

УДК 519.64, 539.3

Моделирование дифракции SH -волн на неоднородностях методами сингулярных интегральных уравнений

А. М. Назаренко

Сумской государственной университет, Украина

Методами дискретных особенностей и механических квадратур численного решения сингулярных интегральных уравнений исследуются задачи дифракции волн сдвига на системе замкнутых неоднородностей в полупространстве. Для получения достаточной точности привлекаются высокоэффективные алгоритмы компьютерного моделирования. Эффективность методов численной реализации интегральных уравнений проверяется на примере дифракции гармонических SH -волн на системе полостей и включений эллиптического поперечного сечения.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, системы неоднородностей, численная реализация, точность вычислений, высокоэффективные алгоритмы.

Методами дискретних особливостей і механічних квадратур чисельного розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь досліджуються задачі дифракції хвиль зсуву на системі замкнутих неоднорідностей у півпросторі. Для отримання достатньої точності залучаються високоефективні алгоритми комп'ютерного моделювання. Ефективність методів чисельної реалізації інтегральних рівнянь перевіряється на прикладі дифракції гармонічних SH -хвиль на системі порожнин та включень еліптичного поперечного перерізу.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, системи неоднорідностей, чисельна реалізація, точність обчислень, високоефективні алгоритми.

The problem of diffraction of shear waves in the closed system of irregularities in the half-space is studied by the method of discrete irregularities and mechanical quadrature for numerical solution of singular integral equations. Computer simulation is involved to achieve sufficiently high algorithm accuracy. Effectiveness of numerical implementation of these methods is checked by solving the example of integral equations for the case of harmonic SH-waves diffraction against the system of cavities and inclusions in elliptical cross-section.

Key words: singular integral equations of irregularities, numerical implementation, the calculation accuracy, highly efficient algorithms.

1. Введение

Для исследования обратных задач математической физики, к которым сводится управление механическими характеристиками динамических систем с усложненными свойствами, необходимо, как правило, строить трудоемкие аналитические процедуры и выполнять ресурсоемкие вычислительные алгоритмы. К тому же, при определении, например, оптимальных геометрических характеристик системы неоднородностей в неограниченных и ограниченных средах при воздействии стационарных динамических нагрузок так, чтобы максимальные напряжения были не выше заданных, краевая задача будет некорректно поставленной.

Однако может быть построена компьютерная модель решения значительного числа прямых задач. И указанный класс задач может быть оценочно исследован численно путем прямого моделирования поведения таких систем. Тогда задачи управления, а также идентификации геометрических или волновых

характеристик могут быть исследованы приближенно методом интерполяции. При этом, если результаты решения прямых задач будут выполнены с хорошей точностью, достоверность интерполирования будет вполне удовлетворительной. Тем более, что получаемые даже начальные оценки управления таких малоисследованных систем позволят избежать разрушений конструкций и значительных затрат.

Среди аналитических методов решения прямых задач теории дифракции в случае произвольной формы u отражающих неоднородностей наиболее применимым для разработки кластерных алгоритмов является метод интегральных уравнений [1-3]. Важным преимуществом этого метода является сокращение числа пространственных переменных. В связи с тем, что моделирование динамических взаимодействий упругих волн с системой неоднородностей требует привлечения больших объемов вычислений и значительных ресурсов цифровой памяти, особое значение приобретают различные эффективные численные методы [4, 5] и высокоэффективные алгоритмы компьютерного моделирования [6, 7]. Тем более, что такие задачи являются все еще малоисследованными.

В настоящей работе исследуются двумерные задачи дифракции волн сдвига (SH-волны) на системе замкнутых неоднородностей различного типа. Краевые задачи сводятся к системам сингулярных интегральных уравнений первого рода и уравнений Фредгольма второго рода. Численная реализация сингулярных интегральных уравнений осуществляется методами дискретных особенностей [4, 8] и механических квадратур [2, 5]. С помощью компьютерного моделирования сравнивается эффективность этих методов и рассчитывается напряженное состояние на контурах включений различного типа и полостей с привлечением высокоэффективных алгоритмов.

2. Постановка задачи

Под продольным сдвигом (или антиплоской деформацией) понимают напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, нагруженного по боковой поверхности усилиями, направленными и равномерно распределенными вдоль образующей. В предположении, что ось цилиндра направлена вдоль оси Ox_3 , отличными от нуля являются две компоненты тензора напряжений τ_{13} , τ_{23} и перемещение $u_3(x_1, x_2, t)$, причем [9]

$$\Delta u_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu} f, \quad \tau_{13} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \tau_{23} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (1)$$

где ρ – плотность, μ – модуль сдвига среды, f – объемная сила, t – время, Δ – оператор Лапласа.

Рассмотрим упругое полупространство $x_2 \geq 0$, содержащее систему бесконечно длинных вдоль оси Ox_3 однородных цилиндров, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми контурами (без общих точек) L_j ($j = \overline{1, M}$) типа Ляпунова. Пусть L – совокупность этих контуров и

положительное направление выбрано так, что при движении вдоль L область D_1 (матрица) остается слева (рис. 1).

