УДК 517.922:537.8

Устойчивость по Лагранжу и численный метод решения полулинейных дескрипторных уравнений

М. С. Филипковская

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Найдены достаточные условия глобальной разрешимости и устойчивости по Лагранжу полулинейных дескрипторных уравнений с регулярным характеристическим пучком индекса 1. Устойчивость по Лагранжу означает, что все решения уравнения ограничены на всей области определения. Для нелинейной правой части уравнения не требуется выполнения ограничения типа глобального условия Липшица. Предложен численный метод решения дескрипторного уравнения. В качестве приложения рассмотрена математическая модель нелинейного радиотехнического фильтра. Полученные численные решения подтверждают результаты теоретических исследований.

Ключевые слова: *дескрипторное уравнение, существование, устойчивость, ограниченность глобальных решений, численный метод.*

Знайдено достатні умови глобальної розв'язності та стійкості за Лагранжем напівлінійних дескрипторних рівнянь з регулярним характеристичним жмутком індексу 1. Стійкість за Лагранжем означає, що всі розв'язки рівняння обмежені на всій області визначення. Для нелінійної правої частині рівняння не вимагається виконання обмеження типу глобальної умови Ліпшиця. Запропоновано чисельний метод розв'язання дескрипторного рівняння. В якості застосування розглянуто математичну модель нелінійного радіотехнічного фільтра. Отримані чисельні розв'язки підтверджують результати теоретичних досліджень.

Ключові слова: *дескрипторне рівняння, існування, стійкість, обмеженість глобальних розв'язків, чисельний метод.*

The sufficient conditions of the global solvability and the Lagrange stability of semilinear descriptive equations with regularcharacteristic beam of index 1 are found. The Lagrange stability means that all solutions of an equation are bounded over the entire domain. The nonlinear right side of the equation is not required to satisfy the constraints of the global condition of Lipschitz type. The numerical method forsolving the descriptive equations is proposed. The mathematical model of nonlinear radio engineering filter is considered as application. The obtained numerical solutions prove the results of theoretical investigations.

Key words: *descriptor, descriptive equation, existence, stability, limitation of global solutions, numerical method.*

1. Введение

Дифференциально-алгебраические (дескрипторные, вырожденные) уравнения имеют большой спектр практического применения. Полулинейные дескрипторные уравнения возникают в математических моделях экономики, теории управления, гидродинамики [1, 2], при моделировании переходных процессов в электрических цепях [3-5]. Подавляющее число известных в настоящее время работ посвящено исследованию локальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений (см. монографии [1, 5, 6] и библиографии в них). Данная работа посвящена глобальным решениям, поскольку наличие глобального по времени решения гарантирует достаточно долгий срок действия соответствующей реальной системы, что представляет интерес для теории динамических систем и приложений.

Основную проблему для исследования глобальной разрешимости и устойчивости порождает нелинейная функция $f(t,x)$ в правой части уравнения. Решение данной проблемы основано на результатах из [7,8]. Важно отметить, что в доказанных теоремах нелинейная функция может не удовлетворять ограничению типа глобального условия Липшица. Это позволяет применять теоремы к более широкому классу прикладных задач. Другая проблема – наличие необратимой матрицы при производной и, соответственно, присутствие алгебраических связей в рассматриваемой системе.

Для нахождения приближенных решений дескрипторных уравнений используют методы Рунге-Кутты, Розенброка, ε-вложений [1, 5, 6]. При этом вместо исходного уравнения рассматривают жесткую систему $\dot{y} = f(y,z)$, $\varepsilon\dot{z} = g(z,y)$, $\varepsilon \to 0$, которой соответствует приведённая система $\dot{y} = f(y,z)$, $0 = g(z,y)$ индекса 1 (выполнено ограничение $\left\| [g_z(y,z)]^{-1} \right\| \le M$ в окрестности точного решения [6]), либо систему $\dot{x} = f(t,x,y)$, $\varepsilon\dot{y} = g(t,x,y)$, $\varepsilon \to 0$ [1, 5]. Также применяются различные комбинированные методы, требования которых не выполнены для уравнения (3.1) электрической цепи (см. рис.6.1) на любом заданном отрезке $[t_0,T]$. В работе предложен численный метод решения задачи Коши (3.1), (3.2) (см. ниже) на заданном отрезке $[t_0,T]$ с использованием явной схемы Эйлера и формулы Тейлора.

2. Цель работы

Цель работы – получить достаточные условия существования ограниченных глобальных решений и решений с конечным временем определения для полулинейных дескрипторных уравнений, провести численный анализ теоретических результатов исследования. Ограниченность всех решений уравнения представляет собой вид устойчивости, который в [7] назван устойчивостью по Лагранжу.

Рассматриваются следующие задачи. Первая – сформулировать и доказать теоремы о существовании глобального решения полулинейного дескрипторного уравнения, ограниченного на всей области определения, и решения, имеющего конечное время определения. Вторая – разработать численный метод нахождения решений. Третья – применить полученные результаты к исследованию моделей нелинейных электрических цепей.

3. Постановка задачи и вспомогательные сведения

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения:

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t,x), \tag{3.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \ge 0), \tag{3.2}$$

где x, $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $f(t,x):[0,\infty)\times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ – непрерывная функция, $A, B:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ – линейные операторы, вообще говоря, необратимые.

Функция $x(t)$ называется *решением задачи* (3.1), (3.2) на некотором интервале $[t_0,t_1)$, $t_1 \le \infty$, если $x(t) \in C([t_0,t_1),\mathrm{R}^n)$, $Ax(t) \in C^1([t_0,t_1),\mathrm{R}^n)$, $x(t)$ удовлетворяет (3.1) на $[t_0,t_1)$ и (3.2).

Решение $x(t)$ задачи (3.1), (3.2) называется *неограниченно продолжаемым*, если оно может быть продолжено для всех $t \ge t_0$. Если решение $x(t)$ *имеет конечное время определения*, то есть не продолжаемо на весь луч $[t_0,+\infty)$, то существует такое $T > t_0$, что $\lim\limits_{t\to T-0}\|x(t)\| = \infty$ [7].

