УДК 539.3

Формы собственных колебаний жидкости в жестких цилиндрических резервуарах в условиях низкой гравитации

П. А. Глушич, О.В. Науменко, Е.А. Стрельникова
Институт проблем машиностроения имени А.Н.Подгорного, Украина

В статье получено аналитическое решение задачи об определении форм собственных колебаний жидкости в жестких цилиндрических резервуарах в условиях низкой гравитации. Построены первые формы собственных колебаний в рамках допущения о значительно большей величине радиуса кривизны поверхности жидкости, смачивающей боковую поверхность, по сравнению с радиусом резервуара.

Ключевые слова: *низкая гравитация, колебания жидкости, собственные колебания жидкости.*

В статі отримано аналітичний розв'язок задачі визначення форм власних коливань рідини у жорстких циліндричних резервуарах за умови низької гравітації. Побудовано перші форми власних коливань у межах зробленого припущення щодо значної переваги радіуса кривизни поверхні рідини, що змочує бокову поверхню, у порівнянні з радіусом резервуара

Ключові слова: *низька гравітація, коливання рідини, власні коливання рідини.*

The main purpose of the paper is to find an analytical solution to determine modes of liquid natural oscillations in rigid cylindrical tank at low gravity. The first forms of oscillations were obtained. The assumption was made that the tank radius is larger than the radius of liquid surface curvature near the wetting side of tank surface.

Keywords: *low gravity, liquid sloshing, natural frequenciesof liquid.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В связи с наличием проблемы, связанной с недопустимыми колебаниями при запуске ракет-носителей, ведущих к авариям, решение задачи о колебаниях топливных баков ракет в условиях низкой гравитации является очень актуальным.

Современный этап исследований колебаний жидкости в условиях низкой гравитации находится в том состоянии, когда для проверки и подтверждения приближенных методов расчета колебаний и собственных форм необходимы дорогостоящие установки, такие как башни с падающими резервуарами, оснащенными регистрирующей фото и видео аппаратурой. Поэтому имеется основание для развития аналитических методов решения данной задачи. Аналитическое решение этой задачи сопряжено с рядом проблем, таких как учет формы мениска жидкости в резервуарах сложной геометрии, сложность проведения эксперимента для проверки теоретических расчетов и др. В целях упрощения расчетов делаются некоторые допущения, упрощающие решение поставленной задачи.

В работе построено точное решение краевой задачи о собственных колебаниях жидкости в условиях низкой гравитации при наличии сил поверхностного натяжения. С целью упрощения расчетов сделаны несколько допущений, и в рамках принятых допущений решена задача о собственных колебаниях жидкости; представлены полученные результаты.

Решение данной задачи является одной из составных частей сложной и актуальной задачи, связанной с расчетом колебаний топливных баков ракет-носителей, предназначенных для вывода на орбиту различных спутников. Исследуемую краевую задачу можно рассматривать как предварительный этап решения модельной задачи для анализа динамики разгонного блока ракеты носителя.

Рассматривается цилиндрический сосуд радиуса r_0, показанный на рис. 1.

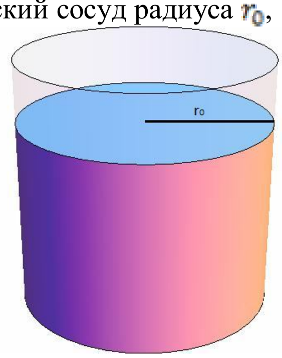
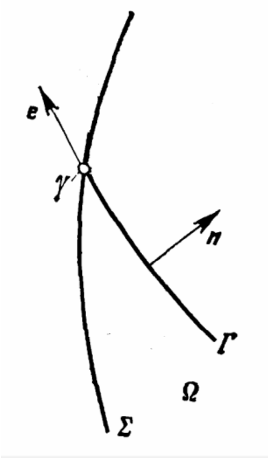


Рис.1. Схема топливного бака.

Уравнения и граничные условия, описывающие данную краевую задачу могут быть записаны в виде следующей системы уравнений [1]:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0\left(в\ \Omega\right) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0\left(на\ \Sigma\right) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial t} - aN + \Delta N = F + \psi\left(t\right) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = -\dfrac{\partial N}{\partial t}\left(на\ \Gamma\right) \\ \int_{\Gamma} N d\Gamma = 0\left(на\ \Gamma\right) \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} + \chi N = 0\left(на\ \gamma\right) \end{cases}$$



где n – единичный вектор нормали к свободной поверхности Γ в направлении из Ω, $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор нормали к γ, Φ - потенциал скорости жидкости, N - форма свободной поверхности

2. Построение аналитического решения

Для построения аналитического выражения решения краевой задачи об определении собственных колебаний жидкости сделаем следующие допущения:

1) Жидкость идеальная, несжимаемая, и ее движение потенциальное;
2) Резервуар выполнен в виде жесткого цилиндра с непроницаемыми для жидкости стенками, его размеры позволяют пренебречь эффектом смачивания стенок.

