

УДК 51-72

Температурные напряжения, возникающие в бесконечном стержне в рамках пространственно нелокальной модели термоупругости

Л. И. Брацыхина, М. В. Сынах, Л. А. Фильштинский
Сумской государственной университет, Украина

В статье рассматривается одномерная пространственно-нелокальная задача термоупругости. Для решения задачи применялся метод интегральных преобразований и численное интегрирование. Получены графики распределения смещения и температуры для различных значений временного параметра.

Ключевые слова: фрактальное уравнение теплопроводности, дробная производная Капуто, дробная производная Рисса, задача нелокальной термоупругости.

В статі розглядається одновимірна просторово-нелокальна задача термопружності. Для розв'язання задачі було застосовано метод інтегральних перетворень та чисельне інтегрування. Отримано графіки розподілу переміщення і температури для різних значень часового параметру.

Ключові слова: фрактальне рівняння теплопровідності, дробова похідна Капуто, дробова похідна Рисса, задача нелокальної термопружності.

In the article, 1D spatially nonlocal thermoelasticity problem is considered. The method of integral transforms and numerical integration were applied to solve this problem. Distributions of displacement and temperature for various values of time parameter are obtained.

Key words: fractional heat conduction equation, Caputo fractional derivative, Riesz fractional derivative, nonlocal thermoelasticity problem.

1. Общая постановка задачи

В классической теории термоупругости связь между напряжениями, перемещениями и температурой определяется соотношениями Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j) + [\lambda e - \beta T] \delta_{ij}, \quad (1)$$

где λ , μ – постоянные Ламе, β – коэффициент температурных напряжений, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, u_i – компоненты вектора перемещений, $e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$, $\partial_i u_j = \partial u_j / \partial x_i$, T – температура.

В одномерном случае (1) запишется в виде

$$\sigma(x, t) = (2\mu + \lambda)e - \beta T(x, t), \quad e = \partial u / \partial x. \quad (2)$$

Следуя работе [1], обобщим (2) следующим образом

$$\sigma(x, t) = (2\mu + \lambda)e_\gamma - \beta T, \quad (3)$$

$$e_\gamma = \frac{1}{2} \left[{}^C D_{a+}^\gamma u(x, t) - {}^C D_{b-}^\gamma u(x, t) \right], \quad 0 < \gamma < 1.$$

Подставляя (3) в уравнение движения $\rho \partial^2 u(x,t) / \partial t^2 = \partial \sigma / \partial x$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[{}^C D_{a+}^\gamma u(x,t) - {}^C D_{b-}^\gamma u(x,t) \right] = -B \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

где $E_0 = (2\mu + \lambda) / (2\rho)$, $B = \beta / \rho$.

Температура T определяется из дробно-дифференциального уравнения теплопроводности [2] (при отсутствии тепловых источников)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^\beta T}{\partial |x|^\beta}, \quad 1 < \beta < 2. \quad (5)$$

Соотношения (3)-(5) описывают одномерную модель динамической несвязанной термоупругости, учитывающую нелокальные упругие взаимодействия между частицами среды, а также аномальный характер теплопроводности.

В качестве примера реализации данной модели рассмотрим задачу Коши для фрактального уравнения теплопроводности и вычислим соответствующие температурные напряжения.

Математическую формулировку задачи запишем следующим образом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[{}^C D_{+}^\gamma u(x,t) - {}^C D_{-}^\gamma u(x,t) \right] = -B \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^\beta T}{\partial |x|^\beta}, \quad 1 < \beta < 2, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (7)$$

начальные условия

$$T(x,0) = \delta(x), \quad u(x,0) = 0, \quad (8)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака [3].

2. Истоки исследования авторов

Процессы переноса частиц и энергии (диффузия и теплопроводность соответственно), возникающие в пористых материалах, аморфных полупроводниках, перколяционных кластерах, полимерных структурах, называют аномальными, а иногда и фрактальными из-за их связи с дробно-дифференциальным исчислением [4-8]. Наиболее естественным и удобным математическим аппаратом описания процессов аномальной диффузии (теплопроводности) на некотором множестве являются уравнения в частных дробных производных как по пространственным координатам, так и по времени [9, 10].