Предполагается, что $\lambda A + B$ – *регулярный пучок индекса* 1, то есть существует резольвента $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ и выполнено ограничение $\exists C_1, C_2 > 0 : \|R(\lambda)\| \le C_1$, $|\lambda| \ge C_2$, где $R(\lambda)$ – комплексная матрица порядка n и ее норма рассматривается в комплексном пространстве C^n. Существуют вещественные спектральные проекторы $P_i : \mathrm{R}^n \to X_i$, $Q_i : \mathrm{R}^n \to Y_i$ [9], которые могут быть вычислены контурным интегрированием и расщепляют пространство R^n в прямые суммы подпространств:

$$\mathrm{R}^n = X_1 \dot{+} X_2,\ X_i = P_i\mathrm{R}^n,\quad \mathrm{R}^n = Y_1 \dot{+} Y_2, Y_i = Q_i\mathrm{R}^n,\quad i = 1,2. \tag{3.3}$$

Индуцированные операторы $A_i, B_i : X_i \to Y_i$, $i = 1,2$ таковы, что $A_2 = 0$, существуют линейные ограниченные операторы A_1^{-1}, B_2^{-1} и выполнены равенства: $AP_j = Q_jA$, $BP_j = Q_jB$, $j = 1,2$ [9]. Оператор $G = Q_1A + Q_2B$, $GX_j = Y_j$, $j = 1,2$, имеет обратный [10]. Относительно разложения (3.3) любой вектор $x \in \mathrm{R}^n$ единственным образом представим в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = P_1x \in X_1$, $x_2 = P_2x \in X_2$.

Аддитивным разложением единицы E_Z в s-мерном линейном нормированном пространстве Z называется система проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$, $\Theta_k : Z \to Z$ таких, что $\Theta_i\Theta_j = \Theta_j\Theta_i = \delta_{ij}\Theta_i$ (δ_{ij} – символ Кронекера) и $E_Z = \sum\limits_{k=1}^{s}\Theta_k$. Рассмотрим оператор-функцию $\Phi(x)$, отображающую $D \subset X$ в $L(X,Z)$, где X – s-мерное линейное нормированное пространство, $L(X,Z)$ – пространство линейных ограниченных операторов из X в Z). Оператор-функция $\Phi(x): D \to L(X,Z)$ называется *базисно обратимой* на выпуклой оболочке $conv\{u,v\}$ векторов $u, v \in D$, если для любого набора векторов $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset conv\{u,v\}$ и некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ в

s-мерном пространстве Z оператор $\Lambda = \sum_{k=1}^{s}\Theta_k\Phi(\tilde{x}_k) \in L(X,Z)$ обратим, $\Lambda^{-1} \in L(Z,X)$ [8]. Из базисной обратимости оператор-функции $\Phi(x)$ на выпуклой оболочке $conv\{u,v\}$ следует обратимость в любой точке $x \in conv\{u,v\}$ ($x = \lambda v + (1-\lambda)u,\ \lambda \in [0,1]$). Обратное утверждение не верно, кроме случая, когда пространства X, Y одномерны.

Уравнение *устойчиво по Лагранжу* или *устойчиво в смысле Лагранжа*, если все его решения ограничены на всей области определения [7].

4. Ограниченность глобальных решений полулинейных дескрипторных уравнений

Запись $\int_c^{+\infty} f(t)dt = \infty$ означает, что несобственный интеграл от некоторой константы c до бесконечности расходится, $\int_c^{+\infty} f(t)dt < \infty$ – что интеграл сходится.

Теорема 4.11. *Пусть функция* $f(t,x) \in C([0,\infty)\times \mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$ *имеет непрерывную частную производную* $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ *всюду на* $[0,\infty)\times\mathrm{R}^n$, $\lambda A + B$ *– регулярный пучок индекса 1. Пусть*

$$\forall t \ge 0 \exists x \in \mathrm{R}^n : (t,x) \in L_0 = \{(t,x) \in [0,\infty)\times \mathrm{R}^n \mid Q_2[Bx - f(t,x)] = 0)\} \quad (4.1)$$

и для любых $u_i \in X_2$ *таких, что* $(t, P_1x + u_i) \in L_0$, $i = 1,2$, *оператор-функция*

$$\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t, P_1x + u)) - B\right]P_2 \quad (4.2)$$

($\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2))$) *является базисно обратимой на выпуклой оболочке* $conv\{u_1,u_2\}$. *Пусть для некоторого самосопряженного положительного оператора* $H = H^* > 0 \in L(X_1)$ *и числа* $R > 0$ *существуют функции* $k(t) \in C([0,\infty),\mathrm{R})$ *и* $U(v) \in C((0,\infty),(0,\infty))$, *где* $v = 1/2(HP_1x, P_1x)$, $U(v) > 0$ *при* $v > 0$, $\int_c^{+\infty}\frac{dv}{U(v)} = +\infty$, *такие, что для любых* $t \in [0,\infty)$, $\|P_1x\| \ge R$ *выполнено*

$$(HP_1x, G^{-1}[-BP_1x + Q_1 f(t,x)]) \le k(t)U(v). \quad (4.3)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0$ *существует единственное решение* $x(t)$ *задачи Коши* (3.1), (3.2) *на* $[t_0,\infty)$.

Если $\int\limits_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < +\infty$ *и существуют положительные числа* $C, M < \infty$ *такие, что для любых* $t \in [0,\infty)$, $\|P_1 x\| \le M$ *выполнена оценка*

$$\left\|G^{-1}Q_2 f(t, P_1 x)\right\| \le C, \tag{4.4}$$

то уравнение (3.1) *устойчиво по Лагранжу*.

Доказательство. Применяя к уравнению (3.1) проекторы Q_1, Q_2 и оператор G^{-1} получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(P_1 x) + G^{-1}BP_1 x = G^{-1}Q_1 f(t,x), \\ \quad G^{-1}Q_2 f(t,x) - P_2 x = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Обозначим $\dim X_1 = m$, $\dim X_2 = d$, $d = n - m$. Введем операторы $P_m : \mathrm{R}^m \to X_1$, $P_d : \mathrm{R}^d \to X_2$, для которых, очевидно, существуют обратные операторы $P_m^{-1} : X_1 \to \mathrm{R}^m$, $P_d^{-1} : X_2 \to \mathrm{R}^d$. Обозначим $z = P_m^{-1}P_1 x$, $v = P_d^{-1}P_2 x$, $x = P_m z + P_d v$. Уравнения системы (4.5) умножим на P_m^{-1}, P_d^{-1} соответственно и получим эквивалентную (4.5) систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}z + P_m^{-1}G^{-1}BP_m z = P_m^{-1}G^{-1}Q_1 \tilde{f}(t,z,v), & (4.6) \\ P_d^{-1}G^{-1}Q_2 \tilde{f}(t,z,v) - v = 0, & (4.7) \end{cases}$$

где $\tilde{f}(t,z,v) = f(t, P_m z + P_d v)$.