Для решения системы уравнений представим функции $\Phi(x,t)$, $N(\xi_1,\xi_2,t)$, $F(\xi_1,\xi_2,t)$, $\psi(t)$ в виде разложения в ряд Фурье по частотам ω:

$$\Phi(x,t)=\Phi(x)e^{iwt}$$

$$N(\xi_1,\xi_2,t)=N(\xi_1,\xi_2)e^{iwt}$$

$$F(\xi_1,\xi_2,t)=\frac{1}{iw}F(\xi_1,\xi_2)e^{iwt}$$

$$\psi(t)=\frac{c}{iw}e^{iwt}.$$

Используя представления функций $\Phi(x,t)$, $N(\xi_1,\xi_2,t)$, $F(\xi_1,\xi_2,t)$, $\psi(t)$ в системе (1) и исключая N,переходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \Delta\Phi=0\ (в\ \Omega) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n}=0\ (на\ \Sigma) \\ a\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}+\Delta\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}-c=\lambda\Phi+F \\ \int_\Gamma\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}d\Gamma=0\ (на\ \Gamma) \\ \dfrac{\partial}{\partial e}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right)+\chi\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}=0\ (на\ \gamma) \end{cases}$$

Вводим

$$\lambda=w^2=w^2_{разм}t^2_*=\rho l^3\sigma^{-1}w^2_{разм}.$$

При этом постоянная c заранее не задается, она разыскивается вместе с решением.

Для отыскания формы свободной поверхности жидкости воспользуемся граничным условием

$$N=\frac{i}{w}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_\Gamma.$$

Пусть сосуд ограничен цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими, а снизу – плоским горизонтальным дном; на жидкость действует поле тяжести с потенциалом $\Pi_0 = Bo\, z$, где Bo – число Бонда. Тогда равновесной поверхностью будет служить горизонтальная плоскость; примем ее за плоскость $z = 0$, поэтому дно будет иметь уравнение $z = -h\,(h > 0)$.

Учитывая выше перечисленные допущения, рассматриваемую краевую задачу можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \left((x,y)\, в\, \Gamma, -z \le h \le 0\right) \\ \left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial e}\right|_{((x,y)\, на\, \gamma, -z\le h\le 0)} = 0 \\ \left.\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\left(Bo\,\Phi - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) - \lambda\Phi\right)\right|_{z=0} = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Пользуясь методом разделения переменных, найдем зависимость от z функции $\Phi(x,y,z)$, а именно $\Phi(x,y,z) = W(x,y)\, ch\left(k(z+h)\right)$.где $W(x,y)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} + k^2 W(x,y) = 0 \quad (в\, \Gamma) \\ \dfrac{\partial W(x,y)}{\partial e} = 0 \quad (на\, \gamma) \\ \int_\Gamma W(x,y)\, d\Gamma = 0 \end{cases}.$$

Выражение для квадрата частоты λ получаем из граничного условия

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(Bo\,\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) - \lambda\Phi\right)\right|_{z=0} = 0,$$

где

$$\Phi(x,y,z)=W(x,y)ch\big(k(z+h)\big)$$
$$\lambda=k\left(Bo+k^2\right)th(kh).$$

Так как функция $W(x,y)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2}+k^2\Phi(x,y)=0\\ \dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial e}=0 \quad (на\,\gamma)\end{cases}, \tag{3}$$

то решение системы (3) имеет следующий вид:

$$\Phi(r,\varphi)=J_n\left(k\frac{r}{r_0}\right)\cos(n\varphi),$$

где $J_n\left(k\dfrac{r}{r_0}\right)$ - модифицированные функции Бесселя.