Експериментально доказано, что в некоторых неоднородных средах процессы переноса не могут быть описаны законом Фика и уравнением теплопроводности, экспериментальные данные свидетельствуют о наличии больших «хвостов», связанных с полетами Леви [11, 12]. Последние относятся к случайным блужданиям со смещениями частиц, распределенных в соответствии с устойчивыми законами Леви. Пространственно-дробное уравнение аномальной теплопроводности (диффузии) можно получить, исходя из универсального уравнения (Паули) [13], либо на основании модели случайных блужданий, переходя к макромасштабному пределу.

Уравнения фрактальной термоупругости получены в работах [14, 15, 16]. Ю. Повстенко записал уравнения квазистатической термоупругости, основанные на дробно-диффузионном уравнении теплопроводности, а также рассмотрел несколько задач об определении напряжений во фрактальных средах [17, 18, 19].

В настоящее время особый интерес представляют граничные задачи фрактальной теплопроводности, термоупругости, диффузии. В литературе представлены, в основном, только численные методы их решения, основанные на аппроксимациях дробной производной Рисса-Феллера. Поэтому важной задачей является разработка аналитических либо численно-аналитических методов решения дробно-дифференциальных уравнений и соответствующих граничных задач.

3. Основные понятия дробного интегро-дифференцирования

В данном разделе мы кратко перечислим основные определения и свойства дробного интегро-дифференцирования, необходимые для рассмотрения неклассических (фрактальных) задач теплопроводности и термоупругости.

3.1 Дробные производные и интегралы Римана-Лиувилля

Пусть $\Omega = [a, b]$ – конечный интервал на действительной оси R^1 . Дробные интегралы $I_{a+}^{\alpha} f$ и $I_{b-}^{\alpha} f$ Римана-Лиувилля порядка α ($\text{Re } \alpha > 0$) определяются следующим образом

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a) \quad (9)$$

и

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b), \quad (10)$$

соответственно. Здесь $\Gamma(\alpha)$ – Гамма-функция [20]. Эти интегралы называются левосторонним и правосторонним дробными интегралами.

С учетом (9), (10) дробные производные Римана-Лиувилля $D_{a+}^{\alpha} u$ и $D_{b-}^{\alpha} u$ порядка α ($\text{Re } \alpha \geq 0$) определяются так

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha}y)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1; x > a), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha}y)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha}y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1; x < b), \end{aligned} \quad (12)$$

где $[\operatorname{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\operatorname{Re}(\alpha)$.

При действительных $0 < \alpha < 1$ формулы (11) и (12) существенно упрощаются:

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad (0 < \alpha < 1; x > a)$$

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1; x < b).$$

На всей действительной оси (т. е. для $-\infty < x < +\infty$) имеют место следующие формулы при $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} (I_{+}^{\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (I_{-}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \\ (D_{+}^{\alpha}y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad (D_{-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}. \end{aligned}$$

В частном случае, при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеем

$$(D_{+}^0y)(x) = (D_{-}^0y)(x) = y(x),$$

$$(D_{+}^ny)(x) = y^{(n)}(x), \quad (D_{-}^ny)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x).$$

Интегральное преобразование Фурье дробных производных Римана-Лиувилля вычисляется с помощью следующих соотношений

$$F[D_{\pm}^{\alpha}f(x)](\xi) = (\mp i\xi)^{\alpha} F[f(x)](\xi), \quad (\mp i\xi)^{\alpha} = |\xi|^{\alpha} e^{\mp \alpha \pi i \operatorname{sgn}(\xi)/2}, \quad (13)$$

где $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $F[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x} dx$.

3.2 Дробные производные в смысле Капуто и их связь с производными Римана-Лиувилля.

Дробные производные Капуто $({}^C D_{a+}^\alpha f)(x)$ и $({}^C D_{b-}^\alpha f)(x)$ выражаются через соответствующие производные Римана-Лиувилля следующим образом:

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(x) = \left(D_{a+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x),$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha f)(x) = \left(D_{b-}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right)(x),$$

где $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$ для $\alpha \notin N$, $n = \alpha$ для $\alpha \in N$.