Рассмотрим отображение $F(t,z,v) = P_d^{-1}G^{-1}Q_2 \tilde{f}(t,z,v) - v.$ Оно непрерывно на $[0,\infty) \times ✡^n$ и имеет непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial z}F(t,z,v) = P_d^{-1}G^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x))P_m,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}F(t,z,v) = P_d^{-1}\left[G^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - P_2\right]P_d = P_d^{-1}G^{-1}\Phi(P_d v)P_d,$$

где последнее равенство эквивалентно (4.2) при $u = P_d v$, а $P_d^{-1}P_2 P_d = E_{\mathrm{R}^d}$.

Выберем любые $v_i \in \mathrm{R}^d$ такие, что $(t,z,v_i) \in \tilde{L}_0 = \left\{(t,z,v) \in [0,\infty) \times \mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^d : P_d^{-1}G^{-1}Q_2 \tilde{f}(t,z,v) - v = 0\right\}$, $i = 1,2$, и любые $\tilde{v}_k \in conv\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1,d}$. Из условия базисной обратимости функции $\Phi(u)$ (4.2) следует обратимость действующего в R^d оператора $\Lambda = \sum\limits_{k=1}^{d}\hat{\Theta}_k \dfrac{\partial}{\partial v}F(t,z,\tilde{v}_k) = \sum\limits_{k=1}^{d}\hat{\Theta}_k P_d^{-1}G^{-1}\Phi(P_d\tilde{v}_k)P_d$, где $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^{d}$ – аддитивное разложение единицы в R^d. Таким образом, для любых $(t,z,v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1,2$, функция $\Psi(v) = \frac{\partial}{\partial v} F(t,z,v)$ является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{v_1, v_2\}$. Следовательно, для любой точки $(t,z,v) \in \tilde{L}_0$ существует обратный оператор $\left[\frac{\partial}{\partial v} F(t,z,v)\right]^{-1}$.

Пусть t_* – произвольная точка из $[0,\infty)$. Выберем $z_* \in \mathrm{R}^m$, $v_* \in \mathrm{R}^d$ так, чтобы $(t_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$, это возможно в силу условия (4.1). По теоремам о неявной функции [11, с. 294, 298] существуют окрестности $U_\delta = U_{\delta_1}(t_*) \times U_{\delta_2}(z_*)$, $U_\varepsilon(v_*)$ и единственная функция $v = v(t,z) \in C(U_\delta, U_\varepsilon(v_*))$, непрерывно дифференцируемая по z, такая, что $F(t,z,v(t,z)) = 0$, $(t,z) \in U_\delta$, и $v(t_*, z_*) = v_*$. Данное утверждение выполнено для всех точек $t \in [0,\infty)$, $z \in D_z$, $v \in D_v$, $[0,\infty) \times D_z \times D_v \subset \tilde{L}_0$, где области $D_z \subset \mathrm{R}^m$, $D_v \subset \mathrm{R}^d$ такие, что $P_m^{-1} P_1 x_0 \in D_z$, $P_d^{-1} P_2 x_0 \in D_v$. Определим глобальную функцию $v = \eta(t,z) : [0,\infty) \times D_z \to D_v$ в точке (t_*, z_*) как $\eta(t_*, z_*) = v(t_*, z_*)$. Так как $v(t_*, z_*) = v_*$ и $(t_*, z_*, v_*) \in \tilde{L}_0$, то $(t_*, z_*, \eta(t_*, z_*)) \in \tilde{L}_0$.

Рассмотрим точки $(t,z,v_i) \in \tilde{L}_0$, $i = 1,2$, очевидно, $F(t,z,v_i) = 0$. Проекции $F_k(t,z,v) = \hat{\Theta}_k F(t,z,v)$, $k = \overline{1,d}$, являются функциями со значениями в одномерных пространствах $R_k = \hat{\Theta}_k \mathrm{R}^d$, изоморфных R. Согласно формуле конечных приращений: $F_k(t,z,v_2) - F_k(t,z,v_1) = \frac{\partial}{\partial v} F_k(t,z,\tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $\tilde{v}_k \in conv\{v_1, v_2\}$, $k = \overline{1,d}$. Следовательно, $\hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F_k(t,z,\tilde{v}_k)(v_2 - v_1) = 0$, $k = \overline{1,d}$, откуда получаем: $\Lambda(v_2 - v_1) = 0$, значит, $v_2 = v_1$.

Доказано, что

$$\forall (t,z) \in [0,\infty) \times D_z \, \exists! v \in D_v : (t,z,v) \in \tilde{L}_0, \tag{4.8}$$

и в некоторой окрестности каждой точки $(t_*, z_*) \in [0,\infty) \times D_z$ существует единственное решение $v = \nu(t,z)$ уравнения (4.7), непрерывное по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируемое по z. Значит функция $v = \eta(t,z)$ в этой окрестности совпадает с $\nu(t,z)$ и является решением уравнения (4.7) с соответствующими свойствами гладкости. Покажем, что функция $v = \eta(t,z)$ единственная на всей области определения. Действительно, если бы существовала функция $v = \mu(t,z)$, обладающая в некоторой точке $(t_*, z_*) \in [0,\infty) \times D_z$ теми же свойствами, что и $v = \eta(t,z)$, то, в силу (4.8), $\eta(t_*, z_*) = \mu(t_*, z_*) = v_*$. Следовательно, $\eta(t,z) = \mu(t,z)$ на $[0,\infty) \times D_z$.

Подставим $v = \eta(t,z)$ в (4.6):

$$\frac{d}{dt}z = P_m^{-1}G^{-1}[-BP_m z + g(t,z)], \quad g(t,z) = Q_1\tilde{f}(t,z,\eta(t,z)). \qquad (4.9)$$

В силу свойств функций $\eta(t,z)$ и $Q_1 f(t,x)$, функция $g(t,z) = Q_1 f(t, P_m z + P_d\eta(t,z))$ непрерывна по совокупности переменных t, z и непрерывно дифференцируема по z на $[0,\infty)\times D_z$. Следовательно, для любой начальной точки (t_0,z_0) такой, что $(t_0,z_0,\eta(t_0,z_0))\in\tilde{L}_0$, существует единственное решение $z(t)$ задачи Коши для уравнения (4.9) на некотором интервале $[t_0,\varepsilon)$ с начальным условием $z(t_0)=z_0$. Заметим, что если начальная точка $(t_0,x_0)\in L_0$ и $x_0 = P_m z_0 + P_d\eta(t_0,z_0)$, то начальная точка $(t_0,z_0,\eta(t_0,z_0))\in\tilde{L}_0$.