3. Полученные результаты

Будем считать, что емкость, в которой находится рассматриваемая жидкость, имеет значительно большие размеры по сравнению с характерными размерами смачивания стенок резервуара жидкостью. Поэтому свободную поверхность будем считать плоской. В этом случае граничное условие

$$\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial e}\right|_{\Gamma}=0$$

можно переписать в следующем виде:

$$\left.\frac{\partial W(r,\varphi)}{\partial e}\right|_{\Gamma}=0.$$

Откуда следует что

$$J_1(kr)=0. \tag{4}$$

Полученное уравнение (4) решено численно. В таблице 1 приведены первые 5 значений k дляn=1,2,3…

Таблица 1 Значения kдля n=0

$n\backslash i$	0	1	2	3	4
0	3.83171	7.01559	10.1735	13.3237	16.4706
1	1.84118	5.33144	8.5363	11.706	14.863
2	3.05424	6.70613	9.96947	13.1704	16.3475

Окончательный аналитический вид потенциала скорости жидкости имеет вид:

$$\Phi(r,\varphi,z) = J_n\left(k\frac{r}{r_0}\right)\cos(n\varphi)\,ch\big(k(z+h)\big).$$

Для нахождения формы собственных колебаний поверхности жидкости имеем:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial N}{\partial t}\right|_{z=0}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = kJ_n\left(k\frac{r}{r_0}\right)\cos(n\varphi)\,sh\big(k(z+h)\big)$$

$$\left.\frac{\partial N}{\partial t}\right|_{z=0} = kJ_n\left(k\frac{r}{r_0}\right)\cos(n\varphi)\,sh(kh)$$

С учетом начального и дополнительного условий

$$N(r,\varphi,z,0) = 0$$

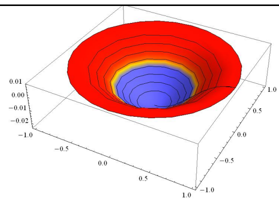
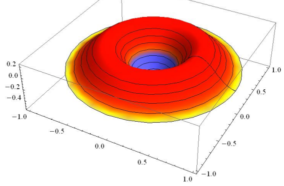
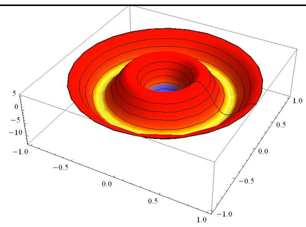
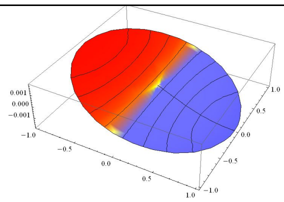
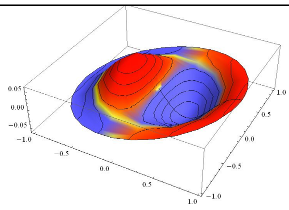
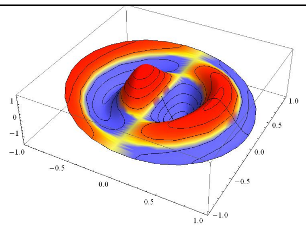
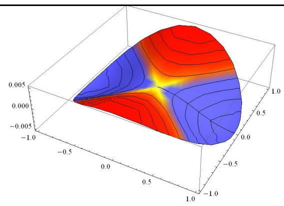
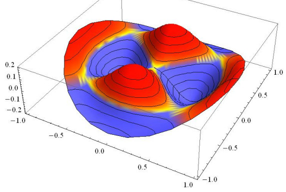
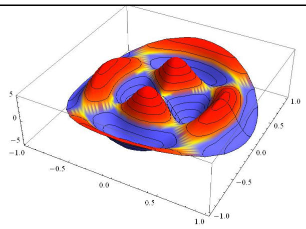
$$\int_0^t \frac{\partial N}{\partial t}dt = N(t) - N(0) = N(t)$$

Окончательно получаем

$$N = kJ_n\left(k\frac{r}{r_0}\right)\cos(n\varphi)\,sh(kh)$$

В таблице 2 приведены формы колебаний жидкости при Bo=136250.

Таблица 2. Формы собственных колебаний жидкости

n\i	1	2	3
0			
1			
2			

4. Выводы и перспективы дальнейших исследований.

Решена задача определения собственных форм колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре под действием низкой гравитации. Посчитанные собственные формы можно использовать в качестве базисной системы для расчета колебаний жидкости в условиях низкой гравитацииТакжеданные полученные в работе, могут быть использованы при расчете резервуаров с мембранными демпферами в условиях низкой гравитации, а также проектировании топливных баков ракет, использующих жидкое топливо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А.Д. Гидромеханика невесомости – М.: Наука, 1976. – 504 с.
2. Градштейн И. С. Рыжик И.М Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений - М.: Наука, 1963. – 1100 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики – М.: Наука, 1977– 736 с.

Надійшла – 25.04.2014.