Важное прикладное значение в теории дифференциальных уравнений имеет дробная производная Капуто, определенная на положительной полуоси:

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha f)(x) &= D_C^\alpha f(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt, \quad n-1 < \alpha < n. \end{aligned} \quad (14)$$

Для вычисления преобразования Лапласа от производной (14) достаточно знать начальные значения функции $f(x)$ и её производных целого порядка k ($k = 1, 2, \dots, n-1$)

$$L[D_C^\alpha f(x)](p) = p^\alpha L[f(x)](p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) p^{\alpha-1-k}, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (15)$$

Функция Миттаг-Леффлера $E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha]$ [21] является инвариантом для оператора ${}^C D_{a+}^\alpha$, то есть при $\alpha > 0$, $a \in R^1$ и $\lambda \in C$ имеет место равенство

$$\left({}^C D_{a+}^\alpha E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha] \right)(x) = \lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha].$$

3.3 Операторы дробного интегрирования и дифференцирования Рисса

Для $\alpha \in C \setminus \{0\}$ и "достаточно хороших" функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$

дробная степень оператора Лапласа $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ определяется с помощью

преобразования Фурье [22]

$$(-\Delta)^{-\alpha/2} f(x) = F^{-1} \left[|x|^{-\alpha} \right] F[f] = \begin{cases} I^\alpha f, \\ \mathbf{D}^{-\alpha} f, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Операторы I^α и \mathbf{D}^α в правой части (16) называются операторами дробного интегрирования и дифференцирования Рисса.

Из (16) следует, что $F[\mathbf{D}^\alpha y(x)](\xi) = |\xi|^\alpha F[y(x)](\xi)$.

Если $x \in R^1$, то иногда производную Рисса представляют в виде [2]

$$\frac{d^\alpha f(x)}{d|x|^\alpha} = -\frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)} \left[D_+^\alpha f(x) + D_-^\alpha f(x) \right],$$

и

$$F \left[d^\alpha f(x) / d|x|^\alpha \right](\xi) = -|\xi|^\alpha F[f(x)](\xi). \quad (17)$$

4. Используемый метод решения задачи термоупругости и его программная реализация

Применим к уравнениям (6), (7) интегральные преобразования Фурье и Лапласа с учетом начальных условий (8). Принимая во внимание формулы (13), (15) и (17), получим

$$\left\{ p^2 - E_0(-i\omega) \left((-i\omega)^\gamma - (i\omega)^\gamma \right) \right\} U(\omega, p) = (i\omega B) Q(\omega, p), \quad (18)$$

$$\left(|\omega|^\beta + p \right) Q = 1, \quad U = LF[u], \quad Q = LF[T]. \quad (19)$$

Выполним обращение интегральных преобразований в уравнениях (18), (19), после чего будем иметь

$$T(x, t) = \frac{H(t)}{\pi} \int_0^\infty e^{-\omega^\beta t} \cos \omega x d\omega, \quad (20)$$

$$u(x, t) = \frac{B}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega}{A^2 \omega^{\gamma+1} + \omega^{2\beta}} \left\{ e^{-\omega^\beta t} - \cos A\omega^{\frac{\gamma+1}{2}} t + \frac{\omega^\beta}{A\omega^{\gamma+1}} \sin A\omega^{\frac{\gamma+1}{2}} t \right\} \sin \omega x d\omega, \quad (21)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, $A = \sqrt{2E_0 \sin \frac{\gamma\pi}{2}}$.

На рис. 1-6 представлены результаты расчетов перемещения u и температуры T для различных значений показателей β и γ ($B = E_0 = 1$, $t_1 = 1c$, $t_2 = 3c$, $t_3 = 5c$, $t_4 = 7c$).

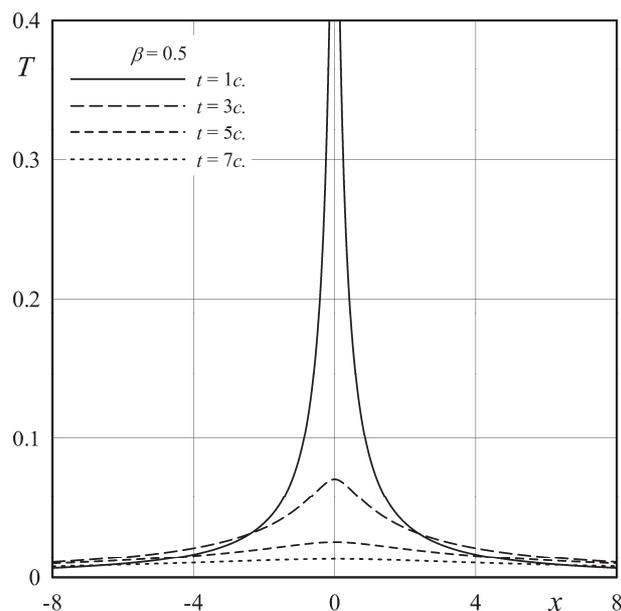


Рис. 1 Распределение температуры в стержне для различных моментов времени при $\beta = 0.5$.