Введем функцию $V(P_1x) = \frac{1}{2}(HP_1x, P_1x) = \frac{1}{2}(HP_m z, P_m z) = \frac{1}{2}\left(P_m^* HP_m z, z\right) = \frac{1}{2}(\hat{H}z,z) = \hat{V}(z)$, где $\hat{H} = P_m^* HP_m$ и H – оператор из (4.3). Градиент функции $\hat{V}$ равен $grad\hat{V}(z) = \hat{H}z$.

Поскольку $(HP_m z, G^{-1}[-BP_m z + g(t,z)]) = (\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_m z + g(t,z)])$, то согласно (4.3) существует $\hat{R}>0$ такое, что

$$(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_m z + g(t,z)]) \le k(t)U(\hat{V}), \quad t\ge 0, \ \|z\|\ge\hat{R}, \qquad (4.10)$$

где $k(t)\in C([0,\infty),\mathrm{R})$, $U(v)\in C((0,\infty),(0,\infty))$, $U(v)>0$ при $v>0$, $\int\limits_c^{+\infty}\frac{dv}{U(v)} = +\infty$.

С учетом (4.10), производная функции $\hat{V}(z) = \frac{1}{2}(\hat{H}z,z)$ в силу системы (4.9) удовлетворяет при всех $t\ge 0$ и z таких, что $\|z\|\ge\hat{R}$, оценке:

$$\dot{\hat{V}}\Big|_{(4.9)} = (\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_m z + g(t,z)]) \le k(t)U(\hat{V}).$$

Из свойств функций $k(t)$, $U(v)$ следует, что неравенство $\dot{v}\le k(t)U(v)$, $t\ge 0$ не имеет ни одного положительного решения с конечным временем определения. Тогда по теореме [7, Гл. IV, Теорем XIII] каждое решение уравнения (4.9) неограниченно продолжаемо. Найденное глобальное решение $z(t)$ уравнения (4.9) определено на всем $t_0\le t<\infty$. Следовательно, функция $x(t) = P_m z(t) + P_d\eta(t,z(t))$ будет решением задачи Коши (3.1), (3.2) на $[t_0,\infty)$.

Проверим, что каждое локальное решение $x(t)$, $t\in[t_0,\varepsilon)$ уравнения (3.1) допускает единственное продолжение на $[t_0,\infty)$. Из доказанного выше следует, что неограниченно продолжаемое решение $x(t)$ задачи Коши (3.1), (3.2) единственно на некотором интервале $[t_0,\varepsilon)$. Предположим, что решение не единственно на $[t_0,\infty)$. Тогда существует $t_*\ge\varepsilon$ и два различных неограниченно продолжаемых решения $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ с общим значением $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, x_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (3.1) с начальным значением $x(t_*) = x_*$, что противоречит предположению.

Если $\int\limits_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < +\infty$, то неравенство $\dot{v} \le k(t)U(v)$, $t \ge 0$ не имеет ни одного положительного неограниченного решения. Тогда по теореме [7, Гл. IV, Теорем XV] уравнение (4.9) устойчиво по Лагранжу. Следовательно,

$$\exists M < \infty \forall t \in [0,\infty) : \|P_m z(t)\| \le M. \tag{4.11}$$

Рассмотрим отображение $F(t,z,v) = P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t,z,v) - v$, введенное выше. По формуле конечных приращений: $F_k(t,z,v) - F_k(t,z,0) = \frac{\partial}{\partial v} F_k(t,z,\tilde{v}_k)v$, $\tilde{v}_k = \theta v \in conv\{0,v\}$, $\theta \in (0,1)$, $F_k(t,z,v) = \hat{\Theta}_k F(t,z,v)$, $k = \overline{1,d}$, $\{\hat{\Theta}_k\}_{k=1}^{d}$ – аддитивное разложение единицы в R^d. Суммируя полученные равенства по k получаем: $F(t,z,v) - F(t,z,0) = \Lambda v$, $\Lambda = \sum\limits_{k=1}^{d} \hat{\Theta}_k \frac{\partial}{\partial v} F(t,z,\tilde{v}_k)$. Для любых v таких, что $(t,z,v) \in \tilde{L}_0$, оператор $\Lambda \in L(\mathrm{R}^d)$ обратим на $conv\{0,v\}$ и $\Lambda^{-1} \in L(\mathrm{R}^d)$. Поскольку для функций $v = \eta(t,z(t))$, $z = z(t)$ отображение $F(t,z(t),\eta(t,z(t))) = 0$ и $F(t,z(t),0) = P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t,z(t),0)$, то $\eta(t,z(t)) = -\Lambda^{-1} P_d^{-1} G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t,z(t),0)$. Учитывая, что Λ^{-1} – ограниченный оператор, существует положительное число $N < \infty$ такое, что $\|\eta(t,z(t))\| \le N \|P_d^{-1}\| \|G^{-1} Q_2 \tilde{f}(t,z(t),0)\|$ для любых $t \in [t_0,\infty)$. Тогда из (4.11), (4.4) следует, что $\forall t \in [t_0,\infty) : \|\eta(t,z(t))\| \le NC \|P_d^{-1}\|$.

Так как для всех $t \in [t_0,\infty)$ выполнена оценка $\|x(t)\| = \|P_m z(t) + P_d \eta(t,z(t))\| \le M + NC$, решение уравнения (3.1) глобально ограниченно. Это выполнено для любой начальной точки $(t_0,x_0) \in L_0$. Значит, уравнение (3.1) устойчиво по Лагранжу. Теорема доказана.