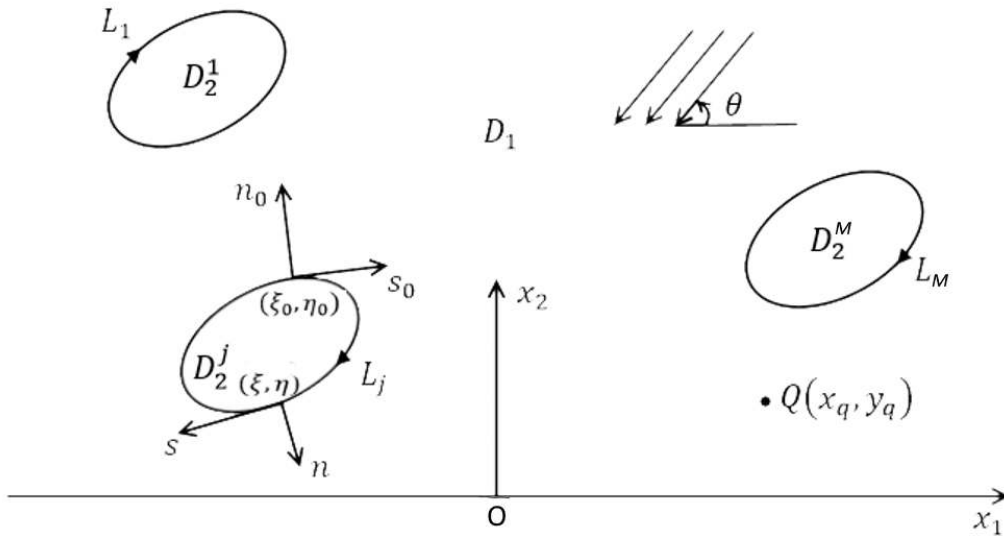


Рис. 1. Система неоднородностей в полупространстве

Будем считать, что внутренности цилиндров (область D_2) представляют собой полости, неподвижные, жесткие (впаянные в полупространство) или упругие включения. Граница полупространства $x_2 = 0$ предполагается заземленной ($A=1$) или свободной от сил ($A=-1$). Источники возбуждающего волнового поля полагаем заданными вне неоднородностей, т.е. в области D_1 . В качестве такого источника может быть излучающаяся из бесконечности гармоническая волна сдвига, нормаль, к фронту которой составляет угол θ с осью Ox_1 или сосредоточенный в точке $Q(x_q, y_q)$ гармонический источник. В частности, источник может быть расположен на свободной от сил границе полупространства ($y_q = 0$).

Предполагаем, что зависимость от времени всех величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние, выражается множителем $e^{-i\omega t}$ (ω – частота колебаний, $i^2 = -1$). Тогда амплитуды падающей W_0 и отраженной от границы полупространства V_0 волн представим в виде:

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)}, \quad V_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)}, \quad \tau = \text{const} \quad (2)$$

в случае набегающей из бесконечности волны сдвига ($NV = 1$) и

$$W_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q), \quad V_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q^*), \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad (3)$$

$$r_q = |z - z_q|, \quad r_q^* = |z - \bar{z}_q|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad z_q = x_q + iy_q,$$

если в матрице в точке $Q(x_q, y_q)$ действует сосредоточенный источник ($NV = 2$).

В результате взаимодействия волн W_0 и V_0 с цилиндрами в области D_1 возникает рассеянное волновое поле W_1 . Общее поле перемещений в матрице запишем в виде

$$W = W_1 + V_0, \quad V_0 = W_0 - AV_0, \quad (x_1, x_2) \in D_1. \quad (4)$$

Если D_2 – совокупность упругих включений, то для проникающего внутрь цилиндров волнового поля положим $W = W_2$. Из волнового уравнения (1) вытекает, что амплитуды перемещений W_1 и W_2 в областях D_1 и D_2 удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta W_k + \gamma_k^2 W_k = 0, \quad \gamma_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad c_k = \sqrt{\frac{\mu_k}{\rho_k}}, \quad (5)$$

где ρ_k и μ_k – плотность и модуль сдвига матрицы ($k=1$) и упругих включений ($k=2$), c_k – скорость волны сдвига в области D_k .

Сформулируем теперь граничные условия на контурах неоднородностей.

1. Если D_2 – совокупность упругих включений, то на контурах L_j ($j = \overline{1, M}$) будем требовать выполнения условий сопряжения, вытекающих из непрерывности амплитуд перемещений и сдвиговых напряжений на границе раздела двух сред. В этом случае граничные условия на L таковы (n_0 – положительная нормаль к L):

$$W_2 = W_1 + V_0, \quad \mu_2 \frac{\partial W_2}{\partial n_0} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0). \quad (6)$$

Соотношение (6) следует понимать как равенство граничных значений соответствующих величин при стремлении точки наблюдения к L из области D_1 или D_2 .

2. В случае, когда D_2 – совокупность неподвижных включений, на L имеем

$$W_1 + V_0 = 0. \quad (7)$$

3. Если цилиндр D_2^j перемещается как абсолютно жесткое тело, то на контуре L_j должно быть:

$$W_1 + V_0 = B_j, \quad (8)$$

где B_j – неизвестная комплексная постоянная ($j = \overline{1, M}$).

Дополнительные условия, необходимые для определения неизвестной постоянной B_j вытекают из закона Ньютона, описывающего движение j -го включения как абсолютно жесткого тела. Уравнение движения включения D_2^j приобретает вид

$$\mu_1 \int_{L_j} \frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) ds_0 = -\rho_e S_e^j \omega^2 B_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (9)$$

Здесь ρ_e – плотность, S_e^j – площадь j -го включения.

4. В случае, когда D_2 – совокупность полостей, границы цилиндров свободны от сил. Граничное условие на L имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n_0} (W_1 + V_0) = 0. \quad (10)$$

Отметим также, что на бесконечности рассеянное цилиндрами волновое поле W_1 должно удовлетворять условиям излучения типа Зоммерфельда [2]. На границе полупространства $x_2 = 0$ должны выполняться условия:

$$W_1 = 0, \text{ если граница } x_2 = 0 \text{ заземлена } (A=1);$$

$$\partial W_1 / \partial x_2 = 0, \text{ если граница } x_2 = 0 \text{ свободна от сил } (A=-1).$$

Далее будем решать задачу (6). Другие краевые задачи следуют из нее как частные случаи.

3. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям

1. Представим функции W_1 и W_2 , характеризующие дифрагированные волновые поля перемещений в областях D_1 и D_2 , в виде потенциалов типа простого слоя:

$$W_k(x_1, x_2) = \int_L p_k(s) G_k(x_1, x_2, \xi, \eta) ds, \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

$$G_1 = \frac{1}{4i} (H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - A H_0^{(1)}(\gamma_1 r_1)), \quad G_2 = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r),$$

$$r = |z - \zeta|, \quad r_1 = |z - \bar{\zeta}|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta, \quad \zeta \in L,$$

где $H_m^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода m -го порядка.

