^n} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n} - \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i,j-1}^n} \right) =$$

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^* - u_{i-\frac{1}{2},j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - v_{i,j-\frac{1}{2}}^*}{\Delta y} \right). \quad (2.24)$$

Решение уравнения для давления обычно самая сложная часть любой симуляции несжимаемых потоков, и обычно необходимо пользоваться более продвинутыми методами решения, однако здесь мы используем метод релаксаций.

$$p_{i,j}^{\alpha+1} = \beta \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i-1,j}^n} \right) + \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i,j-1}^n} \right) \right]^{-1} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{p_{i+1,j}^\alpha}{\rho_{i+1,j}^n + \rho_{i,j}^n} + \frac{p_{i+1,j}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i-1,j}^n} \right) + \frac{1}{y^2} \left(\frac{p_{i,j+1}^\alpha}{\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n} + \frac{p_{i,j-1}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j}^n + \rho_{i,j-1}^n} \right) - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^* - u_{i-\frac{1}{2},j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - v_{i,j-\frac{1}{2}}^*}{\Delta y} \right) + (1-\beta) p_{i,j}^\alpha. \quad (2.25)$$

2.6. Граничные условия

Перед тем, как использовать выведенные ранее дискретные уравнения, необходимо установить подходящие граничные условия. Использование структурированной сетки делает это особенно простым. Сначала, определим мнимые объемы вне рассчитываемой области. Опираясь значениями в этих объемах будем добиваться выполнения тех или иных граничных условий. Для нормальной компоненты скорости все очень просто – так как центр контрольного объема совпадает с границей, мы можем просто установить нужное значение. Для неподвижной стенки это ноль. Для тангенциальной компоненты немного сложнее – граница находится между двумя точками, в которых задается скорость. Но мы можем такое уравнение, воспользовавшись линейной интерполяцией:

$$u_{\text{стенки}} = 1/2(u_{i,1} + u_{i,2}), \quad (2.26)$$

где $u_{\text{стенки}}$ обозначает тангенциальную скорость на границе, а $u_{i,1}$ и $u_{i,2}$ – скорости на сетке. Чтоб условие выполнялось, нужно задать $u_{i,1}$. Выразим ее из предыдущего уравнения:

$$u_{i,1} = 2u_{\text{стенки}} - u_{i,2}. \quad (2.27)$$

Уравнение для граничного условия на давление:

$$\frac{\delta U}{\delta t} = \frac{\delta p}{\delta x}, \quad (2.28)$$

где U – нормальная скорость на границе. Для неподвижной стенки давление в мнимой ячейке просто совпадает с давлением на границе.

Порядок расчета

1. Найти временные скорости по формулам (2.12) и (2.13)
2. Найти давление по формуле (2.24) и граничные условия (2.27) и (2.28)
3. Скорректировать скорости (2.14), (2.15)

2.7. Результаты

Рассчитаем поток между двумя пластинами, расстояние между которыми 5 м. и градиент давления 0,777 Па/м.

Точное значение, м/с	Приближенное значение, м/с	Погрешность, %
0,923	0,972	5,3
2,479	2,527	1,9
3,645	3,694	1,3
4,423	4,471	1
4,812	4,86	0,99
4,812	4,86	0,99
4,423	4,471	1

3. Трехмерный случай

Для рассмотрения нам нужно будет просто ввести еще одну пространственную координату, а соответственно, и индекс для нее, ввести скорость по этой координате и немного изменить наши уравнения. Так, введем координату z , назовем k - индекс для этой координаты, и l - скорость по z .

3.1. Новые уравнения для конвекции

Для начала возьмем уравнения для двумерного случая (2.16), (2.17), и добавим в них три новые буквы. При этом появится еще одно уравнение A_z :

$$(A_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ [(uu)_{i+1,j,k} - (uu)_{i,j,k}] \Delta y \Delta z + \right. \\ \left. [(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}] \Delta x \Delta z + [(ul)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - (ul)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}] \Delta x \Delta y \right\}, \quad (3.1)$$

$$(A_y)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ [(vw)_{i,j+\frac{1}{2},k} - vw_{i,j,k}] \Delta x \Delta z + \right. \\ \left. [(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}] \Delta y \Delta z + [(vl)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (vl)_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}] \Delta y \Delta x \right\}, \quad (3.2)$$

$$(A_z)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ [(ll)_{i,j,k+1} - ll_{i,j,k}] \Delta y \Delta x + \right. \\ \left. [(ul)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - (ul)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}] \Delta y \Delta z + [(vl)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (vl)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}] \Delta z \Delta x \right\}. \quad (3.3)$$

Здесь, мы видим, что безобидные Δx и Δy превращаются в страшные $\Delta x \Delta z$, $\Delta x \Delta y$ и т.д. Это происходит из-за того, что в уравнении (2.8) в конце

стоит dS , что в двумерном случае обозначает произведение двух граней. Все равно, потом они будут упрощены.

