УДК 519.6

Метод решения возмущённых краевых задач, способных моделировать деформированные состояния замкнутых торсовых оболочек

В. И. Олевский

Украинский государственный химико-технологический университет, Украина

Излагается разработанный автором вычислительный метод решения задач теории замкнутых гибких торсовых оболочек, имеющих малые возмущения края в плоскости, перпендикулярной оси оболочки. Метод носит комплексный характер и, в частности, отличается формой введения параметра для получения решения в виде двойного асимптотического ряда, который удаётся просуммировать с заданной точностью двумерными дробно-рациональными приближениями. Это позволяет обосновать сходимость к точному решению в данной модели, а численные эксперименты показывают, что метод эффективен при существенно больших амплитудах возмущения, чем у других авторов.

Ключевые слова: *модель, оболочка, возмущения, асимптотический ряд, двумерное суммирование, дробно-рациональные приближения.*

Викладається розроблений автором обчислювальний метод розв'язання крайових задач теорії замкнутих гнучких торсових оболонок, що мають малі збурення краю в площині, перпендикулярній осі оболонки. Метод має комплексний характер та, зокрема, відрізняється формою введення параметра для отримання рішення у вигляді подвійного асимптотичного ряду, який вдається підсумувати із заданою точністю двовимірними дробово-раціональними наближеннями. Це дозволяє обґрунтувати збіжність до точного рішення моделі, що задана, а чисельні експерименти показують, що метод ефективний при істотно більших амплітудах збурення, ніж у інших авторів.

Ключові слова: *модель, оболонка, збурення, асимптотичний ряд, двовимірне підсумовування, дробово-раціональні наближення.*

The author describes his own computational method of solving boundary value problems in the theory of closed flexible torso shells with small perturbations of edges in the plane, which is perpendicular to the shell axis. The method is of complex character. The feature of the method is, particularly, a technique of enabling of parameter, which allows to obtain solution in the form of a double asymptotic series that might be summed with given accuracy using two-dimensional fractional rational approximations. This allows to prove convergence to the exact solution in the present model; and numerical experiments show that the method is effective for significantly larger perturbation amplitudes than that of other authors.

Key words: *model, shell, perturbations, asymptotic series, two-dimensional summation, fractional rational approximation.*

1 Введение

Необходимость учета малых отклонений различного рода в начальных и граничных условиях, а также в разрешающих уравнениях возникла с самого начала использования математических моделей в механике. Особую актуальность задачи моделирования технических устройств с отклонениями приобрели с использованием высокоточного оборудования, машин, облегченных машиностроительных деталей и строительных конструкций [1]. Оказалось, что в целом ряде задач отклонения основных (первичных) параметров или изменение уровня заданных нестрого (вторичных) параметров оказывают существенное влияние на показатели прочности и механической устойчивости оборудования, и даже могут привести к его разрушению и значительным материальным потерям [2, 3].

Несмотря на активную разработку в течение последних десятилетий вычисленных методов для задач механики оболочек [4, 5], прогресс в методах расчета возмущенных состояний торсовых оболочек (цилиндрических, конических) тормозился. Не в последнюю очередь это связано с отсутствием устоявшейся классификации и математического описания отклонений. Главное, однако, состоит в том, что учет малых отклонений путем использования популярных методов дискретизации расчетной области приводит к существенному увеличению объема вычислений и, что особенно важно, к появлению в разрешающих системах членов существенно различной величины. В частности, для сеточных методов размер ячейки должен быть меньше исследуемого возмущения. Для метода конечных элементов дробное разбиение часто приводит к изменению характера конечных элементов и необходимости использования более сложных их форм: например, оболочечные элементы необходимо заменять объемными и согласовывать их деформирование. Это приводит к сильной обусловленности разрешающих систем уравнений, потере точности расчета и, как следствие, к некорректным результатам моделирования. Сложная форма отклонений часто делает непригодным стандартные методы генерирования дискретных подобластей, что еще более усложняет задачу. Использование сглаживающих функций требует на порядок более высокой точности приближения, позволяющей учитывать величину малых отклонений. Получаемые при этом результаты носят вид массивов чисел, что требует дополнительно проведения их интерпретации, визуализации и сглаживания. Расчет для каждого конкретного объекта в этих случаях необходимо производить индивидуально, начиная с разбиения области и аппроксимации нагрузок. Это значительно усложняет процесс расчета и сужает набор пригодных для использования программных средств.

В принципе, хорошо известен и другой путь моделирования состояний систем с отклонениями – использование метода возмущения по параметру, который существует в различных формах [6–8]. Этот подход нацелен на получение приемлемых приближений для малых отклонений и, соответственно, малых значений параметра возмущения. При этом можно выяснять качественную природу решений и закономерности поведения моделируемой системы. Однако, по крайней мере, для интересующего нас класса задач, получение достаточной для практического использования точности вычислений при реальных по величине отклонениях часто влечёт недопустимо большой объём вычислительной работы. Это характерно для т. н. сингулярных задач, содержащих малый параметр при старшей производной и для нелинейных задач. Именно такие задачи наиболее характерны для гибких торсовых оболочек имеющих отклонения формы [9]. Решение задачи в этом случае становится, громоздким из-за большого количества требуемых аналитических преобразований сложных функций.

Важным этапом на пути решения этой проблемы оказалось привлечение к стандартной схеме использования возмущения по параметру методов обобщенного суммирования [10]. Благодаря этому появилась возможность получения достаточно точного решения для сравнительно больших значений параметра при малом числе приближений. Однако характер и закономерности приближений данного подхода оставались в сколько-нибудь общем случае не изученными. Исследователи лишь констатировали или достижение нужной точности, или расходимость приближений в ходе решения частных задач (довольно полный обзор публикаций данного направления см. в [11]).

При решении частных краевых задач механики упругих гибких торсовых оболочек [12,13,1], автору, используя подход асимптотического характера, удалось фактически создать новый комплексный вычислительный метод, позволяющий производить адекватные реальности приближенные расчёты для значений параметра возмущения области, существенно превосходящих интервал адекватности известных ранее методов. Природа этого эффекта, как сейчас стало окончательно понятно, связана с тем, что успешный путь использования асимптотического подхода замаскирован напрашивающимися аналогиями со схемами, применяемыми для одномерных рядов. Однако возникающие двумерные ряды не являются, как правило, безусловно сходящимися. Поэтому их усечение, использующее произвольный (удобный для записи, но необоснованный) порядок суммирования, не позволяет по объективной причине получать ни оценок сходимости, ни адекватных экспериментальным данным численных результатов при амплитудах возмущений, которые интересуют создателей технических систем. Напротив, в работах [12,13,1] структуре асимптотического ряда и удержанию подходящего числа его членов уделено первостепенное внимание с тем, чтобы удержанные члены позволяли провести обобщенное суммирование ряда дробно-рациональными приближениями. В настоящей работе используется соответствующая специальная техника построения двумерных аппроксимант Паде́–типа, которая находится в согласии в с одним фундаментальным результатом В.В. Вавилова [14] и может рассматриваться как развитие вычислительной схемы, применявшейся ранее для одномерных рядов в другой области исследований [6].

2 Цель работы и объяснение метода на примере решения модельной задачи

Рассматривается задача построения приближенных решений возмущённых периодических краевых задач для систем уравнений в частных производных определённого класса, включающего известные задачи теории упругих гибких торсовых оболочек. Целью работы является разработка и обоснование схемы комплексного вычислительного метода для расчета таких решений, который обеспечивает их сходимость и получение приемлемого для приложений результата при наиболее широких условиях, допустимых в рамках асимптотического подхода к использованию рядов с параметрами возмущения.

Для того, чтобы особенности разработанного метода не потерялись в громоздких формулах и прочих технических подробностях, мы продемонстрируем этот метод на специально подобранном для этой цели модельном примере, который принадлежит к рассматриваемому далее классу, охватывающему в качестве частных случаев, модели замкнутых торсовых оболочек и краевые задачи теории погранслоя в гидродинамике. Важной особенностью примера является наличие точного решения в аналитической форме, что позволяет иллюстрировать свойства приближенных решений относительно точного решения. Упрощает детали также и невысокий второй порядок уравнения (тогда как в механике оболочек порядки уравнений упругого состояния всегда выше).