Представление (11) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (5) в области D_k и условиям на границе полупространства $x_2 = 0$ при соответствующем выборе параметра A (значение $A=0$ отвечает случаю неограниченного пространства). Кроме того, оно обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности.

Используем интегральное представление (11) для сведения краевой задачи (6) к интегральным уравнениям. Пусть параметрическое уравнение контура L_j ($j = \overline{1, M}$) имеет вид

$$\xi = \xi(\beta), \eta = \eta(\beta), \zeta = \xi + i\eta = \zeta(\beta), \zeta(\beta + 2\pi) = \zeta(\beta), 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (12)$$

Непосредственное удовлетворение первого из граничных условий (6) приводит к M интегральным уравнениям с логарифмическими ядрами (суммирование по $k = 1, 2$):

$$(-1)^{k-1} \left(\frac{\delta_{lj}}{2\pi} \int_L p_k(\beta) \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0^j}{2} \right| d\beta + \int_L p_k(\beta) K_k(\beta_0^j, \beta) d\beta \right) = -V_0(\beta_0^j), j = \overline{1, M}, \quad (13)$$

$$K_k = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r_0) - \frac{\delta_{lj}}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0^j}{2} \right| - A \delta_{lk} \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r_{10}), p_k(\beta) = p_k(s(\beta))s'(\beta),$$

$$\zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta} = r_{10} e^{i\alpha_{10}}, \zeta_0 = \zeta(\beta_0^j) \in L_j, \zeta \in L_l, l = \overline{1, M}.$$

Здесь δ_{lj} и δ_{lk} – символы Кронекера; интегрирование проводится по L – совокупности контуров L_l ($l = \overline{1, M}$); логарифмические ядра возникают в том случае, если контур L_l совпадает с контуром L_j , т.е. когда $l = j$ (при $\beta = \beta^j$ символ Кронекера δ_{lj} становится равным единице).

С целью получения сингулярных интегральных уравнений, схема численной реализации которых более эффективна, продифференцируем первое граничное условие (6) по дуговой координате $s_0 \in L_j$. Осуществляя в модифицированном граничном условии предельный переход при $z \rightarrow \zeta_0 \in L_j$ ($j = \overline{1, M}$) с привлечением формул Сохоцкого-Племеля [10] для вычисления предельных значений интегралов типа Коши, аналогично [11], приходим к сингулярным интегральным уравнениям 1-го рода. Удовлетворение второго из граничных условий (6) приводит к M уравнениям Фредгольма второго рода. Искомая система $2M$ интегральных уравнений имеет вид (суммирование по $k = 1, 2$):

$$\int_L p_k(\beta) B_k(\beta_0^j, \beta) d\beta = N(\beta_0^j), j = \overline{1, M}, \quad (14)$$

$$\frac{\mu_k}{2} p_k(\beta_0^j) + \int_L p_k(\beta) C_k(\beta_0^j, \beta) d\beta = T(\beta_0^j),$$

$$\begin{pmatrix} B_k \\ \frac{1}{\mu_k} C_k \end{pmatrix} = (-1)^{k-1} \frac{i\gamma_k}{4} \left[\begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_0) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_k r_0) - A \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{10}) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{10}) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_k r_{10}) \right] s_0',$$

$$\begin{pmatrix} N \\ \frac{1}{\mu_1} T \end{pmatrix} = i\gamma_1 \tau e^{-i\gamma_1 \xi_0 \cos \theta} \left[\begin{pmatrix} \xi'_0 \\ -\eta'_0 \end{pmatrix} Q_1(\eta_0) \cos \theta + \begin{pmatrix} \eta'_0 \\ \xi'_0 \end{pmatrix} Q_2(\eta_0) \sin \theta \right],$$

$$Q_n = e^{-i\gamma_1 \eta_0 \sin \theta} + (-1)^n A e^{i\gamma_1 \eta_0 \sin \theta}, \quad \text{если } NV = 1;$$

$$\begin{pmatrix} N \\ \frac{1}{\mu_1} T \end{pmatrix} = \frac{i\gamma_1 \tau}{4} \left[\begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{q_0}) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{q_0}) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_{q_0}) - A \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 - \alpha_{q_0}^*) \\ -\sin(\varphi_0 - \alpha_{q_0}^*) \end{pmatrix} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_{q_0}^*) \right] s'_0,$$

$$\zeta_0 - z_q = r_{q_0} e^{i\alpha_{q_0}}, \quad \zeta_0 - \bar{z}_q = r_{q_0}^* e^{i\alpha_{q_0}^*}, \quad \text{если } NV = 2.$$

Здесь ядра $C_1(\beta_0^j, \beta^j)$ и $C_2(\beta_0^j, \beta^j)$ непрерывны при любых значениях $l, j = \overline{1, M}$; ядра $B_1(\beta_0^j, \beta^j)$ и $B_2(\beta_0^j, \beta^j)$ становятся сингулярными, если $l = j$. В этом случае

$$B_k(\beta_0^j, \beta^j) = (-1)^k \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta^j - \beta_0^j}{2} + F_k(\beta_0^j, \beta^j), \quad k = 1, 2, \quad (15)$$

где $F_k(\beta_0^j, \beta^j)$ – непрерывная функция.

Следовательно, первые M уравнений в (14) являются сингулярными интегральными уравнениями первого рода. Следующие M уравнений – интегральными уравнениями Фредгольма второго рода.

Сделаем важное замечание. Условия типа склейки для перемещений и для производных перемещений по β_0^j ($j = \overline{1, M}$) на границе раздела двух сред будут эквивалентными, если к последним присовокупить M дополнительных условий. В данной работе в качестве таковых выбираются условия равенства средних перемещений на L_j ($j = \overline{1, M}$). Интегрирование (13) по β_0^j в пределах от 0 до 2π дает (суммирование по $k = 1, 2$):

$$\int_L p_k(\beta) A_k^j(\beta) d\beta = M^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (16)$$

$$A_k^j = (-1)^{k-1} \left(-\delta_{ij} \ln 2 + \int_0^{2\pi} K_k(\beta_0^j, \beta) d\beta_0^j \right), \quad M^j = -\int_0^{2\pi} V_0(\beta_0^j) d\beta_0^j.$$

Соотношение (16) следует использовать в качестве дополнительных условий, необходимых для однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений первого рода в (14).