Теорема 4.2.2 *Пусть функция* $f(t,x) \in C([0,\infty) \times \mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$ *имеет непрерывную частную производную* $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ *всюду на* $[0,\infty) \times \mathrm{R}^n$, $\lambda A + B$ *– регулярный пучок индекса 1. Пусть выполнено* (4.1) *и для любых* $u_i \in X_2$ *таких, что* $(t, P_1 x + u_i) \in L_0$, $i = 1,2$, *оператор-функция* (4.2) *является базисно обратимой на выпуклой оболочке* $conv\{u_1,u_2\}$. *Пусть некоторое множество* $\Omega \subset X_1$ *обладает тем свойством, что каждая компонента* $P_1 x(t)$ *решения* $x(t)$, *начинающаяся в этом множестве, все время остается в нем. Пусть для* *некоторого самосопряженного положительного оператора* $H = H^* > 0 \in L(X_1)$ *и числа* $R > 0$ *существуют функции* $k(t) \in C([0,\infty), \mathrm{R})$, $U(v) \in C((0,\infty),(0,\infty))$, *где* $v = 1/2(HP_1x, P_1x)$, $U(v) > 0$ *при* $v > 0$, *такие, что* $\int\limits_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} < +\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} k(t)dt = +\infty$ *и*

$$(HP_1x, G^{-1}[-BP_1x + Q_1 f(t,x)]) \geq k(t)U(v) \quad \forall\, t \geq 0 \;\forall\, P_1x \in \Omega. \qquad (4.12)$$

Тогда для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_0 \bigcap \Omega$ *существует единственное решение* $x(t)$ *задачи Коши* (3.1), (3.2) *на некотором конечном интервале* $[t_0, T)$ *и это решение имеет конечное время определения.*

Доказательство. Начало доказательства аналогично доказательству теоремы 4.1. Далее внесены следующие изменения.

Выпишем полученное выше дифференциальное уравнение (4.9):

$$\frac{d}{dt}z = P_m^{-1}G^{-1}[-BP_mz + g(t,z)], \quad g(t,z) = Q_1\tilde{f}(t,z,\eta(t,z)).$$

Как и ранее, для любой начальной точки (t_0, z_0) такой, что $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, существует единственное решение $z(t)$ задачи Коши для уравнения (4.9) на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

Учитывая связь $P_1x = P_mz$, по условию теоремы каждое решение $z(t)$ уравнения (4.9), начинающееся в множестве $\hat{\Omega} = \{z \in \mathrm{R}^m \mid P_mz \in \Omega\} = P_m^{-1}\Omega$, все время остается в нем. Очевидно, функция $\hat{V}(z) = \frac{1}{2}(\hat{H}z, z)$ ($\hat{H} = P_m^*HP_m$, H – оператор из (4.12)) положительна при всех $z \in \hat{\Omega}$ и $t \geq 0$.

Поскольку $(HP_mz, G^{-1}[-BP_mz + g(t,z)]) = (\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_mz + g(t,z)])$, то согласно (4.12) получаем:

$$(\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_mz + g(t,z)]) \geq k(t)U(\hat{V}), \;\; \forall t \geq 0 \;\forall z \in \hat{\Omega}, \qquad (4.13)$$

где $k(t) \in C([0,\infty), \mathrm{R})$, $U(v) \in C((0,\infty),(0,\infty))$, $\int\limits_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} < +\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} k(t)dt = +\infty$, $U(v) > 0$ при $v > 0$. С учетом (4.13), производная функции $\hat{V}(z)$ в силу системы (4.9) удовлетворяет для всех $t \geq 0$ и $z \in \hat{\Omega}$ следующей оценке:

$$\dot{\hat{V}}\Big|_{(4.9)} = (\hat{H}z, P_m^{-1}G^{-1}[-BP_mz + g(t,z)]) \geq k(t)U(\hat{V}).$$

Из свойств функций $k(t)$, $U(v)$ следует, что неравенство $\dot{v} \geq k(t)U(v)$, $t \geq 0$ не имеет ни одного неограниченно продолжаемого решения. Тогда по теореме [7, Гл. IV, Теорем XIV] каждое решение $z(t)$ уравнения (4.9), удовлетворяющее условию $z(t_0) = z_0$, $z_0 \in \hat{\Omega}$, $(t_0, z_0, \eta(t_0, z_0)) \in \tilde{L}_0$, имеет конечное время определения. То есть, по определению, существует $T > 0$ такое, что

$\lim\limits_{t \to T-0} \|z\| = \infty$. Найденное решение $z(t)$ уравнения (4.9) определено на некотором конечном интервале $[t_0, T)$. Напомним, что функция $\eta(t,z)$ определена на $[0,\infty) \times D_z$, непрерывна по (t,z) и непрерывно дифференцируема по z. Следовательно, функция $x(t) = P_m z(t) + P_d \eta(t, z(t))$ будет решением задачи Коши (3.1), (3.2) на $[t_0, T)$.

Проверим, что каждое решение $x(t)$, $t \in [t_0, T)$ уравнения (3.1) единственно. Из доказанного выше следует, что решение $x(t)$ задачи Коши (3.1), (3.2) единственно на некотором интервале $[t_0, \varepsilon)$. Предположим, что решение не единственно на $[t_0, T)$. Тогда существует точка $\varepsilon \le t_* < T$ и два различных решения $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ с общим значением $x_* = x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$. Возьмем точку (t_*, x_*) в качестве начальной, тогда на некотором интервале $[t_*, \varepsilon_1)$ должно существовать единственное решение уравнения (3.1) с начальным значением $x(t_*) = x_*$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

5. Построение численного метода

Пусть выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши (3.1), (3.2) на $[t_0, \infty)$ из теоремы 4.1. Будем искать решение задачи Коши на отрезке $[t_0, T]$. Введем равномерную сетку $\{t_i = t_0 + ih,\, i = 0,\dots,N,\, t_N = T\}$ с шагом $h = \dfrac{T - t_0}{N}$. Уравнение (3.1) эквивалентно системе (4.5). Обозначим $z = P_1 x$, $y = P_2 x$, тогда система (4.5) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} + G^{-1}Bz = G^{-1}Q_1 f(t, z+y), & (5.1)\\ y = G^{-1}Q_2 f(t, z+y). & (5.2) \end{cases}$$