Итак, рассмотрим граничную задачу вида

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 < \varepsilon < 1,\ u(x,0) = u(x,\pi) = 0,\ u(0,y) = \sin y,\ u(a,y) = e^{-a/\varepsilon} \sin y,$$

которая имеет точное решение $u(a,y) = e^{-x/\varepsilon} \sin y$. Разложение точного решения в ряд по степеням x

$$u(a,y) = \sin y\left(1 - x/\varepsilon + (x/\varepsilon)^2 - (x/\varepsilon)^3 + \ldots + (-1)^{n-1}(x/\varepsilon)^n + \ldots\right)$$

сходится неравномерно из-за присутствия малого параметра ε в знаменателе общего члена ряда, поэтому для приближенного решения такой задачи при помощи возмущения по параметру требуется использование специальных методов [16, 17].

Найдем приближенное решение этой задачи для возмущенной границы $a = a_0 + \delta a$ по предлагаемому методу [12] следующим образом. Сначала произведем возмущение формы границы по искусственному параметру $\tilde{\varepsilon}$. Будем искать решение в виде ряда $U = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \tilde{\varepsilon}^m$. Приравнивая нулю коэффициенты при каждой степени параметра, получим последовательность т. н. предельных задач. Это последовательность рекуррентных граничных задач на прямоугольнике с границей a_0 для определения U_m вида

$$\tilde{\varepsilon}^0: \qquad \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0,$$

$$U_0(x,0) = U_0(x,\pi) = 0,\ U_0(0,y) = \sin y,\ U_0(a_0,y) = e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon} \sin y,$$

$$\tilde{\varepsilon}^1: \qquad \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$U_1(x,0) = U_1(x,\pi) = 0,\ U_1(0,y) = 0,\ U_1(a_0,y) = -\frac{\partial U_0}{\partial x}\delta a,$$

$$\tilde{\varepsilon}^2: \qquad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2},$$

$$U_2(x,0) = U_2(x,\pi) = 0,\ U_1(0,y) = 0,\ U_2(a_0,y) = -\frac{\partial U_1}{\partial x}\delta a - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}(\delta a)^2,$$

$$\cdots.$$

Для регуляризации разрешим уравнение относительно старшей производной, что эквивалентно приведению к нормальному виду, и введем искусственный параметр ε_1 в так, что при $\varepsilon_1 = 0$ получим упрощенные задачи на прямоугольнике, а для $\varepsilon_1 = 1$ – исходные:

$$\tilde{\varepsilon}^0 : \qquad \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2},$$

$$U_0(x,0) = U_0(x,\pi) = 0,\ U_0(0,y) = \sin y,\ U_0(a_0,y) = e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon}\sin y,$$

$$\tilde{\varepsilon}^1 : \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2},$$

$$U_1(x,0) = U_1(x,\pi) = 0,\ U_1(0,y) = 0,\ U_1(a_0,y) = -\frac{\partial U_0}{\partial x}\delta a,$$

$$\tilde{\varepsilon}^2 : \qquad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2},$$

$$U_2(x,0) = U_2(x,\pi) = 0,\ U_1(0,y) = 0,\ U_2(a_0,y) = -\frac{\partial U_1}{\partial x}\delta a - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}(\delta a)^2,$$

$$\cdots.$$

Решение будем искать в виде асимптотических рядов $\tilde{U}_m = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_1^i u_{mi}(x)$, $U_m = \tilde{U}_m \sin y$. Для каждого $\tilde{U}_m$ получим последовательность предельных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$\tilde{\varepsilon}^0 : \qquad \varepsilon_1^0 : u''_{00} = 0,\ u_{00}(0) = 1,\ u_{00}(a_0) = e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon},$$

$$\varepsilon_i^1 : u''_{0i} = u_{0(i-1)}\big/\varepsilon^2,\ u_{0(i-1)}(0) = u_{0(i-1)}(a_0) = 0,\ i = \overline{2,\infty},$$

$$\tilde{\varepsilon}^1 : \qquad \varepsilon_1^0 : u''_{10} = 0,\ u_{10}(0) = 0,\ u_{10}(a_0) = -\tilde{U}'_0(a_0)\delta a,$$

$$\varepsilon_i^1 : u''_{1i} = u_{1(i-1)}\big/\varepsilon^2,\ u_{1(i-1)}(0) = u_{1(i-1)}(a_0) = 0,\ i = \overline{2,\infty},$$

$$\cdots$$

$$\tilde{\varepsilon}^m : \qquad \varepsilon_1^0 : u''_{20} = 0,\ u_{m0}(0) = 0,\ u_{m0}(a_0) = \varphi_m,$$

$$\varepsilon_i^1 : u''_{mi} = u_{m(i-1)}\big/\varepsilon^2,\ u_{m(i-1)}(0) = u_{m(i-1)}(a_0) = 0,\ i = \overline{2,\infty},$$

$$\cdots,$$

где φ_m – значение на границе, определяемое предыдущими приближениями.

Последовательное решение этих задач позволяет получить u_{mi} в виде полиномов по степеням переменной x, порядок которых возрастает с увеличением порядка приближения:

$$\tilde{\varepsilon}^0 : \qquad u_{00} = \left(e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon} - 1\right)x/a_0 + 1,$$

$$u_{01} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\left(e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon} - 1\right)x^3/(6a_0) + x^2/2 - x\left(\left(e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon} - 1\right)a_0^2/6 + a_0/2\right)\right],$$

$$u_{02} = \frac{1}{\varepsilon^4}\left[\left(e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon} - 1\right)x^5/(120a_0) + x^4/24 - x^3\left(\left(e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon} - 1\right)a_0^2/36 + a_0/12\right) - \right.$$

$$\left. - x\left(\left(e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon} - 1\right)a_0^3/120 + a_0^3/24 - a_0^2\left(\left(e^{-(a_0+\delta a)/\varepsilon} - 1\right)a_0^2/36 + a_0/12\right)\right)\right],$$

$$\ldots ,$$

$$\tilde{\varepsilon}^m: \quad u_{m0} = x\varphi_m / a_0 ,\ u_{m1} = x^3 \varphi_m \Big/ \left(6\varepsilon^2 a_0\right) - x\varphi_m a_0 \Big/ \left(6\varepsilon^2\right),$$

$$u_{m2} = x^5 \varphi_m \Big/ \left(120\varepsilon^4 a_0\right) - x^3 \varphi_m a_0 \Big/ \left(36\varepsilon^4\right) - x\left(x^3 \varphi_m \Big/ \left(120\varepsilon^4\right) - x^2 \varphi_m a_0 \Big/ \left(36\varepsilon^4\right)\right),$$

$$\ldots .$$

Анализ вида коэффициентов $\tilde{U}_m$ показывает, что радиус их сходимости зависит от величины малого параметра и сходимость будет неравномерной из-за присутствия малого параметра ε в знаменателе. Для ускорения сходимости и регуляризации ряда используем обобщенное суммирование дробно-рациональными приближениями [12, 13].

Полученные ряды являются двойными – по степеням искусственного параметра и переменной интегрирования:

$$\tilde{U}_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{mij} \varepsilon_1^i x^j .$$

Дробно-рациональное преобразование рядов можно провести различными путями. Первый путь – суммирование только по степеням параметра ε_1, как предусмотрено в существовавших ранее схемах. При этом ряд приближается дробно-рациональной функцией вида

$$PA_{\varepsilon[n_1,n_2]}\left(\tilde{U}_m\right) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i(x)\varepsilon_1^i \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n_2} b_i(x)\varepsilon_1^i\right).$$

Результат суммирования в этом случае не имеет теоретического обоснования сходимости к истинному решению.