2. Если D_2 – совокупность неподвижных включений, то, как нетрудно заметить, интегральные уравнения краевой задачи с модифицированными граничными условиями (дифференцирование по β_0^j , $j = \overline{1, M}$) получаются из первых M уравнений (14), если в них положить $p_2(\beta) \equiv 0$. Эквивалентность

краевой задачи (7) и задачи с модифицированными граничными условиями обеспечивается равенством нулю средних перемещений на L_j ($j = \overline{1, M}$). Соответствующие M сингулярных интегральных уравнений и M необходимых для их однозначной разрешимости дополнительных условий приобретают вид:

$$\int_L p_1(\beta) B_1(\beta_0^j, \beta) d\beta = N(\beta_0^j), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0^j) \in L_j, \quad (17)$$

$$\int_L p_1(\beta) A_1^j(\beta) d\beta = M^j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (18)$$

Отметим, что интегральные уравнения (17) и дополнительные условия (18) вытекают из (14) и (16) при $\rho_2 \rightarrow \infty$. Поэтому задача дифракции на неподвижных включениях может рассматриваться как частный случай соответствующей задачи дифракции на упругих включениях при $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$.

3. Дифракция гармонических волн сдвига на системе жестких включений также описывается системой сингулярных интегральных уравнений первого рода (17). Необходимые дополнительные условия вытекают из (9) и записываются в виде:

$$\int_L p_1(\beta) R^j(\beta) d\beta = Q^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (19)$$

$$R^j = \frac{1}{2} \delta_{ij} - \frac{1}{\mu_1} \int_0^{2\pi} C_1(\beta_0^j, \beta) d\beta_0^j + \frac{\rho_e}{\rho_1} S_e^j \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} A_1^j(\beta),$$

$$Q^j = -\frac{1}{\mu_1} \int_0^{2\pi} T(\beta_0^j) d\beta_0^j + \frac{\rho_e}{\rho_1} S_e^j \gamma_1^2 \frac{1}{2\pi} M^j.$$

Случай (17), (19) вытекает из (14), (16) предельным переходом при $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$.

4. В случае дифракции гармонических SH -волн на системе цилиндрических полостей интегральные уравнения краевой задачи (10) могут быть получены непосредственно из M последних уравнений (14) при $\mu_2 = 0$. Имеем

$$\frac{\mu_1}{2} p_1(\beta_0^j) + \int_L p_1(\beta) C_1(\beta_0^j, \beta) d\beta = T(\beta_0^j), \quad j = \overline{1, M}. \quad (20)$$

Краевая задача для системы полостей в полупространстве может рассматриваться также как предельный случай соответствующей задачи для упругих включений при $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$.

Численная реализация полученных интегральных уравнений осуществлялась двумя способами: методом дискретных особенностей [4] и методом механических квадратур [2]. На всех замкнутых контурах выбиралось нечетное число узлов $N = 2n + 1$. Внутренние и внешние узлы определялись из уравнений

$\sin \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_*) = 0$ и $\cos \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_{0m}) = 0$ соответственно, т. е. они задавались соотношениями

$$\beta_v = \beta_* + \frac{2\pi}{N}v, \beta_{0v} = \beta_v - \frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N} \leq \beta_* \leq \frac{2\pi}{N}, v = \overline{0, 2n}. \quad (21)$$

Запишем интерполяционный тригонометрический полином порядка точно n для функции $p_k(\beta)$. В случае нечетного N он имеет вид [2]

$$p_{kn}(\beta_0) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v) \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_v - \beta_0)}{\sin \frac{1}{2}(\beta_v - \beta_0)}, \quad k = 1, 2, \quad (22)$$

где $p_k^N(\beta_v)$ – значение плотности $p_k(\beta)$ в узле β_v при заданном N .

1. В соответствии с методом дискретных особенностей составим для уравнений (14), (16), которые отвечают совокупности упругих включений в полупространстве, систему $(2N+1)M$ линейных алгебраических уравнений с $(2N+1)M$ неизвестными $\gamma_{0N}^j, p_k^N(\beta_v)$ (суммирование по $k = 1, 2$):

$$\gamma_{0N}^j - \frac{2\pi}{N} \sum_{l=1}^M \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v^l) B_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l) = N(\beta_{0m}^j), \quad j = \overline{1, M} \quad (23)$$

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{l=1}^M \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v^l) D_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l) = T(\beta_{0m}^j), \quad m = \overline{0, 2n}, \quad (24)$$

$$\sum_{l=1}^M \sum_{v=0}^{2n} p_k^N(\beta_v^l) A_k^j(\beta_v^l) = \sum_{m=0}^{2n} V_0(\beta_{0m}^j), \quad (25)$$

$$D_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l) = \frac{\mu_k}{4\pi} \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_v^l - \beta_{0m}^j)}{\sin \frac{1}{2}(\beta_v^l - \beta_{0m}^j)} - C_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l),$$

$$A_k^j(\beta_v^l) = (-1)^{k-1} \left(-\delta_{lj} \ln 2 + \frac{2\pi}{N} \sum_{m=0}^{2n} K_k(\beta_{0m}^j, \beta_v^l) \right).$$

Здесь γ_{0N}^j – регуляризующие постоянные, которые вводятся в дискретную модель сингулярных интегральных уравнений первого рода, чтобы получить невырожденную систему линейных алгебраических уравнений (23)-(25). С увеличением N решение этой системы $p_k^N(\beta_v^l)$ приближается к точному значению плотности $p_k(\beta)$ в узле β_v^l , а постоянные γ_{0N}^j ($j = \overline{1, M}$) уменьшаются и стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$.