Заменив в уравнении (5.1) производную в точке t_i конечной разностью $\dfrac{d}{dt} z(t_i) \approx \dfrac{z(t_{i+1}) - z(t_i)}{h}$, получим разностное уравнение, соответствующее явной схеме Эйлера [12]. Нелинейную функцию в правой части уравнения (5.2) аппроксимируем по формуле Тейлора: $G^{-1}Q_2 f(t_{i+1}, z_{i+1} + y_{i+1}) \approx$ $\approx G^{-1}Q_2 f(t_{i+1}, z_{i+1} + y_i) + G^{-1}Q_2 \dfrac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + y_i)(y_{i+1} - y_i)$. Значения приближенного решения задачи (3.1), (3.2) в узлах t_i обозначим через $x_i = z_i + y_i$, $i = 0,\dots,N$, где $z_i = P_1 x_i$, $y_i = P_2 x_i$. Отметим, что из условия базисной обратимости оператор-функции (4.2) в теореме 4.1 следует существование обратного оператора $\left[E - G^{-1}Q_2 \dfrac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + y_i)\right]^{-1}$, где E – единичная матрица порядка n. Выбирая начальные значения z_0, y_0 так, чтобы выполнялось условие согласования $y_0 = G^{-1}Q_2 f(t_0, z_0 + y_0)$, получаем разностную схему для определения численного решения:

$$x_0 = z_0 + y_0,$$

$$z_{i+1} = (E - hG^{-1}B)z_i + hG^{-1}Q_1 f(t_0 + ih, z_i + y_i),$$

$$y_{i+1} = \left[E - G^{-1}Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_0 + (i+1)h, z_{i+1} + y_i)\right]^{-1} G^{-1}Q_2 \times$$

$$\times\left[f(t_0 + (i+1)h, z_{i+1} + y_i) - \frac{\partial}{\partial x} f(t_0 + (i+1)h, z_{i+1} + y_i) y_i \right],$$

$$x_{i+1} = z_{i+1} + y_{i+1}, \quad i = 0,\ldots,N-1.$$

Предложенный численный метод аппроксимирует задачу Коши (3.1), (3.2) с первым порядком относительно h.

6. Признаки устойчивости по Лагранжу одной модели нелинейного четырехполюсного фильтра

На рис.6.1 изображен четырехполюсный радиотехнический фильтр с нелинейными сопротивлениями φ_1, φ_2 и проводимостями h_1, h_2, линейными сопротивлениями r_1, r_2, проводимостью g, индуктивностью L и емкостью C.

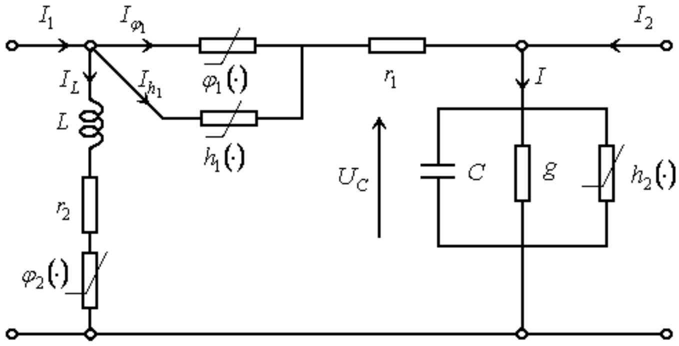

Рис.6.1. Схема электрической цепи четырехполюсника

Предполагается, что внешние токи $I_1(t)$, $I_2(t) \in C([0,\infty), \mathrm{R})$ заданы, параметры L, C, r_1, r_2, g являются положительными и вещественными, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $h_1(y)$, $h_2(y) \in C^1(\mathrm{R},\mathrm{R})$.

Уравнения Кирхгофа для данной цепи имеют вид: $I_1 = I_{\varphi_1} + I_{h_1} + I_L$, $I_L = I_{r_2} = I_{\varphi_2}$, $I_{r_1} = I_{\varphi_1} + I_{h_1}$, $I = I_2 + I_{r_1}$, $I = I_C + I_g + I_{h_2}$, $U_{\varphi_1} = U_{h_1}$, $U_C = U_g = U_{h_2}$, $U_{\varphi_2} + U_{r_2} + U_L - U_{\varphi_1} - U_{r_1} = U_C$. Ток и напряжение на каждом элементе связаны следующим образом: $U_{r_k} = r_k I_{r_k}$, $U_{\varphi_k} = \varphi_k(I_{\varphi_k})$, $I_{h_k} = h_k(U_{h_k})$, $k = 1,2$, $I_g = gu_g$, $U_L = L\dfrac{dI_L}{dt}$, $I_C = C\dfrac{dU_C}{dt}$.

Из приведенных уравнений исключаются все переменные, кроме $x_1 = I_{\varphi_1}$, $x_2 = I_L$, $x_3 = U_C$. Обозначим $\gamma(x_1) = h_1(\varphi_1(x_1))$ и получим систему:

$$L\frac{d}{dt}x_2 - r_1x_1 + r_2x_2 - x_3 = \varphi_1(x_1) + r_1\gamma(x_1) - \varphi_2(x_2), \tag{6.1}$$

$$C\frac{d}{dt}x_3 - x_1 + gx_3 = I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3), \tag{6.2}$$

$$x_1 + x_2 = I_1(t) - \gamma(x_1), \tag{6.3}$$

Векторная форма системы имеет вид (3.1), где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathrm{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1\gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix},$$

$\lambda A + B$ – регулярный пучок индекса 1. Вид матриц P_1, P_2, Q_1, Q_2, G^{-1} показан в [3]. Обозначим $z = P_1x = (-x_2, x_2, x_3)^T = (z_1, z_2, z_3)^T$, $u = P_2x = (x_1 + x_2, 0, 0)^T = (u_1, u_2, u_3)^T$ и выпишем подпространства $X_1 = Lin\{p_1, p_2\}$, $X_2 = Lin\{p_3\}$, $p_1 = (-1,1,0)^T$, $p_2 = (0,0,1)^T$, $p_3 = (1,0,0)^T$.

Уравнение $Q_2[Bx - f(t,x)] = 0$ эквивалентно (6.3). С учетом новых обозначений, условие (4.2) выполнено, если $\forall t \geq 0\ \exists z_1, u_1 \in \mathrm{R}$ такие, что

$$u_1 = I_1(t) - \gamma(z_1 + u_1). \tag{6.4}$$

В координатном базисе пространства R^3 рассмотрим функцию

$$\hat{\Phi}(u) = \left[\frac{\partial Q_2 f(t, z+u)}{\partial x} - B\right]P_2 = \left(\gamma'(z_1 + u_1) + 1\right)\begin{pmatrix} r_1 & r_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma'(x_1) = \frac{d\gamma(x_1)}{dx_1}. \tag{6.5}$$

Найдем ограничения, при которых для любых $v, w \in X_2$, удовлетворяющих (6.4), сужение функции (6.5) на X_2 является базисно обратимым оператором на $conv\{v, w\}$. Поскольку пространства X_2, Y_2 одномерны, базисная обратимость эквивалентна обратимости, которая имеет место, если $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \neq -1$, где $z_1 \in \mathrm{R}$, $\tilde{u} \in conv\{v, w\}$.