Другим способом, который может быть обоснован, является приближение только по степеням переменной интегрирования x:

$$PA_{x[m_1,m_2]}\left(\tilde{U}_m\right) = \sum_{i=0}^{m_1} a_i(\varepsilon_1) x^i \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{m_2} b_i(\varepsilon_1) x^i\right).$$

Этот подход не всегда обеспечивает сходимость решения для $\varepsilon_1 = 1$.

Наиболее приемлемым является двумерное суммирование по ε_1 и x с использованием результатов [14], которые описывают условия сходимости к точному решению приближения вида

$$PA_{[n_1,n_2][m_1,m_2]}\left(\tilde{U}_m\right) = \sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^{n_1} a_{ij} x^j \varepsilon_1^i \Big/ \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{i=0}^{n_2} b_{ij} x^j \varepsilon_1^i ,\ b_{00} \equiv 1 .$$

Практическое поведение различных приближений приведено на рис. 1.2 для $\varepsilon = 0{,}5$, $a = 1$, $\delta a = 0{,}5$ при $y = \pi/2$, где тонкой сплошной линией показано точное решение, точками – сумма двух первых членов приближения по параметру, пунктиром – дробно-рациональное преобразование приближения только по параметру, штрихпунктиром – только по переменной интегрирования, и толстой линией – двумерная дробно-рациональная модель.

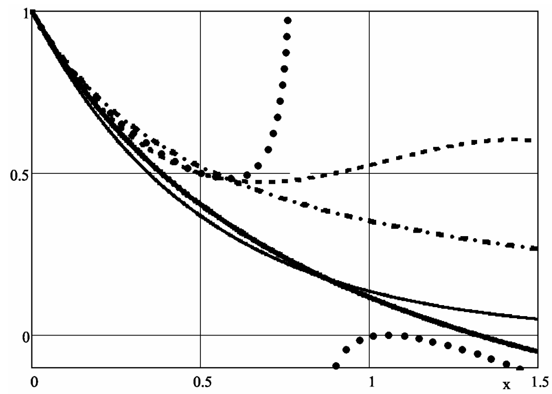

Рис. 1.2. Сравнение точного решения и моделей

Видно, что двумерная дробно-рациональная модель существенно расширяет радиус сходимости по переменной интегрирования и дает более точный результат даже при малом числе приближений.

3 Постановка задач в общем случае

В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^2$ двух переменных $\{\eta,\xi\}\in\mathbb{E}^2$ рассмотрим замкнутую односвязную криволинейную трапецию Ω, близкую к прямоугольнику Ω_0, вида

$$\{\Omega:-\pi<\eta<\pi,-f_1(\eta)<\xi<1+f_2(\eta)\},\{\Omega_0:-\pi<\eta<\pi,0<\xi<1\},$$
$$\Omega_0\subset\Omega,\ f_i(\eta)\ge 0,\ \max_{\eta\in[-\pi,\pi]} f_i(\eta)\ll 1,\ i=1,2, \tag{3.1}$$

где $f_i(\eta)$ – непрерывные функции на отрезке $[-\pi,\pi]$.

На область Ω могут быть отображена, в частности, срединная поверхность замкнутых оболочек нулевой гауссовой кривизны, имеющих гладкое возмущение торцов в плоскости, перпендикулярной оси оболочки [1]. Граница трапеции $\partial\Omega$ состоит из четырех участков вида

$$\partial\Omega_1=\partial\Omega\big|_{\eta=-\pi},\ \partial\Omega_2=\partial\Omega\big|_{\eta=\pi},\ \partial\Omega_3=\partial\Omega\big|_{\xi=f_1(\eta)},\ \partial\Omega_4=\partial\Omega\big|_{\xi=1+f_2(\eta)},$$

а граница прямоугольника $\partial\Omega_0$ – из четырех участков вида

$$\partial\Omega_{01}=\partial\Omega\big|_{\eta=-\pi},\ \partial\Omega_{02}=\partial\Omega\big|_{\eta=\pi},\ \partial\Omega_{03}=\partial\Omega_0\big|_{\xi=0},\ \partial\Omega_{04}=\partial\Omega_0\big|_{\xi=1}.$$

На замыкании $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$ введем множество равномерно ограниченных функций

$$\left\{U:U_i\in U,i=\overline{1,N}\right\}, \tag{3.2}$$

имеющих на $\overline{\Omega}$ равномерно ограниченные непрерывные частные производные степени не ниже n_i для каждой функции u_i, вида

$$\left\{U^{(n)}:U_{ikp}\in U^{(n)},U_{ikp}=\frac{\partial^{k+p}U_i}{\partial\eta^k\partial\xi^p},0\le k+p\le n_i,\ k,p=\overline{1,n_i},\ i=\overline{1,N}\right\}, \tag{3.3}$$

множество непрерывных частных производных не ниже n_i-1 степени вида

$$\left\{U^{(n-1)}: U_{ikp} \in U^{(n)},\ 0 \le k+p \le n_i - 1,\ k,p = \overline{1, n_i - 1},\ i = \overline{1,N}\right\} \qquad (3.4)$$

и множество частных производных старшего порядка

$$\left\{U^{(\max)}: U_{ikp} \in U^{(\max)}, U_{ikp} \in U^{(n)},\ k+p = n_i,\ k,p = \overline{1, n_i},\ i = \overline{1,N}\right\}. \qquad (3.5)$$

При этом $U_i = U_{i00},\ i = \overline{1,N}$.

Пусть дана система N нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\Lambda_j\left(\eta,\xi,U^{(n)}\right) = \Phi_j\left(\eta,\xi,U^{(n-1)}\right),\ j = \overline{1,N}, \qquad (3.6)$$

где Λ_j, Φ_j – алгебраические аналитические функции, равномерно ограниченные на $\overline{\Omega}$ и представимые на нем своими рядами Маклорена относительно η, ξ, U_{ikp} (все компоненты воспринимаются как независимые переменные), Λ_j линейны относительно компонентов $U^{(\max)}$.

Система уравнений должна быть дополнена граничными условиями на $\partial\Omega$. Примем условие периодичности решения по переменной η, отражающее условия моделирования замкнутых оболочек, вида

$$\left.U^{(n)}\right|_{\partial\Omega_1} = \left.U^{(n)}\right|_{\partial\Omega_2}. \qquad (3.7)$$

На участках $\partial\Omega_3$ и $\partial\Omega_4$ необходимо задать граничные условия вида

$$\partial\Omega_k : G_j^k\left(\eta, \left.U^{(n-1)}\right|_{\partial\Omega_k}\right) = 0,\ j = \overline{1, n_k}, k = 3, 4, \qquad (3.8)$$

где G_j^k – некоторые ограниченные кусочно-непрерывные алгебраические функции всех своих аргументов.

Необходимо найти решение системы (3.6) на множестве U, удовлетворяющее граничным условиям (3.7) – (3.8) на $\partial\Omega$. Количество независимых граничных условий (3.8) определяется конкретным видом системы уравнений. Они должны давать возможность определения всех произвольных функций, входящих в общее решение системы.

Задача (3.6) – (3.8) является, в общем случае, нелинейной краевой задачей со сложными граничными условиями для неканонической (возмущенной) области. Вид (3.6) – (3.8) имеют некоторые задачи механики, в частности, краевые задачи теории пластин и торсовых оболочек [19].

4 Схема вычислительного метода для общего случая

Данный метод представляет собой последовательность формализованных действий для получения эффективного решения поставленной граничной задачи (3.6) – (3.8) в виде двумерных дробно-рациональных моделей. Эта последовательность такова: краевая задача для возмущенной области приводится к нормальной форме, а затем приближается рекуррентной последовательностью предельных краевых задач с полиномиальной нелинейностью для прямоугольника. Решение предельных краевых задач в виде тригонометрического ряда по циклической переменной сводится к граничным задачам для систем ОДУ. Граничные задачи для систем ОДУ решаются путем специального вида возмущения при помощи искусственного параметра так, что последовательные приближения получаются в виде полиномов. Для обеспечения сходимости решения одновременно по параметру возмущения и переменной интегрирования используется обобщенное суммирование его двумерными дробно-рациональными функциями. Суммирование производится на основании специальной схемы выбора членов ряда, используемых для построения приближения, что обеспечивает его существование, единственность и сходимость к точному решению.