В методе механических квадратур дискретной моделью сингулярных интегральных уравнений первого рода является модель (23), в которой постоянные γ_{0N}^j отсутствуют. Тогда ранг системы (23) будет равен $M(N-1)$ и для выделения единственного решения требуется M дополнительных условий. Они имеют вид (25) и вытекают из дискретизации M условий эквивалентности (16). Если для каждого $j = \overline{1, M}$ одно из M соответствующих уравнений в (23) заменить j -м соотношением в (25), то получится система MN уравнений с рангом MN , которая вместе с MN уравнениями (24) образует совместную систему линейных алгебраических уравнений с полным рангом. Тогда, решая эту систему, однозначно определим значения $p_k^N(\beta_v)$ во внутренних узлах совокупности L . Далее увеличивая N , получим искомое решение $p_k(\beta)$ в узловых точках с заданной точностью.

Аналогично составляются дискретные модели других краевых задач.

2. В случае M неподвижных включений система M сингулярных интегральных уравнений первого рода (17) с M необходимыми дополнительными условиями (18) дискретизируется в виде (23), (25), если последние рассматривать в случае $k=1$. Однозначное решение, которое получается после решения возникающей системы линейных алгебраических уравнений, должно совпадать с соответствующим решением системы (23)-(25) при $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0$.

3. Если рассматривается совокупность жестких включений, то система сингулярных интегральных первого рода (17) имеет дискретную модель (23) при значении $k=1$, которая дополняется необходимыми условиями разрешимости. Последние получаются после дискретизации соотношений (19). Здесь значения плотности $p_1(\beta)$ в узлах интерполяции должны совпадать с соответствующими значениями плотности $p_1(\beta)$ – решения системы (23)-(25) при $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$.

4. Совокупности полостей в полупространстве отвечает система M уравнений Фредгольма второго рода (20). Ее дискретная модель вытекает из (24) при $k=1$. Значения внеинтегральной плотности во внешних узлах выражаются с помощью интерполяционного полинома. В результате получается система MN линейных алгебраических уравнений с MN неизвестными, которая имеет единственное решение. Оно должно совпадать с соответствующим решением системы (23)-(25) при $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$.

4. Численная реализация

С целью исследования сходимости построенных алгоритмов рассматривалась система однородных эллиптических неоднородностей. В ходе численной реализации на контурах эллипсов (со стороны матрицы) вычислялись безразмерные напряжения σ_n и σ_s путем деления соответствующих напряжений на $\tau\mu$. Точность вычислений проверялась сравнением результатов, полученных при различных значениях N . Проводилось также сравнение с результатами, приведенными в [12-14] в случае нормального падения волны

сдвига на одиночные эллиптические полость или упругое включение в неограниченной среде, и в [11, 15, 16] – в случае полупространства.

Эффективность метода дискретных особенностей в случае одиночных эллипсов проверялась при различных углах θ падения волны сдвига (2) и различном расположении узлов на контуре L . Расчеты показывают, что во всех рассмотренных случаях постоянная $\gamma_{0,N}$ быстро уменьшается и уже при $N=25$ значение $|\gamma_{0,N}|$ не превосходит 10^{-8} . В табл. 1 приводятся максимальные значения $|\gamma_{0,N}|$ в зависимости от числа узлов N на контуре эллиптического упругого включения при изменении угла θ в (2) от 0 до $\pi/2$ и решении соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (23)-(25).

Табл. 1. Эффективность метода дискретных особенностей

N	3	7	11	15	25	35	55
$\max \gamma_{0,N} $	2,61	0,035	0,00087	$3,3 \cdot 10^{-5}$	10^{-8}	$2,8 \cdot 10^{-12}$	$3,9 \cdot 10^{-14}$

Следует отметить, что при $N \geq 21$ значения напряжений σ_n и σ_s на контуре эллиптического упругого включения, вычисленные двумя методами – дискретных особенностей и механических квадратур – практически не отличаются: с точностью 10^{-3} результаты совпадают (для достижения точности 10^{-10} требуется около 600 узлов). При этом замена метода никак не влияет на потери вычислительных ресурсов (память, быстродействие).

В работе рассчитывалась также решетка из однородных эллипсов, поочередно расположенных на одинаковом расстоянии один от другого и ориентированных вдоль границы полупространства $x_2=0$. При нормальном падении волны сдвига (2) или действии гармонического сосредоточенного источника (3), расположенного на оси симметрии системы, рассматриваемые дифракционные задачи обладают свойством симметрии относительно оси Ox_2 (рис. 2). Свойство симметрии решетки позволяет осуществить первичное самотестирование полученных результатов и уменьшить количество решаемых линейных алгебраических уравнений. Здесь целесообразно разбиение всех контуров на нечетное число точек $N=2n+1$ так, чтобы на каждом эллипсе одна из точек, в которых удовлетворяются уравнения соответствующей дискретной модели, была ближайшей к границе полупространства. Тогда при численной реализации методом механических квадратур те из линейных алгебраических уравнений в (23), которые отвечают указанным точкам эллипсов, удобно заменить на соответствующие дополнительные условия в (25), что увеличит эффективность численной схемы.