Выберем $H = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 2C \end{pmatrix}$. Тогда $(HP_1x, G^{-1}[-BP_1x + Q_1f(t,x)]) =$

$= 2[-(r_1 + r_2)x_2^2 - gx_3^2 - x_2\varphi_2(x_2) - x_3h_2(x_3) + x_2\varphi_1(x_1) + r_1x_2I_1(t) + x_3I_2(t)]$.

Для любых $t \in [0, \infty)$, $|z_1| \leq M_1$ выполнена оценка

$$\left\|G^{-1}Q_2 f(t, P_1x)\right\| \leq \sup_{t\in[0,\infty)} \max_{|z_1|\leq M_1} \left|I_1(t) - \gamma(z_1)\right|.$$

Итак, пусть для любого $t \geq 0$ существуют $z_1, u_1 \in \mathrm{R}$ такие, что выполнено (6.4); для любых $v, w \in X_2$, удовлетворяющих (6.4), $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \neq -1$ при любом $\tilde{u} \in conv\{v, w\}$, $z_1 \in \mathrm{R}$; для некоторого $R > 0$ существуют функции $k(t) \in C([0,\infty), \mathrm{R})$, $U(v) \in C((0,\infty),(0,\infty))$, где $v = Lx_2^2 + Cx_3^2$, $U(v) > 0$ при $v > 0$ и $\int\limits_c^{+\infty} \frac{dv}{U(v)} = +\infty$, такие, что для любых $t \in [0,\infty)$, $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R$ выполнено
$-(r_1 + r_2)x_2^2 - gx_3^2 - x_2\varphi_2(x_2) - x_3h_2(x_3) + x_2\varphi_1(x_1) + r_1x_2I_1(t) + x_3I_2(t) \leq k(t)U(v)$ тогда по теореме 4.1 для всякой начальной точки $(t_0, x_0) \in [0,\infty) \times \mathrm{R}^3$, удовлетворяющей (6.3), существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (3.1), (3.2) на полуоси $[t_0, \infty)$. Если $\int\limits_{t_0}^{+\infty} k(t)dt < +\infty$ и существуют положительные числа $C, M < \infty$ такие, что $\sup\limits_{t \in [0,\infty)} \max\limits_{|z_1| \leq M_1} \left| I_1(t) - \gamma(z_1) \right| \leq C$, то уравнение (3.1) устойчиво по Лагранжу. Напомним, что устойчивость по Лагранжу уравнения означает глобальную ограниченность всех его решений.

Рассмотрим несколько частных случаев, которые встречаются в реальных радиотехнических системах:

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^3,\ \varphi_2(y) = \alpha_2 y^3,\ h_2(y) = \alpha_3 y^3,\ \gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^9,\ \alpha_k > 0; \quad (6.6)$$

$$\begin{gathered} \varphi_1(y) = \alpha_1 \sin(y),\ \varphi_2(y) = \alpha_2 \sin(y),\ h_2(y) = \alpha_3 \cos(y), \\ \gamma(y) = 0.5\cos(\cos(y)),\ \ \alpha_k > 0,\ y \in \mathrm{R} \end{gathered} \quad (6.7)$$

Для любой начальной точки (t_0, x_0), удовлетворяющей (6.4), существует единственное решение задачи Коши (3.1), (3.2) с нелинейными функциями вида (6.6) или (6.7) на полуоси $[t_0, \infty)$. Решение будет ограниченным, если существует $M_1 = \sup\limits_{t \in [0,\infty)} \left| I_1(t) \right| < \infty$ и существует $M_2 = \sup\limits_{t \in [0,\infty)} \left| I_2(t) \right| < \infty$ или $\int\limits_{t_0}^{+\infty} |I_2(t)| dt < +\infty$. В частности, эти требования выполнены для входных токов вида $I_k(t) = b_k t^{-n_k}$, $n_k \in \mathrm{N}$, экспоненциальных и синусоидальных токов

$$I_k(t) = b_k e^{-a_k t},\ I_k(t) = b_k e^{-(t-a_k)^2/\sigma_k^2},\ I_k(t) = b_k \sin(a_k t + \theta_k), \quad (6.8)$$

a_k, b_k, $\sigma_k \in \mathrm{R}$, $\theta_k \in [0,2\pi]$, $k = 1,2$. Для токов $I_k(t) = b_k t$, $I_k(t) = b_k t^2$, $k = 1,2$, глобальные решения существуют, но не являются ограниченными. Графики численных решений для рассмотренных частных случаев представлены ниже.

7. Нахождение численных решений для модели нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим электрическую цепь четырехполюсника (рис.6.1) с параметрами $L = 0.5$ нГн, $C = 0.4$ пФ, $r_1 = 0.02$ Ом, $r_2 = 0.01$ Ом, $g = 0.2$ Ом$^{-1}$, использованными в [4]. Будем искать численные решения с помощью предложенного метода на интервале времени от 0 до 500 пс. Реализация численного метода производится в системе MATLAB.

Для нелинейных сопротивлений и проводимостей (6.6) с $\alpha_k = 1$ и внешних токов $I_1(t) = 3e^{-(t-22)^2/9}$, $I_2(t) = 2e^{-(t-22)^2/10}$ найдено численное решение с начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0, 1.323510^{-23}, 0)^T$. Полученные графики представлены на рис.7.1-7.3.

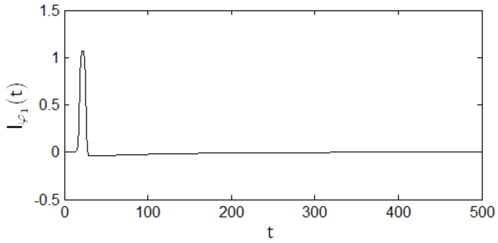

Рис.7.1. График тока $I_{\varphi_1}(t)$

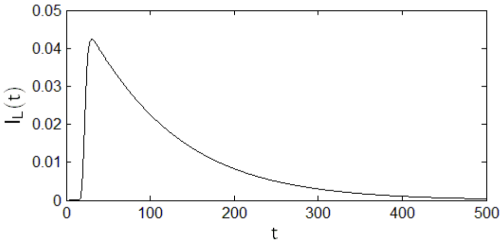

Рис.7.2. График тока $I_L(t)$

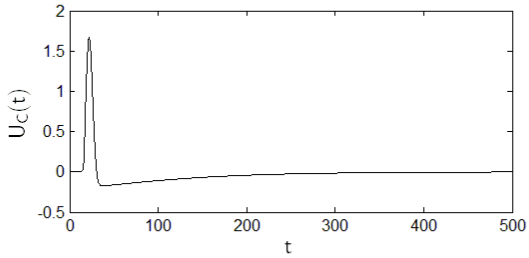

Рис.7.3. График напряжения $U_C(t)$

Графики решения для электрической цепи с нелинейностями вида (6.7), $\alpha_k = 1$, внешними токами $I_1(t) = 50\sin(0.5t - 1.6)$, $I_2(t) = 50\sin(t)$ и начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0, -50.2488, 0)^T$ представлены на рис.7.4-7.6.