Приведение системы уравнений к нормальной форме позволяет провести в дальнейшем ее регуляризацию при помощи введения искусственного параметра. Метод возмущения формы границы позволяет перейти к рассмотрению последовательности рекуррентных задач в канонической области – на прямоугольнике. Замена нелинейности системы и решений полиномиальными приближениями позволяет ограничить вид предельных систем и обеспечить общую форму решения задачи в виде полиномов. Разложение искомого решения и входящих в систему функций в тригонометрические ряды является стандартным методом разделения переменных на прямоугольнике и сводит решение задачи к интегрированию граничных задач для систем ОДУ. Особенностью метода является специальная форма возмущения этих задач, которая приводит к получению приближений в виде двумерных полиномов по параметру возмущения и переменной интегрирования. Такая форма приближенного решения позволяет выявить некоторое условие сходимости к точному решению и в этом предположении провести его обобщенное суммирование дробно-рациональными функциями, обеспечивающее расширение радиуса сходимости регулярного приближения по обеим переменным.

5.1. Сведение к краевой задаче для уравнений первого порядка

Хорошо известно, что система дифференциальных уравнений в частных производных произвольного порядка может быть представлена эквивалентной системой 1-го порядка. Для этого достаточно ввести в качестве дополнительных искомых функций все частные производные от каждой функции U_i до порядка $n_i - 1$ включительно (эта замена корректна, если хотя бы одна производная порядка n_i входит в какое-либо уравнение рассматриваемой системы). В наших обозначениях это означает переход от системы искомых функций U к системе $U^{(n)}$ с разверткой мультииндекса компонент в линейную последовательность номеров функций. Обозначим $U^{(1)}$ упорядоченное таким образом множество вида

$$\left\{U^{(1)} : U_j^{(1)} = U_{ikp},\ j = \overline{1,r},\ 0 \le k + p \le n_i,\ k,p = \overline{1,n_i},\ i = \overline{1,N}\right\}. \qquad (5.1)$$

Без потери общности можно считать, что $U_i^{(1)} = U_i, U_{r-N+i}^{(1)} = U_i^{(\max)}, i = \overline{1,N}$. Ясно, что при этом систему следует пополнить уравнениями, отражающими равенство различных смешанных производных. В итоге граничная задача (3.6) – (3.8) записывается относительно r компонент $U^{(1)}$ взамен $U^{(n)}$, но не меняет своего общего вида. Запишем систему вида (4.6) в нормальной форме, в которой исходная часть уравнений разрешена относительно производных по переменной ξ, вида

$$LU_j = F_j\left(\eta,\xi,\left\{U_i^{(1)}, i=\overline{1,r-N}\right\}\right),\ L=\frac{\partial(\ )}{\partial\xi}, \tag{5.2}$$

а остальные являются уравнениями вида

$$\frac{\partial U_j}{\partial\xi}=U_k,\quad \frac{\partial U_p}{\partial\eta}=U_q. \tag{5.3}$$

Здесь F_j – алгебраические аналитические функции, представимые своими рядами Маклорена относительно η, ξ, U_i.

5.2. Асимптотический подход к построению решения на прямоугольнике

При решении задач методом возмущения формы границы требуется представление искомых и известных функций в виде рядов по переменной, в направлении оси которой происходит возмущение [19, 20]. Представим аналитические функции F_j и G_j^k в области своего определения сходящимися кратными рядами Маклорена относительно ξ и всех входящих в них компонент $U^{(1)}$ вида

$$\begin{gathered}F_j\left(\eta,\xi,U^{(1)}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}F_{j0q}(\eta)\xi^q+\sum_{k=1}^{r-N}\left[\sum_{q=0}^{\infty}F_{jkq}(\eta)\xi^q\right]U_k^{(1)}+\\ +\sum_{k=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-k+1}\left[\sum_{q=0}^{\infty}F_{jikq}(\eta)\xi^q\right]U_i^{(1)}U_k^{(1)}+\dots, \\ G_j^k\left(\eta,U^{(1)}\right)=G_{j0}^k+\sum_{l=1}^{r-N}G_{jl0}^k U_l^{(1)}\Big|_{\partial\Omega_k}+\sum_{l=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-l+1}G_{jil}^k U_i^{(1)}\Big|_{\partial\Omega_k}U_l^{(1)}\Big|_{\partial\Omega_k}+\dots\end{gathered} \tag{5.4}$$

при этом η рассматривается как параметр, а ξ и $U_i^{(1)}$ – как независимые переменные.

Переходя к общим условиям, которыми ограничим рассмотрение метода, отметим, что в большинстве прикладных задач механики и теории оболочек функции, определяющие нелинейность уравнений, изначально имеют вид полинома, причем степень его редко превышает куб [17, 18]. Нами, предполагая по постановке задачи поиск «ограниченного» или «медленного» решения, имеющего ограниченные производные до n_i порядка, ряды в (12) заменяются своими отрезками – многомерными полиномами от $U^{(1)}$ конечной степени. Это получит обоснование после установления соответствующей (условной) сходимости данных рядов. Иначе – при высокой степени нелинейности и т. н. «быстром» или быстро осциллирующем решении, – следовало бы использовать упрощенные предельные системы, позволяющие выявить главные члены уравнений для конкретных параметров граничной задачи и характера искомого решения [19].

Нелинейная граничная задача (3.7), (3.8), (5.2) – (5.3) на криволинейной трапеции Ω в предлагаемом методе приводится к последовательности граничных задач на прямоугольнике Ω_0 в ходе процедуры асимптотического возмущения формы границы, что является стандартным шагом [20–22]. Для этого рационально использовать искусственный параметр возмущения ε, который введем специальным образом:

$$\left\{\Omega_\varepsilon : -\pi < \eta < \pi, -\varepsilon f_1(\eta) < \xi < 1 + \varepsilon f_2(\eta)\right\},$$

$$\partial\Omega_{\varepsilon 1} = \partial\Omega\big|_{\eta=-\pi},\ \partial\Omega_{\varepsilon 2} = \partial\Omega\big|_{\eta=\pi},\ \partial\Omega_{\varepsilon 3} = \partial\Omega_\varepsilon\big|_{\xi=-\varepsilon f_1(\eta)},\ \partial\Omega_{\varepsilon 4} = \partial\Omega_\varepsilon\big|_{\xi=1+\varepsilon f_2(\eta)}\qquad .$$

$$LU_j = \sum_{q=0}^{\infty} F_{j0q}(\eta)\xi^q + \sum_{k=1}^{r-N}\left[\sum_{q=0}^{\infty} F_{jkq}(\eta)\xi^q\right]U_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-k+1}\left[\sum_{q=0}^{\infty} F_{jikq}(\eta)\xi^q\right]U_i^{(1)}U_k^{(1)} + \ldots,$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial\xi} = U_k,\quad \frac{\partial U_j}{\partial\eta} = U_q,\ U^{(1)}\big|_{\partial\Omega_1} = U^{(1)}\big|_{\partial\Omega_2},\qquad (5.5)$$

$$\partial\Omega_{\varepsilon k} : \sum_{q=0}^{\infty} G_{j0q}^k(\eta)\varepsilon^q + \sum_{l=1}^{r-N}\left[\sum_{q=0}^{\infty} G_{jl0q}^k(\eta)\varepsilon^q\right]U_l^{(1)}\big|_{\partial\Omega_k} +$$

$$+\sum_{l=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-l+1}\left[\sum_{q=0}^{\infty} G_{jilq}^k(\eta)\varepsilon^q\right]U_i^{(1)}\big|_{\partial\Omega_k} U_l^{(1)}\big|_{\partial\Omega_k} + \ldots = 0,\ k = 3, 4\ .$$