В двумерном случае мы, для того, чтоб найти скорости в тех местах, где они не определены, использовалась линейная интерполяция. А в трехмерном – используем ее еще раз:

$$\begin{aligned}
 (A_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right)^2 \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j-\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{2} \right) \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta z} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i+1,j,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i+1,j,k-1/2}^n + l_{i,j,k-1/2}^n}{2} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 (A_y)_{i,j+1/2,k}^n &= \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{2} \right)^2 \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1,k}^n + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{2} \right) \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta z} \left[\left(\frac{v_{i,j+1/2,k+1}^n + v_{i,j+1/2,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i,j+1,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{v_{i,j+1/2,k-1}^n + v_{i,j+1/2,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i,j+1,k-1/2}^n + l_{i,j,k-1/2}^n}{2} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 (A_z)_{i,j,k+1/2}^n &= \frac{1}{\Delta z} \left[\left(\frac{l_{i,j,k+\frac{3}{2}}^n + l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n}{2} \right)^2 - \left(\frac{l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + l_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n}{2} \right)^2 \right] + \\
 &\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i+1,j,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j,k+1}^n + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i-1,j,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{v_{i,j+1/2,k+1}^n + v_{i,j+1/2,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i,j+1,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) - \left(\frac{v_{i,j-1/2,k+1}^n + v_{i,j-1/2,k}^n}{2} \right) \left(\frac{l_{i,j-1,k+1/2}^n + l_{i,j,k+1/2}^n}{2} \right) \right] \quad (3.6)$$

3.2 Новые уравнения для диффузии

Продельваем аналогичные действия: Возьмем уравнение для двумерного случая (2.20). Сделаем его трехмерным:

$$(D_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)_{i+1,j,k} - \left(\frac{du}{dx} \right)_{i,j,k} \right\} \Delta y \Delta z + \left(\frac{du}{dy} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \left(\frac{du}{dy} \right)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \Delta x \Delta z + \left(\frac{du}{dz} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{du}{dz} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \Delta x \Delta y \}. \quad (3.7)$$

И запишем еще два таких же уравнения:

$$(D_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \left(\frac{dv}{dy} \right)_{i,j+1,k} - \left(\frac{dv}{dy} \right)_{i,j,k} \right\} \Delta x \Delta z + \left(\frac{dv}{dx} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \left(\frac{dv}{dx} \right)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \Delta y \Delta z + \left(\frac{dv}{dz} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{dv}{dz} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \Delta x \Delta y \}. \quad (3.8)$$

$$(D_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n = \frac{\mu}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \left(\frac{dl}{dz} \right)_{i,j,k+1} - \left(\frac{dl}{dz} \right)_{i,j,k} \right\} \Delta y \Delta z + \left(\frac{dl}{dy} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{dl}{dy} \right)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta x \Delta z + \left(\frac{dl}{dx} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{dl}{dx} \right)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \Delta z \Delta y \}. \quad (3.9)$$

После использования выражения для производной получаем:

$$(D_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = \mu \left\{ \frac{u_{i+\frac{3}{2},j,k}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right\} \quad (3.10)$$

$$(D_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n = \mu \left\{ \left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i-1,j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{v_{i,j+\frac{3}{2},k}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k+1}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \right\} \quad (3.11)$$

$$(D_z)_{i,j,k+1/2}^n = \mu \left\{ \left(\frac{l_{i+1,j,k+1/2}^n - 2l_{i,j,k+1/2}^n + l_{i-1,j,k+1/2}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{l_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}^n - 2l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + l_{i,j-1,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{l_{i,j,k+\frac{3}{2}}^n - 2l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + l_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z^2} \right) \right\} \quad (3.12)$$

3.3 Поле давления

В трехмерном случае уравнение для давления будет иметь вид

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} - \frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i-1,j,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k}}{\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} - \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j-1,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta z^2} \left(\frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k}}{\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n} - \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j,k-1}^n} \right) = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k}^* - v_{i,j-\frac{1}{2},k}^*}{\Delta y} + \frac{l_{i,j+\frac{1}{2},k}^* - l_{i,j-\frac{1}{2},k}^*}{\Delta z} \right). \quad (3.13)$$

И, соответственно, способ решения:

$$p_{i,j,k}^{\alpha+1} = \beta \left[\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i-1,j,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{1}{\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j-1,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta z^2} \left(\frac{1}{\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{1}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j,k-1}^n} \right) \right]^{-1} + \left[\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{p_{i+1,j,k}^\alpha}{\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{p_{i-1,j,k}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i-1,j,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{p_{i,j+1,k}^\alpha}{\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{p_{i,j-1,k}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j-1,k}^n} \right) + \frac{1}{\Delta z^2} \left(\frac{p_{i,j,k+1}^\alpha}{\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n} + \frac{p_{i,j,k-1}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j,k}^n + \rho_{i,j,k-1}^n} \right) - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k}^* - v_{i,j-\frac{1}{2},k}^*}{\Delta y} + \frac{l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^* - l_{i,j,k-\frac{1}{2}}^*}{\Delta z} \right) \right] + (1-\beta) p_{i,j,k}^\alpha. \quad (3.14)$$