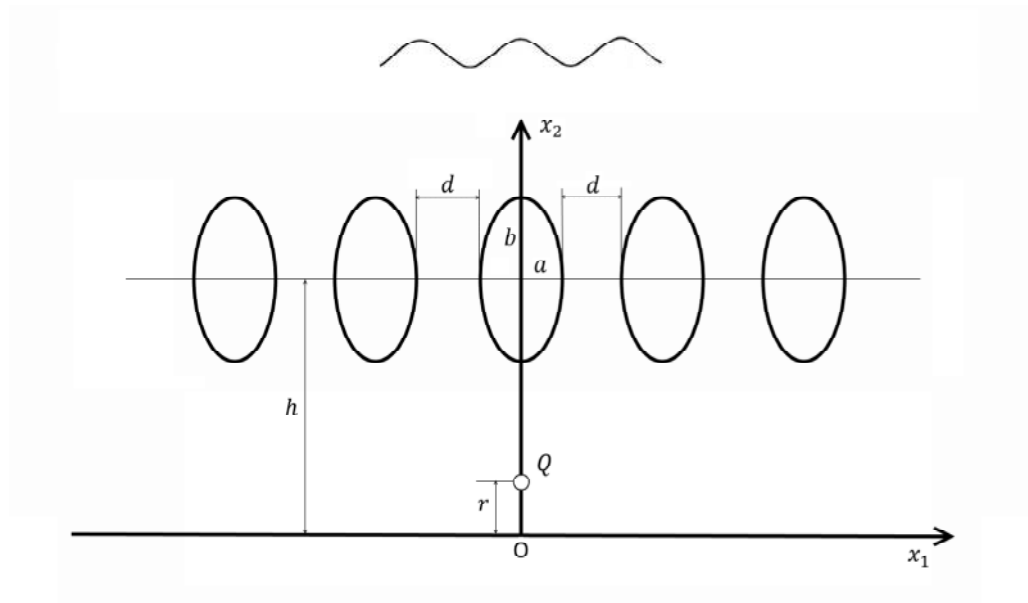


Рис. 2. Система эллиптических включений или полостей в полупространстве

Численное исследование показало, что в полупространстве точно также, как и в неограниченной среде [17], при воздействии на решетку SH -волны в распределении напряжений на контурах эллиптических неоднородностей наблюдается эффект насыщения [18] уже при $M=9$. Значения напряжений с большой точностью совпадают с аналогичными значениями соответствующей периодической задачи [19], и дальнейшее увеличение количества объектов практически не влияет на значения амплитуд напряжений. Обусловленность матриц решаемых систем линейных алгебраических уравнений при этом проверялась согласно алгоритму, описанному в [20].

В качестве примеров рассмотрим прикладные задачи о распределении контурных напряжений σ_n и σ_s на решетке, состоящей из пяти эллиптических неоднородностей (рис. 2). Интерес представляют центральный и крайние объекты. Отсчет внешних узлов будем вести от уже указанных точек, ближайших к границе полупространства. Они являются теньвыми в случае набегания на решетку волны сдвига (2) или лобовыми при действии гармонического источника, сосредоточенного в точке Q (3). Угол β будет изменяться от нуля (теньвая или лобовая точка) до π (лобовая или теньвая точка) для центрального эллипса в силу симметрии рассматриваемых задач и от 0 и 2π для крайнего справа эллипса (распределения напряжений на контурах, симметричных относительно центра центрального эллипса, зеркальны). Выбраны следующие геометрические параметры системы: полуоси эллипса $a=0,6$ и $b=1,4$; расстояние между эллипсами $d=2$; удаленности от границы $x_2=0$ центров эллипсов и точки Q равны $h=4$ и $r=1$ соответственно. На всех рисунках кривая 1 соответствует заземленному полупространству, кривая 2 –

полупространству с границей свободной от сил и кривая 3 – неограниченной среде. Во всех случаях полагается $\gamma_1 d = 3$.

Рис. 3 и рис. 4 характеризуют распределения σ_n и σ_s на центральном (а) и крайнем (b) эллипсах при нормальном падении волны сдвига ($NV=1$) и действии гармонического сосредоточенного источника ($NV=2$) на решетку, составленную из пяти упругих волокон ($\rho_2/\rho_1=2$, $\mu_2/\mu_1=5$).

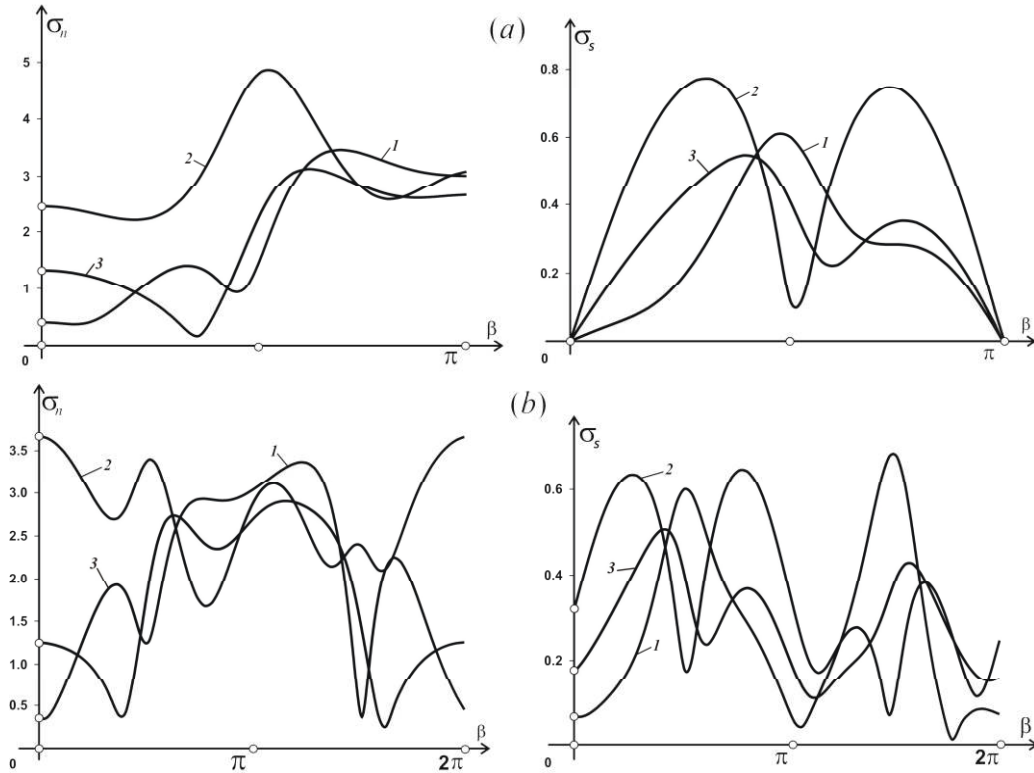


Рис. 3. Распределение контурных напряжений на центральном (а) и крайнем (b) эллиптических упругих включениях в случае $NV=1$

Стабильность результатов (точность $\varepsilon = 10^{-3}$) здесь достигается при $N=55$, что с учетом симметрии соответствует системе 280 линейных комплексных алгебраических уравнений в случае метода дискретных особенностей и 275 уравнений в случае метода механических квадратур. Расчеты подтверждают существенное влияние границы полупространства на напряженное состояние упругих включений, особенно это проявляется в случае границы $x_2=0$, свободной от сил. Преобладающими на границе матрица-волокно являются напряжения σ_n , которые значительно превосходят напряжения σ_s .