При этом, для $\varepsilon = 0$ получаем упрощенную краевую задачу на прямоугольнике, а при $\varepsilon = 1$ – исходную краевую задачу. Представляя все функции в виде рядов по степеням параметра вида

$$U_i = \sum_{q=0}^{\infty} U_{iq}(\eta,\xi)\varepsilon^q,\ U_i^{(1)} = \sum_{q=0}^{\infty} U_{iq}^{(1)}(\eta,\xi)\varepsilon^q,$$

$$U_{iq}^{(1)}\big|_{\partial\Omega_3} = U_{iq}^{(1)}(\eta,\xi)\big|_{\xi=-\varepsilon f_1(\eta)} = U_{iq}^{(1)}(\eta,0) -$$

$$-\frac{\partial U_{iq}^{(1)}(\eta,0)}{\partial\xi} f_1(\eta)\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_{iq}^{(1)}(\eta,0)}{\partial\xi^2}\left(f_1(\eta)\right)^2\varepsilon^2 + \ldots\qquad (5.6)$$

$$U_{iq}^{(1)}\big|_{\partial\Omega_4} = U_{iq}^{(1)}(\eta,\xi)\big|_{\xi=1+\varepsilon f_2(\eta)} = U_{iq}^{(1)}(\eta,1) +$$

$$+\frac{\partial U_{iq}^{(1)}(\eta,1)}{\partial\xi} f_2(\eta)\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_{iq}^{(1)}(\eta,1)}{\partial\xi^2}\left(f_2(\eta)\right)^2\varepsilon^2 + \ldots,$$

получим системы для определения $U_{iq}^{(1)}$ вида

$$\sum_{q=0}^{\infty} LU_{jq}\varepsilon^q = \sum_{q=0}^{\infty} F_{j0q}(\eta)\xi^q + \sum_{k=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-k+1}\left[\sum_{q=0}^{\infty} F_{jikq}(\eta)\xi^q\right]\left[\sum_{q=0}^{\infty} U_{iq}^{(1)}\varepsilon^q\right]\left[\sum_{q=0}^{\infty} U_{kq}^{(1)}\varepsilon^q\right] + \ldots,$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\partial U_{jq}}{\partial\xi}\varepsilon^q = \sum_{q=0}^{\infty} U_{kq}\varepsilon^q,\quad \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\partial U_{jl}}{\partial\eta}\varepsilon^l = \sum_{l=0}^{\infty} U_{ql}\varepsilon^l,\ U_{iq}^{(1)}\big|_{\partial\Omega_1} = U_{iq}^{(1)}\big|_{\partial\Omega_2},\qquad (5.6)$$

$$\partial\Omega_{\varepsilon k}:\sum_{q=0}^{\infty}G_{j0q}^{k}(\eta)\varepsilon^{q}+\sum_{l=1}^{r-N}\left[\sum_{q=0}^{\infty}G_{jl0q}^{k}(\eta)\varepsilon^{q}\right]\left[\sum_{q=0}^{\infty}U_{lq}^{(1)}\Big|_{\partial\Omega_k}\varepsilon^{q}\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-l+1}\left[\sum_{q=0}^{\infty}G_{jilq}^{k}(\eta)\varepsilon^{q}\right]\left[\sum_{q=0}^{\infty}U_{iq}^{(1)}\Big|_{\partial\Omega_k}\varepsilon^{q}\right]\left[\sum_{q=0}^{\infty}U_{lq}^{(1)}\Big|_{\partial\Omega_k}\varepsilon^{q}\right]+\ldots=0,\ k=3,4.$$

Группируя коэффициенты при одинаковых степенях параметра, приравнивая их затем нулю, получим последовательность бесконечных, в общем случае, краевых задач для коэффициентов разложения искомых функций и вида

$$\varepsilon^{0}:LU_{j0}=F_{j00}(\eta)+\sum_{k=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-k+1}\left[\sum_{q=0}^{\infty}F_{jikq}(\eta)\xi^{q}\right]U_{i0}^{(1)}U_{k0}^{(1)}+\ldots,$$

$$LU_{j0}=U_{k0},\ \frac{\partial U_{j0}}{\partial\eta}=U_{q0},\ U_{i0}^{(1)}(-\pi,\xi)=U_{i0}^{(1)}(\pi,\xi), \tag{5.7}$$

$$\partial\Omega_{03}:G_{j01}^{3}(\eta)+\sum_{l=1}^{r-N}G_{jl00}^{3}U_{l0}^{(1)}(\eta,0)+\sum_{l=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-l+1}G_{jil0}^{3}U_{i0}^{(1)}(\eta,0)U_{l0}^{(1)}(\eta,0)+\ldots=0,$$

$$\partial\Omega_{04}:G_{j01}^{4}(\eta)+\sum_{l=1}^{r-N}G_{jl00}^{4}U_{l0}^{(1)}(\eta,1)+\sum_{l=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-l+1}G_{jil0}^{4}U_{i0}^{(1)}(\eta,1)U_{l0}^{(1)}(\eta,1)+\ldots=0,$$

$$\varepsilon^{1}:LU_{j1}=F_{j01}(\eta)+\sum_{k=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-k+1}\left[\sum_{q=0}^{\infty}F_{jikq}(\eta)\xi^{q}\right]\left[U_{i1}^{(1)}U_{k0}^{(1)}+U_{i0}^{(1)}U_{k1}^{(1)}\right]+\ldots,$$

$$LU_{j1}=U_{k1},\ \frac{\partial U_{j1}}{\partial\eta}=U_{q1},\ U_{i1}^{(1)}(-\pi,\xi)=U_{i1}^{(1)}(\pi,\xi), \tag{5.8}$$

$$\partial\Omega_{03}:\ G_{j00}^{3}(\eta)+\sum_{l=1}^{r-N}\left[G_{jl01}^{3}U_{l0}^{(1)}(\eta,0)+G_{jl00}^{3}f_{1}(\eta)LU_{l0}^{(1)}(\eta,0)\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-l+1}\left[G_{jil1}^{3}U_{i0}^{(1)}(\eta,0)U_{l0}^{(1)}(\eta,0)+\right.$$

$$\left.+G_{jil0}^{3}U_{l0}^{(1)}(\eta,0)f_{1}(\eta)LU_{i0}^{(1)}(\eta,0)+G_{jil0}^{3}U_{i0}^{(1)}(\eta,0)f_{1}(\eta)LU_{l0}^{(1)}(\eta,0)\right]+\ldots=0,$$

$$\partial\Omega_{04}:G_{j00}^{4}(\eta)+\sum_{l=1}^{r-N}\left[G_{jl01}^{4}U_{l0}^{(1)}(\eta,1)+G_{jl00}^{4}f_{2}(\eta)LU_{l0}^{(1)}(\eta,1)\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{r-N}\sum_{i=1}^{r-N-l+1}\left[G_{jil1}^{4}U_{i0}^{(1)}(\eta,1)U_{l0}^{(1)}(\eta,1)+\right.$$

$$\left.+G_{jil0}^{4}U_{l0}^{(1)}(\eta,1)f_{2}(\eta)LU_{i0}^{(1)}(\eta,1)+G_{jil0}^{4}U_{i0}^{(1)}(\eta,1)f_{2}(\eta)LU_{l0}^{(1)}(\eta,1)\right]+\ldots=0,$$

$$\cdots.$$

При этом граничные условия заданы на прямоугольнике $\partial\Omega_0$.

5.3. Разделение переменных для приведения последовательности краевых задач к граничным задачам для систем ОДУ.