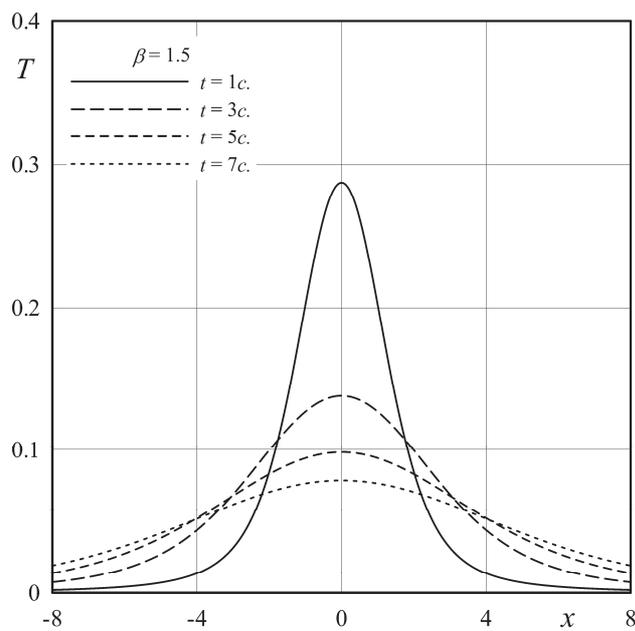


Рис. 2 Распределение температуры в стержне для различных моментов времени при $\beta = 1.5$.

Графики на рис. 1-2 характеризуют аномальный процесс теплопроводности, соответствующий явлению супердиффузии ($1/\beta > 1/2$), причем при $\beta = 0.5$ тепло переносится "быстрее", чем при $\beta = 1.5$.

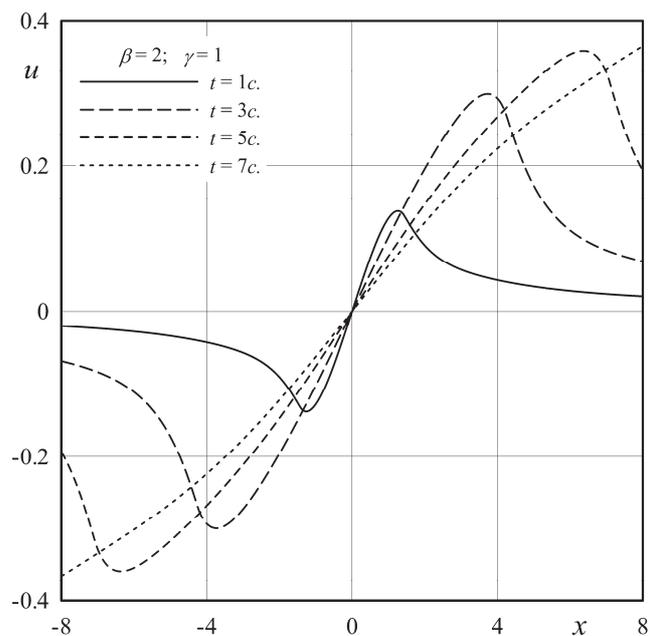


Рис. 3 Смещения в точках стержня для разных моментов времени при $\beta = 2$, $\gamma = 1$ (классическая термоупругость).