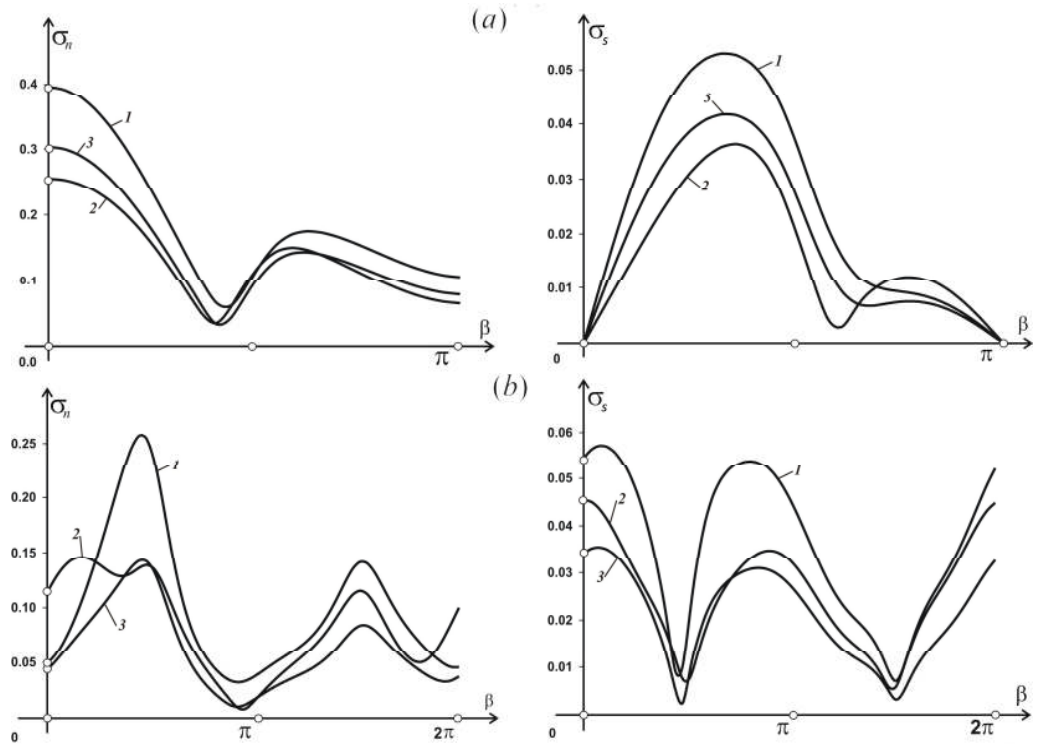


Рис. 4. Распределение контурных напряжений на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических упругих включениях в случае $NV=2$

Влияние нормально падающей волны сдвига на распределение напряжения σ_n на центральном (а) и крайнем (б) эллипсах в случае решетки из пяти неподвижных включений иллюстрирует рис. 5, а в случае решетки из пяти подвижных жестких включений ($\mu_2/\mu_1 = 2$) – рис. 6.

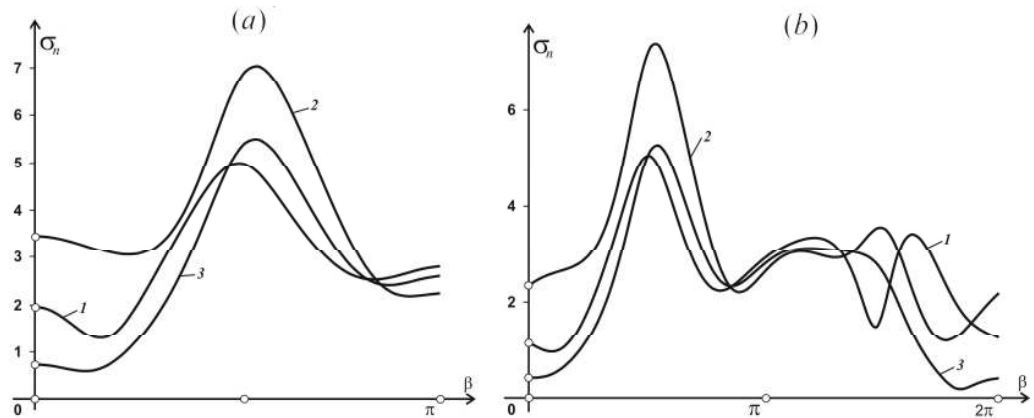


Рис. 5. Распределение напряжения σ_n на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических неподвижных включениях в случае $NV=1$

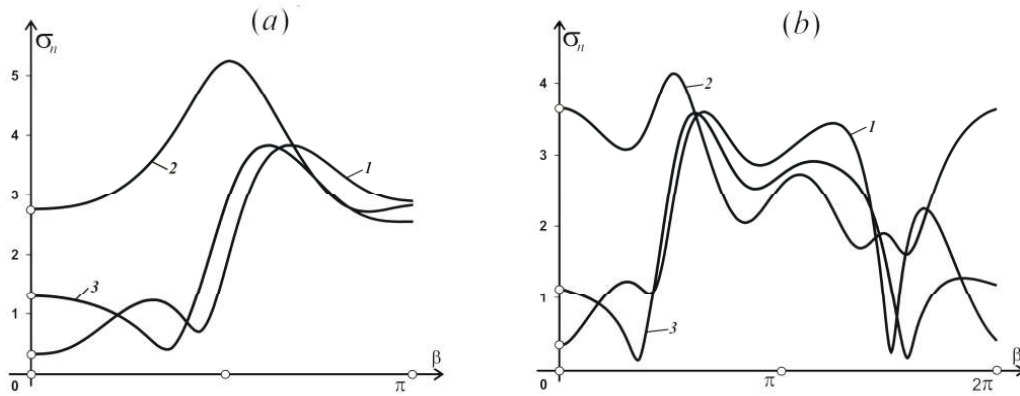


Рис. 6. Распределение напряжения σ_n на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических жестких включениях в случае $NV=1$

Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что с удалением эллипса от оси симметрии характер изменения контурных напряжений усложняется, причем максимальные значения σ_n уменьшаются. Как и в случае упругих включений, значительное увеличение амплитуд напряжений наблюдается в полупространстве со свободной от сил границей. В этом случае на центральном эллипсе $\max \sigma_n$ достигается вблизи точек соскальзывания ($\beta = \pm \pi/2$). Отметим, что в случае действия гармонического сосредоточенного источника напряжения σ_n на порядок меньше, поэтому их распределения здесь не приводятся.