Проведем разделение переменных интегрирования на прямоугольнике при помощи представления всех функций в виде тригонометрических рядов по периодической переменной [17, 18]. В силу периодичности граничных условий по переменной η, представим функции в предельных краевых задачах в виде рядов Фурье по этой переменной на отрезке $[-\pi,\pi]$ вида

$$U_{jq}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[u_{jqk}^{\cos}\cos(k\eta)+u_{jqk}^{\sin}\sin(k\eta)\right],\ f_i=\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_{ik}^{\cos}\cos(k\eta)+f_{ik}^{\sin}\sin(k\eta)\right],$$

$$G_{j0l}^{q}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(G_{j0l}^{q}\right)_k^{\cos}\cos(k\eta)+\left(G_{j0l}^{q}\right)_k^{\sin}\sin(k\eta)\right], \tag{5.9}$$

$$G_{jilm}^{q}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(G_{jilm}^{q}\right)_k^{\cos}\cos(k\eta)+\left(G_{jilm}^{q}\right)_k^{\sin}\sin(k\eta)\right],$$

$$\cdots.$$

Произведем подстановку (5.9) в разложение (5.7), (5.8), преобразование произведения тригонометрических функций к функциям кратного аргумента и сгруппируем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях. В силу независимости базиса разложения коэффициенты при каждом компоненте базиса должны быть равны нулю, что и дает необходимые ОДУ для расчета коэффициентов. Отметим, что при разделении переменных с использованием отрезков тригонометрических рядов допустимо использование также проекционных методов [18], в частности, метода Бубнова–Галеркина.

В результате последовательного применения преобразований для произведений, получаем граничную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для линеаризованных функций u и $u^{(1)}$ вида

$$\left\{u: u_j\in u, u_j=u_{iqk}^{m}(\xi), i=\overline{1,r},\ k,q=\overline{0,\infty},\ j=\overline{1,\infty}, m=\sin\bigcup\cos\right\},$$

$$\left\{u^{(1)}: u_j^{(1)}\in u^{(1)}, u_j^{(1)}=du_{iqk}^{(1)}\big/d\xi, i=\overline{1,r}, k=\overline{0,\infty}, j=\overline{1,\infty}, q=1\bigcup 2\right\}.$$

Граничная задача для системы ОДУ относительно переменной ξ на интервале $\xi\in\Xi=\left]0,1\right[$ с границей $\partial\Xi=0\bigcup 1$ имеет следующий общий вид

$$Lu_i+R_i(\xi,u)+N_i(\xi,u)=g_i(\xi),\ G_j(u)\big|_{\partial\Xi}=0, \tag{5.10}$$

где R_i – линейные, а N_i – нелинейные функции относительно u.

5.4. Приближенное интегрирование последовательности краевых задач для системы ОДУ.

Приближенное интегрирование граничных задач (5.10) проведем способом возмущения вида уравнений при помощи искусственного параметра. В отличие от известных асимптотических подходов [20–22], когда в качестве невозмущенной части оставляется наиболее близкая к исходным уравнениям линейная форма, произведем возмущение по искусственному параметру λ новым специальным образом: в качестве невозмущенной части оставим только старшую производную:

$$u_i=\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}^{M}\lambda^j,\ Lu_i=\lambda(g_i-R_i-N_i),\ G_j(u)\big|_{\partial\Xi}=0. \tag{5.11}$$

Представим R_i, N_i, и G_j в виде многомерных рядов Тейлора вида

$$R_i + N_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{r=0}^{\infty} N_{ij}^{r}\xi^{r}\right)u_j + \frac{1}{2!}\sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{\infty} N_{ijp}^{r}\xi^{r}\right)u_j u_p + \ldots\right),\; g_i = \sum_{j=0}^{\infty} g_{ij}\xi^{i},$$

$$G_j = \sum_{q=1}^{n}\left(G_{jq}\left(u_q - u_q\big|_{\partial\Xi}\right) + \frac{1}{2!}\sum_{p=1}^{n} G_{jqp}\left(u_q - u_q\big|_{\partial\Xi}\right)\left(u_p - u_p\big|_{\partial\Xi}\right) + \ldots\right). \qquad (5.12)$$

Подставим теперь разложения (21) в (20), сгруппируем и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ. Проведем непосредственное интегрирование полученных предельных граничных задач. В случае решения задачи Коши несложно проверить, что результат имеет вид:

$$\begin{aligned}
u_i = {} & \xi^0\lambda^0 u_i\big|_{\partial\Xi} + \xi^1\lambda^1\left(g_{i0} - \sum_{r=1}^{n}\left(N_{ir}^{0}u_r\big|_{\partial\Xi} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} N_{irp}^{0}\,u_r\big|_{\partial\Xi}\,u_p\big|_{\partial\Xi} + \ldots\right)\right) + \\
& + \xi^2\left(\left[\frac{g_{i1}}{2} - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left(N_{ir}^{1}\,u_r\big|_{\partial\Xi} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} N_{irp}^{1}\,u_r\big|_{\partial\Xi}\,u_p\big|_{\partial\Xi} + \ldots\right)\right]\lambda^1 + \right. \\
& + \left[-\sum_{r=1}^{n}\left(N_{ir}^{0}\left(\frac{g_{r0}}{2} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(N_{rl}^{0}\,u_l\big|_{\partial\Xi} + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n} N_{rlq}^{0}\,u_l\big|_{\partial\Xi}\,u_q\big|_{\partial\Xi} + \ldots\right) + \right.\right.\right. \qquad (5.13) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} N_{irp}^{0}\left(u_p\big|_{\partial\Xi}\left(\frac{g_{r0}}{2} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(N_{rl}^{0}\,u_l\big|_{\partial\Xi} + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n} N_{rlq}^{0}\,u_l\big|_{\partial\Xi}\,u_q\big|_{\partial\Xi} + \ldots\right)\right) + \right. \\
& \left.\left.\left.\left. + u_r\big|_{\partial\Xi}\left(\frac{g_{p0}}{2} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(N_{pl}^{0}\,u_l\big|_{\partial\Xi} + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n} N_{plq}^{0}\,u_l\big|_{\partial\Xi}\,u_q\big|_{\partial\Xi} + \ldots\right)\right)\right)\right)\right]\lambda^2\right) + \ldots .
\end{aligned}$$

Таким образом, результатом специального введения искусственного параметра является решение в виде двумерного асимптотического степенного ряда по параметру и переменной интегрирования. Кроме того, из вида полученного решения непосредственно вытекает его устойчивость для задачи Коши – первые члены ряда по степеням переменной определяются окончательно решениями первых предельных граничных задач.

5.5. Выбор схемы усечения рядов и суммирование их двумерными дробно-рациональными аппроксимантами.

Полученное приближенное асимптотическое решение граничной задачи (5.13) является формальным. Для непосредственного применения приближения в технических задачах необходимо определить диапазон его сходимости по параметру возмущения и переменной интегрирования, или произвести суммирование. При этом, в отличие от естественного малого параметра, для искусственного параметра должна быть обеспечена сходимость вплоть до единицы, что не всегда достижимо. Эта проблема решается, в основном, методами продолжения по параметру или обобщенного суммирования [21], наиболее перспективными и естественными из которых являются аппроксимации Паде [10]. Использование указанных методов производилось ранее только для продолжения по параметру возмущения, т. е. для одномерного случая (1D), и на основе преимущественно эмпирических предположений.

Переменная интегрирования при этом рассматривалась как параметр, интервал сходимости по ней рассчитывался апостериорно. Применение двумерного (2D) суммирования практически не производилось, в частности, из-за множественности выбора коэффициентов ряда и вытекающей из этого проблемы существования и единственности обобщенной суммы. Хорошо известно, что это фундаментальная проблема для кратных рядов и ее решение требует использования результатов специальных исследований в области многомерных функций [23]. Только в последние годы математиками школы А.Н. Колмогорова под руководством В.В. Вавилова была обоснована специальная схема преобразования отрезков кратного ряда Тейлора в двумерные дробно-рациональные функции Паде–типа, обеспечивающая существование и единственность аппроксимант с заданной структурой [14].