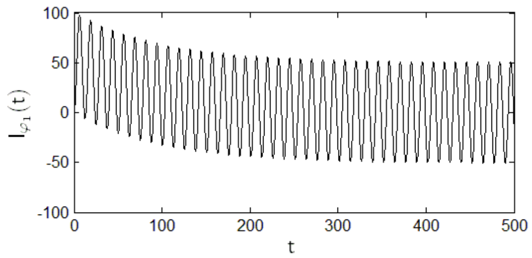

Рис.7.4. График тока $I_{\varphi_1}(t)$

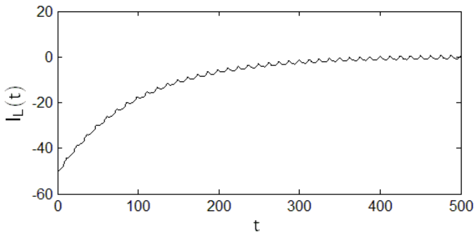

Рис.7.5. График тока $I_L(t)$

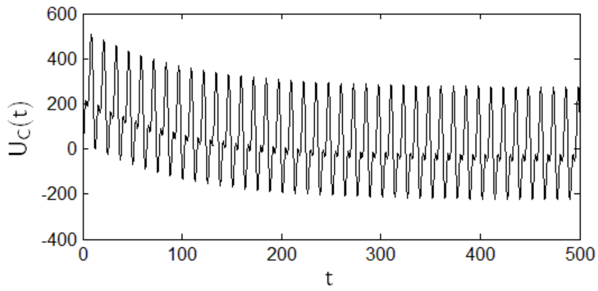

Рис.7.6. График напряжения $U_C(t)$

Анализ графиков, представленных на рис.7.1-7.6, показывает, что для системы (6.1)-(6.3) с экспоненциальными или синусоидальными токами вида (6.8), а также сопротивлениями и проводимостями вида (6.6), (6.7), существуют глобальные решения, ограниченные на всей области определения. Следовательно, вывод об устойчивости по Лагранжу, полученный с помощью применения теоремы 4.1, подтвержден численным экспериментом.

Графики решения для электрической цепи с нелинейными сопротивлениями и проводимостями (6.6), $\alpha_k = 0.1$, внешними токами $I_1(t) = 0.1t$, $I_2(t) = 0.001t^2$ и начальными значениями $t_0 = 0$, $x_0 = (0,0,0)^T$ представлены на рис. 7.7-7.9.

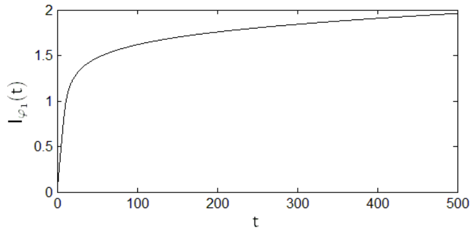

Рис.7.7. График тока $I_{\varphi_1}(t)$

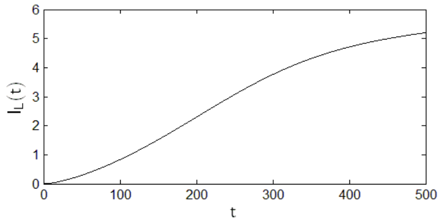

Рис.7.8. График тока $I_L(t)$

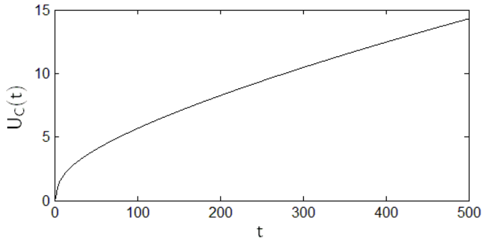

Рис.7.9. График напряжения $U_C(t)$

Анализ графиков на рис.7.7-7.9 показывает, что для системы (6.1)-(6.3) с данными токами, сопротивлениями и проводимостями существует глобальное решение, возрастающее с ростом времени и, следовательно, неограниченное. Применение теоремы 4.1 дает аналогичный результат.

8. Выводы

Для полулинейного дескрипторного уравнения (3.1) получены теоремы, позволяющие доказать существование и ограниченность глобальных решений либо их отсутствие (решения имеют конечное время определения). С помощью разработанного метода получены численные решения для моделей электрических цепей. Анализ решений подтверждает результаты теоретических исследований. Строгое доказательство сходимости численного метода не представлено в связи с ограничением объема статьи и требует отдельного изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. – Zurich: European Mathematical Society, 2006. – 256 p.
2. Bender D. J., Laub A. J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1987. – Vol. AC-32, № 6. – P. 672-688.
3. Руткас А. Г. Глобальная разрешимость дифференциально-алгебраических уравнений нелинейных электрических цепей / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 4 (114). – С. 131-142.
4. Rutkas A. G. Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmisson lines and lumped elements / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // Proceedings of IEEE 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals. – Sevastopol, Ukraine, 2010. – P. 102-104.
5. Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. – USA: SIAM, 1996. – 314 p.
6. Hairer E., Lubich C. Roche M. The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge-Kutta methods. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 140 p.
7. Ла-Салль Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. – М. : Мир, 1964. – 168 с.
8. Руткас А. Г. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 1 (111). – С. 135-145.
9. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения Ax'(t)+Bx(t)=f(t) / А. Г. Руткас // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 11. – С. 1996-2010.
10. Vlasenko L. Implicit Linear Time-dependent Differential-difference Equations and Applications. / L. Vlasenko // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2000. – 23. – P. 937-948.
11. Шварц Л. Анализ. Т. 1 / Л. Шварц.–. – М.: Мир, 1972. – 822 с.
12. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

Надійшла у першій редакції 15.05.2015, в останній - 14.06.2015.