3.4 Уравнения для скорости

Вот что получается, если записать уравнения (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.30) в трехмерном виде:

$$u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* = u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + \Delta t \left\{ (-A_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + (g_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n)} (D_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n \right\}, \quad (3.15)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2},k}^* = v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + \Delta t \left\{ (-A_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + (g_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n)} (D_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n \right\}, \quad (3.16)$$

$$l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^* = l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \Delta t \left\{ (-A_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + (g_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{1/2(\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n)} (D_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \right\}. \quad (3.17)$$

Уравнения для коррекции скоростей будут такими:

$$u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j,k}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i+1,j,k}^n + \rho_{i,j,k}^n)} \frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{\Delta x}, \quad (3.18)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2},k}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i,j+1,k}^n + \rho_{i,j,k}^n)} \frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k}}{\Delta y}, \quad (3.19)$$

$$l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = l_{i,j,k+\frac{1}{2}}^* - \frac{\Delta t}{1/2(\rho_{i,j,k+1}^n + \rho_{i,j,k}^n)} \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k}}{\Delta z}. \quad (3.19)$$

Граничные условия остаются такие же, как и в двумерной задаче, только на разных стенках могут меняться используемые координаты.

3.5 Результаты

Аналогично предыдущей задаче, попробуем рассчитать поток жидкости в квадратной трубе. Труба в форме квадрата 5x5, разбиение по 0,125. На графиках показана зависимость скорости от координаты в трех сечениях – как показано на рисунке.

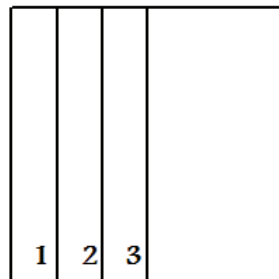


Рис.3. Сечения, в которых показаны графики

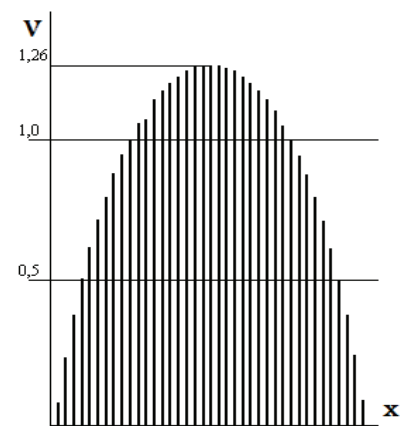


Рис.4 Скорости в сечении 1

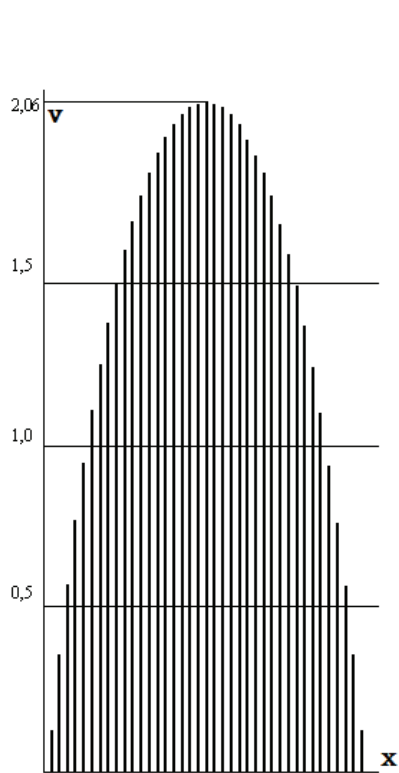


Рис.5 Скорості в сеченні 2

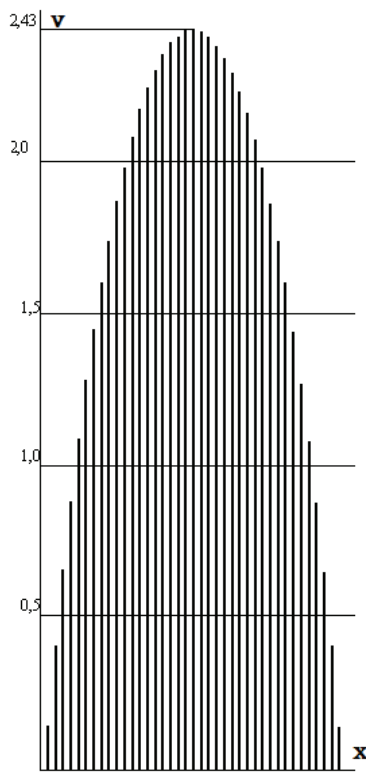


Рис.6 Скорості в сеченні 3

На рисунках видно, що швидкість максимальна в центрі труби, і зменшується ближче до границь, таким образом, мінімальна в кутках труби, що відповідає експерименту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grétar Tryggvason. A Front-tracking/Finite-Volume Navier-Stokes Solver for Direct Numerical Simulations of Multiphase Flows// October 19, 2012, P. 11-30p.