Пусть для комплексных переменных z_1, z_2 в окрестности начала координат задана голоморфная функция $F(z_1,z_2)=\sum_{i=0}^{\infty} f_{ij} z_1^i z_2^j$. Пусть для любых целых множеств $n=(n_1,n_2)$ и $m=(m_1,m_2)$, т. е. для любых $n,m\in\mathbb{Z}_+^2$, задан класс рациональных функций – отношение двумерных полиномов степени не выше $n=(n_1,n_2)$ и $m=(m_1,m_2)$ соответственно по каждой переменной – вида

$$R(n,m)=\left\{ r=\frac{p}{q}, p=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} p_{ij} z_1^i z_2^j, q=\sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2} q_{ij} z_1^i z_2^j, q_{00}\equiv 1, \deg(p)\le n, \deg(q)\le m \right\}.$$

Каждая рациональная функция $r\in R(n,m)$ может быть задана своим сходящимся в некоторой окрестности начала координат рядом Маклорена. Функция r зависит от $\tau_{nm}=(n_1+1)(n_2+1)+(m_1+1)(m_2+1)-1$ параметров (коэффициентов p и q). Множество целых точек $I=I(n,m)\subset\mathbb{Z}_+^2$ называется определяющим множеством, если для фиксированных n и m

$$\dim I=\tau_{nm},$$

$$\{(n_1+m_1,0),(0,n_2+m_2)\}\subset I,$$

$$[0,k]=\{k\in I,(s_1,s_2)\in\mathbb{Z}_+^2 : 0\le s_j\le k_j, j=1,2\}\subset I,$$

$$\{(n_1+m_1,m_2),(m_1,n_2+m_2)\}\bigcap I\ne\varnothing,\ n\in I.$$

Существует два и только два варианта определяющих множеств I_1 и I_2, удовлетворяющих всем требованиям, с компонентами (i,j) вида

$$I_1:$$

$$\{[0\le i\le n_1, 0\le j\le n_2]\bigcup[n_1+1\le i\le n_1+m_1, 0\le j\le m_2]\bigcup[i=0, n_2+1\le j\le n_2+m_2]\},$$

$$I_2:$$

$$\{[0\le i\le n_1, 0\le j\le n_2]\bigcup[0\le i\le m_1, n_2+1\le j\le n_2+m_2]\bigcup[n_1+1\le i\le n_1+m_1, j=0]\}.$$

Обобщенная аппроксиманта Паде для заданных значений n и m определяется как рациональная функция F_{nm}, для которой коэффициенты ряда Маклорена разности F_{nm} с F равны нулю на I:

$$T_{ij}\left(F - F_{nm}\right) = 0,\ \left(i,j\right) \in I .$$

Пусть для фиксированного значения $m \in \mathbb{Z}_{+}^{2}$ определен класс функций

$$M_m = M_m\left(\mathbb{C}^2\right) = \left\{F : F\left(z_1,z_2\right) = P\left(z_1,z_2\right) / Q_m\left(z_1,z_2\right)\right\}$$

со следующими свойствами: $P\left(z_1,z_2\right)$ – полная функция; $\deg Q_m = m$, $\deg Q_m\left(z_1,0\right) = m_1, \deg Q_m\left(0,z_2\right) = m_2$; $Q_m\left(0,0\right) = 1$; функции $P\left(z_1,0\right), P\left(0,z_2\right)$ и полиномы $Q_m\left(z_1,0\right), Q_m\left(0,z_2\right)$ не равны нулю одновременно.

Сформулируем условия корректного применения двумерного дробно-рационального преобразования.

Пусть $F\left(z_1,z_2\right) \in M_m$ представлена рядом Маклорена, $m \in \mathbb{Z}_{+}^{2}$ фиксировано и $n \in \mathbb{Z}_{+}^{2}$. Тогда для всех достаточно больших $n' = \min\left(n_1,n_2\right)$ существует единственная обобщенная аппроксиманта Паде $F_{nm} = P_n / q_n$ на каждом из определяющих множеств $I_j, j = 1,2$, и последовательность F_{nm} при $n' = \min\left(n_1,n_2\right) \to \infty$ равномерно сходится к F по всем компактным подмножествам $G = \mathbb{C}^2 \setminus \left\{Q_m = 0\right\}$. Для любого компакта $E \subset \mathbb{C}^2$ верны оценки сходимости по мере $\left\|f\left(z\right)\right\|_E = \sup\limits_{z \in E}\left|f\left(z\right)\right|$ вида

$$\lim_{n' \to \infty}\left\|Q_m - q_n\right\|_E^{1/n'} = 0,\ \lim_{n' \to \infty}\left\|F - F_{nm}\right\|_E^{1/n'} = 0 .$$

В предлагаемом методе за счет специальной схемы введения искусственного параметра и, как следствие, полиномиальной структуры приближенного решения асимптотического решения граничной задачи (5.13) впервые появляется возможность использовать приведенный результат для определения порядка усечения двумерного ряда, его обобщенного суммирования и оценки скорости сходимости. Приближенное решение (5.13) преобразуется по приведенной схеме к дробно-рациональной аппроксиманте вида

$$PA_{nm}\left(u_i\right) = \sum_{j=0}^{n_1}\sum_{k=0}^{n_2} p_{ijk}\xi^j\lambda^k \Bigg/ \sum_{j=0}^{m_1}\sum_{k=0}^{m_2} q_{ijk}\xi^j\lambda^k,\ q_{i00} \equiv 1 . \tag{5.14}$$

Согласно условиям корректного применения двумерного дробно-рационального преобразования, оно осуществляет мероморфное продолжение двумерного асимптотического ряда. Границей изменения параметров ряда является расстояние до ближайшей существенно особой точки (а не ближайшего полюса как у традиционных приближений) аппроксимируемой функции, что значительно расширяет диапазон пригодности модели.

5.6. Сходимости построенного приближенного решения

В работах ряда авторов, в частности Я. Ф. Каюка [21], А. Н. Гузя и Ю. Н. Немиша [22], приведен общий порядок нахождения области сходимости разложения по параметру и обосновано успешное применение метода возмущения формы границы в некоторых отдельных задачах механики сплошных сред. При этом отмечено [21], что доказать сходимость приближенного решения таких задач при произвольном выборе области интегрирования, вида системы уравнений и граничных условий не представляется возможным.

В нашем подходе возможна иная постановка задачи обоснования построенного метода приближенного решения задачи (3.6) – (3.8). Будем опирается на гипотезу о пригодности асимптотического разложения в методе возмущения формы границы. Эта гипотеза основана на традиции, восходящей к Пуанкаре [21], она заключается в предположении существования точного аналитического решения возмущенной системы для некоторых малых отличных от нуля значений параметра возмущения и сходимости к нему разложения в методе возмущения формы границы. Поскольку аналитическое решение на некоторой части области определения параметра возмущения позволяет построить его аналитическое продолжение на всю область определения, принятие гипотезы является логичным основанием искать решение в виде обобщенной суммы полученных рядов.

Лемма 5.1. Для того, чтобы (5.13) при $\lambda = 1$ было рядом Маклорена точного решения граничной задачи (5.9), голоморфного в некоторой окрестности $\xi = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ряды (5.10) сходились равномерно на замыкании $\Xi \bigcup \partial\Xi$.

Доказательство необходимости условий леммы вытекает из способа получения (5.13). Действительно, легко проверить, что, если представить искомые функции в виде рядов Маклорена, подставить их в (5.9), перегруппировать и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной, то получатся выражения для коэффициентов (5.13).

Достаточность приведенных условий непосредственно следует из единственности степенного разложения функций в области голоморфности. Требование равномерности для оценки сходимости разложения необходимо для изменения порядка суммирования при бесконечном числе членов.

Лемма 5.1 заимствована из нашей работы [17], в которой изложение более детально и рассмотрены применения к уравнениям выше первого порядка.

Теорема 5.1. Пусть решение (точное) краевой задачи (5.10) существует и единственно. Тогда в условиях леммы 5.1 применение к асимптотическому ряду (5.13) усечения и дробно-рационального преобразования в двумерные Паде–аппроксиманты описанным в разделе 5.5 методом определяет корректное обобщенное суммирование этого ряда, которое сохраняет смысл во всей области мероморфности точного решения.

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 5.1 и приведенных условий корректного применения двумерного дробно-рационального преобразования.

Следствие 5.1 (достаточное условие сходимости метода) Для того, чтобы дробно-рациональные функции (5.14) определяли асимптотическую мероморфную модель задачи (3.6) – (3.8) в области, близкой к прямоугольнику, необходимо, чтобы точное аналитическое решение этой задачи существовало и допускало сходящееся разложение (5.6) с коэффициентами, удовлетворяющими методу возмущения формы границы (5.7).