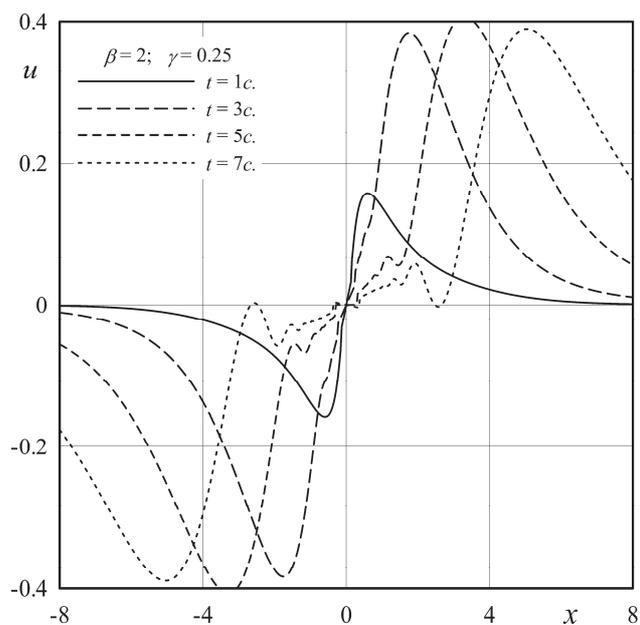


Рис. 4 Смещения в точках стержня для разных моментов времени при $\beta = 2$, $\gamma = 0.25$.

Сравнивая графики на рис. 3-4, видим, что нелокальность упругих взаимодействий приводит к колебаниям функции смещений вблизи нуля. Следует заметить, что в данном примере напряжения появляются только вследствие теплового расширения, однако дробный показатель γ оказывает

влияние на решение задачи даже при рассмотрении классической теплопроводности ($\beta = 2$).

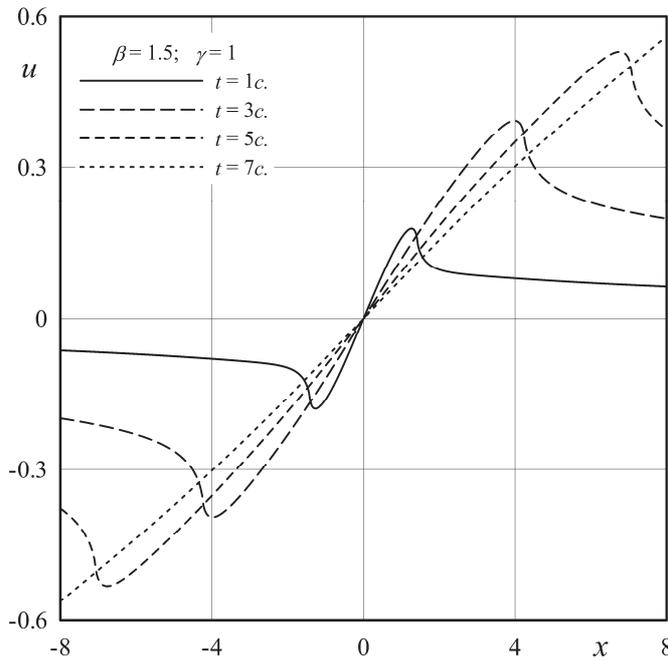


Рис. 5 Смещения в точках стержня для разных моментов времени при $\beta = 1.5$, $\gamma = 1$.

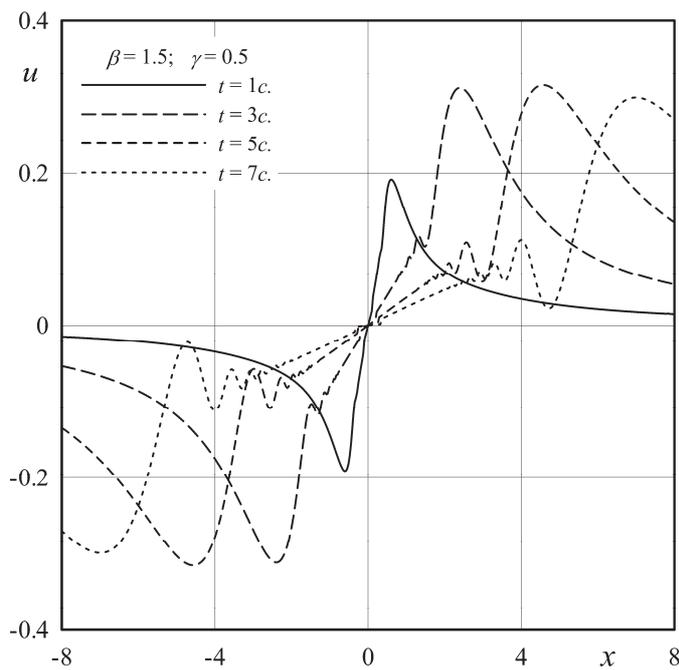


Рис.6 Смещения в точках стержня для разных моментов времени при $\beta = 1.5$, $\gamma = 0.5$.