Действительно, если сходятся разложения аналитических функций (5.14) и соответствующая им последовательность предельных краевых задач метода возмущения формы границы для криволинейной трапеции, то уравнения (5.9) для амплитуд их гармонического разложения имеет, согласно утверждениям 1 и 2, мероморфное приближение в виде (5.14). Ограничение на аналитичность решения связано с характером исследуемых задач и, как правило, вытекает из физической природы исследуемых систем. В то же время, наличие полюсов аппроксимации, моделирующих положение особенностей точного решения, позволяет рассчитывать критические значения параметров модели – положение точек бифуркации, предельных точек, нарушение условий устойчивости процесса и т. д.

Несмотря на то, условие следствия 5.1 не вполне конструктивно, в задачах механики замкнутых торсовых оболочек, которые исследованы в [12, 13, 15], оно выполняется. Больше того, там оно может быть заменено непосредственно доказательством существования и аналитичности решения возмущенной задачи. В тех задачах, где условие следствия не выполняется, всё еще остаётся возможность установить практическую сходимость модели в смысле Пуанкаре путем оценки нормы последовательных приближений [21].

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

В статье автором разработан комплексный вычислительный метод для расчета возмущённых периодических краевых задач для систем уравнений в частных производных, включающего известные задачи теории упругих гибких торсовых оболочек, который обеспечивает сходимость решений и получение приемлемого для приложений результата при наиболее широких условиях, допустимых в рамках ассимптотического подхода к использованию рядов с параметрами возмущения. Наряду с разработкой общей схемы, в которую укладываются частные случаи [12, 13, 1], впервые дано условие успешного применения нашего варианта асимптотического подхода в моделировании деформированных состояний замкнутых торсовых оболочек, выделяющее определённый класс задач с наличием, вообще говоря, полиномиальных нелинейностей в уравнениях для областей, которые можно получить деформацией из прямоугольника. Даётся схема вычислительного метода, применимая при выполнении данного условия, и доказывается для этого случая условная сходимость асимптотических рядов. Это позволяет осуществить в данной схеме обоснованное усечений двумерных асимптотических рядов с оценкой точности, причем, не с апелляцией к физическим соображениям, а на основе найденного адекватного порядка их обобщенного суммирования. Накопленные к настоящему времени результаты численных экспериментов наглядно подтверждают [15, 16], что в исследованных задачах использование обобщенного суммирования двумерного асимптотического ряда по предложенному методу действительно приводят существенному повышению точности численного моделирования.

Прикладная значимость этих результатов заключена в их существенном отличии от ранее использовавшихся вариантов асимптотического подхода для построения решений краевых задач механики оболочечных и других строительных конструкций в двумерных возмущённых областях. А именно, в предложенном методе возможна оценка погрешности усечения ряда и увеличение интервала изменения параметра возмущения, на котором получаются достоверные численные результаты, вплоть до ближайшей существенно особой точки точного решения.

Общность схемы применения метода позволяет получать новые математические модели и позитивные результаты их испытаний для возмущенных краевых задач в различных прикладных областях. Это – естественное направление развития результатов статьи на дальнейшее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олевский, В. И. Асимптотический метод моделирования технических систем с технологическими отклонениями [Текст] / В. И. Олевский // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 4/11(70). – 2014. – С. 25–31.
2. Teng, J. G. Buckling of thin shells: Recent advances and trends [Text] / J. G. Teng // Appl. Mech. Rev. – 1996. – Vol. 49, Issue 4. – pp. 263–274.
3. Teng, J. G. Buckling of Thin Metal Shells [Text] / J. G. Teng and , J. M. Rotter. – London and New York: Spon Press, 2006. – 520 p.
4. Григолюк, Э. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела [Текст] / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 232 с.
5. Численные методы в механике [Текст] / В.А. Баженов, А.Ф Дащенко, Л.В. Коломиец и др. – Одесса, Стандартъ. – 2005. – 563 с.
6. Дородницын, А. А. Применение метода малого параметра к численному решению дифференциальных уравнений [Текст] / А. А. Дородницын. – Соврем. проблемы матем. физики и вычисл. матем. – М.: Наука, 1982. – С. 145–155.
7. Adomian, G. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations [Text] / G. Adomian // Comp. Math. Appl. – 1989. – Vol. 21. – pp. 101–127.
8. He, J. H. Recent developments of the homotopy perturbation method [Text] / J. H. He // Top. Meth. Nonlin. Anal. – 2008. – Vol.31. – pp. 205-209.
9. Андрианов, И.В. Расчет нелинейного деформирования оболочек с развертывающейся срединной поверхностью приближенными аналитическими методами [Текст] / И.В. Андрианов, А.М. Мильцын, В.И. Олевский, В.В. Плетин // Східно-Європейський журнал передових технологій. – Харьков, 2010. - № 3/9 (45). – С. 27-34.
10. Андрианов, И. В. Применение метода Паде-аппроксимант для устранения неоднородностей асимптотических разложений [Текст] / И. В. Андрианов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1984. – № 3. – С. 166–167.
11. Basto, M. Numerical study of modified Adomian's method applied to Burgers equation / M. Basto, V. Semiao, F. L. Calheiros // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 206(2). – pp. 927-949.
12. Andrianov, I. V. Analytical perturbation method for calculation of shells based on 2-D Padé approximants [Text] / I. V. Andrianov, V. I. Olevs’kyy, J. Avrejcevwicz // Int. J. Str. Stab. Dyn. – 13 (7). – 2013. – pp. 1340003-1–1340003-7.

13. Andrianov, I. V. Application of 2-D Padé approximants in nonlinear shell theory: Stability calculation and experimental justification [Text] / I. V. Andrianov, V. I. Olevs'kyy, J. Avrejcevwicz // Nunliarity, bifurcation and chaos – Theory and applications. – Rijeca (Croatia): InTech. – 2012. – pp. 1–26.
14. Vavilov, V. V. Design of multidimensional Recursive Systems through PadéType Rational Approximation [Text] / V. V. Vavilov, M. K. Tchobanou, P. M. Tchobanou // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. – 2002. – Vol. 7, Issue 1. – P. 105–125.
15. Олевский, В. И. Математическое моделирование оболочечных конструкций с отклонениями [Текст] / В. И. Олевский. – Днепропетровск, изд-во Маковецкий. – 2014. – 382 с.
16. Андрианов, И. В. Модифицированный метод декомпозиции Адомяна [Текст] / И. В. Андрианов, В. И. Олевский, С. Токажевский // ПММ. – 1998. – Т. 62, №.2. – С. 334-339.
17. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики [Текст] / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М.: Физматлит. – 2005. – 256 с.
18. Власова, Б. А. Приближенные методы математической физики [Текст]: Учеб. для вузов / Б. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин // Под. ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2001. – 700 с.
19. Andrianov, I. V. Approximate non-linear boundary value problems of reinforced shell dynamics [Text] / I. V. Andrianov, E. G. Kholod, V. I. Olevsky // J. Sound Vibr. – 1996. – Vo l. 194, Issue3. – P. 369 – 387.
20. Andrianov, I. V. Asymptotic Approaches in Mechanics: New Parameters and Procedures [Text] / I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz, R. G Barantsev // Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56, Issue 1. – P. 87–110.
21. Каюк, Я. Ф. некоторые вопросы методов разложения по параметру [Текст] // Я. Ф. Каюк. – Киев: Наук. думка. – 1980. – 168 с.
22. Гузь, А. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред: Учебное пособие для студ. ун-тов и втузов [Текст] // А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – Киев : Выща школа, 1989 . – 352 с.
23. Олевская, Ю. Б. О соотношении некоторых систем суммирования кратных рядов Фурье [Текст] / Ю. Б. Олевская, В. И. Олевский // Шляхи сучасної математики:освіта, наука, індустрія: матеріали конф. (18 квіт., м. Дніпропетровськ). –Д.: Національний гірничий університет. – 2013. – с. 26–32.

Надійшла у першій редакції 23.10.2014, в останній - 03.11.2014.