Учет пространственной нелокальности тепловых и упругих взаимодействий одновременно (рис. 6) приводит к существенным изменениям результирующего поля перемещений.

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

В данной работе решена одномерная пространственно-нелокальная задача термоупругости, полученная на основании модели Атанковича [1]. При решении применялся метод интегральных преобразований. Результирующее перемещение и температура получены в виде интегралов (20), (21), представлены результаты численных расчетов. Учет пространственной нелокальности тепловых и упругих взаимодействий одновременно приводит к существенным изменениям результирующего поля перемещений. Дальнейшим развитием данной работы будет рассмотрение двумерной модели нелокальной термоупругости Атанковича.

ЛИТЕРАТУРА

1. Atanackovic T.M., Stankovic B. Generalized wave equation in nonlocal elasticity. // *Acta Mechanica*. — 2009. — 208. — P. 1-10.
2. Povstenko Y.Z. Thermoelasticity which uses fractional heat conduction equation. // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. — 2008. — 51, №2. — С. 239-246.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.
4. R. Metzler, J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* — 2000. — 339, p. 1-77.
5. S. Lepri, R. Livi, A. Politi. Anomalous heat conduction, in book: *Anomalous transport: foundations and applications* edited by R. Klages, G. Radons, I.M. Sokolov, — Wiley, VCH(Berlin), 2008, — 584 p.
6. А.М. Нахушев. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
7. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы. // *УФН*, — 2003. — т. 173, №8, — С. 847-876.
8. Смирнов Б.М. Энергетические процессы в макроскопических фрактальных структурах. // *УФН*. — 1993. — т. 161, №6. — С. 171-200.
9. Бейбалаев В.Д. Математическая модель теплопереноса в средах с фрактальной структурой. // *Математическое моделирование*. — 2009. — 21: 5. — С. 55-62.
10. Boyadjiev L., Scherer R. Fractional extensions of the temperature field problem in oil strata. // *Kuwait. J. Sci. Eng.* — 2004. — 31 (2). — p. 15-32.
11. Benson D.A., Wheatcraft S.W., Meerschaert M.M. The fractional-order equation of Levy motion, *Water Resour. Res.* — 2000. — 36. — p. 1413-1424.
12. Benson D.A., Schumer R., Meerschaert M.M., Wheatcraft S.W. Fractional dispersion, Levy motion, and the MADE tracer tests // *Transp. Por. Med.* — 2003. — 42. — p. 211-240.
13. Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F. Uncoupled continuous-time random walks: solutions and limiting behaviour of the master equation, *Phys. Rev. E*. — 2004. — 692. — 011107.

14. Ostoja-Starzewski M. Towards thermoelasticity of fractal media. // Journal of thermal stresses. — 2007. — 30. — p. 889-896.
15. Sherief H.H., El-Sayed A.M.A., Abd El-Latief A.M. Fractional order theory of thermoelasticity // International Journal of Solids and Structures, 47 (2010), pp. 269-275.
16. Youssef H. M. Theory fractional order generalized thermoelasticity // J. Heat Transfer (ASME), 132(6), 2010, doi: 10.1115/3.4000705.
17. Povstenko Y.Z. Theory of thermoelasticity based on the space-time-fractional heat conduction equation. // Phys. Scr. — 2009. — Т 136. — p. 014017-014023.
18. Povstenko Y.Z. Fundamental solutions to central symmetric problems for fractional heat conduction equation and associated thermal stresses. // Journal of thermal stresses. — 2008. — vol. 31, issue 2. — p. 127-148.
19. Povstenko Y. Time-fractional radial heat conduction in a cylinder and associated thermal stresses // Arch. Appl. Mech., doi: 10.1007/s00419-011-0560-x.
20. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — Москва: Наука, 1979. — 832 с.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе. (Серия: «Справочная математическая библиотека»). — М.: Наука, 1967. — 300 с.
22. Kilbas A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — North-Holland, Mathematics studies 204, 2006, — 524 p.