На рис. 7 и рис. 8 приведены распределения напряжения σ_s на центральном (а) и крайнем (б) эллипсах при нормальном падении волны сдвига ($NV=1$) и действии гармонического сосредоточенного источника ($NV=2$) на решетку, составленную из пяти эллиптических отверстий.

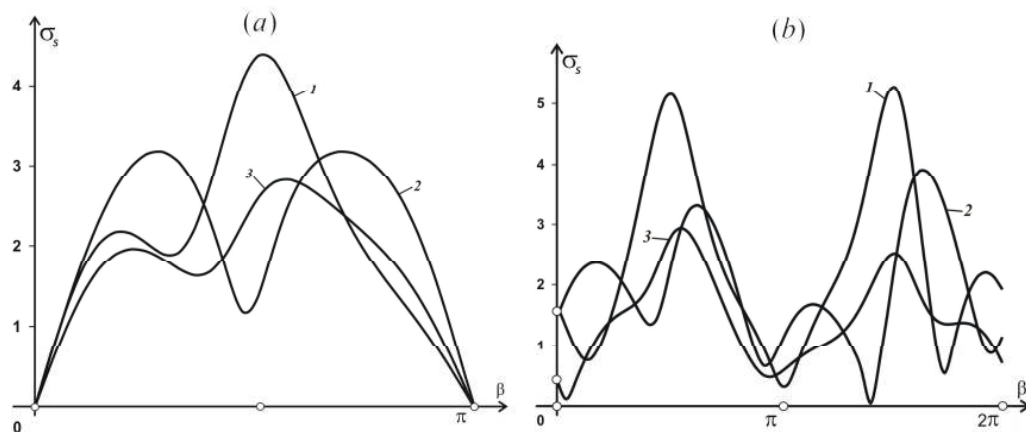


Рис. 7. Распределение напряжения σ_s на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических отверстиях в случае $NV=1$

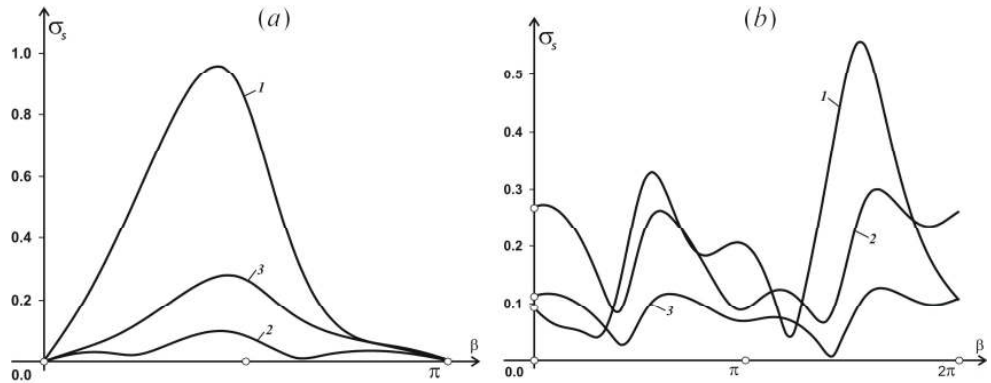


Рис. 8. Распределение напряжения σ_s на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических отверстиях в случае $NV=2$

Как видно, в отличие от предыдущих случаев, наиболее сильно себя проявляют напряжения σ_s в защемленном полупространстве. Здесь на центральном и крайних отверстиях $\max \sigma_s$ достигается вблизи точек соскальзывания, причем при удалении от оси симметрии $\max \sigma_s$ увеличивается.

5. Выводы

В данной работе методами сингулярных интегральных уравнений решаются задачи дифракции волн сдвига на системе различного типа неоднородностей в полупространстве. Численная реализация алгоритмов осуществлялась методами дискретных особенностей и механических квадратур. Показано, что в случае рассматриваемого класса задач эти два метода имеют одинаковую эффективность и сходятся с заданной точностью при одном и том же количестве узлов на контурах неоднородностей. Сделан количественный и качественный анализ напряженного состояния решеток, состоящих из эллиптических включений различного типа или полостей.

Построенные предложенными методами инструментальные программные средства, численно решающие разнообразные интегральные уравнения, позволяют с высокой точностью описывать поведение различных систем с усложненными свойствами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – Харьков: Ак. ВВ МВД Украины. – 2012. – 544с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка. – 1984. – 344 с.
3. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119-127.

4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука. – 1985. – 256 с.
5. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – К.: Наук. думка. – 1968. – 287 с.
6. Вертгейм И.И., Терпугов В.Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ: Уч. пособ. – Пермь: ПГУ. – 2007. – 84 с.
7. Назаренко А.М., Панченко Б. Е. Схема паралельних вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной изотропной среде // Пробл. програмування. – 2010. – №2–3. – С. 604–610.
8. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1982. – Вып. 38. – С. 15-18.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука. – 1973. – Т. 2. – 584 с.
10. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматиз. – 1962. – 511 с.
11. Назаренко А.М. Дифракция волн сдвига на цилиндрических включениях и полостях в упругом полупространстве // Проблемы прочности. – 1990. – №11. – С. 90–94.
12. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка. – 1978. – 307 с.
13. Шульга Н.А., Колодий В.И. Дифракция SH -волн на некруговой цилиндрической полости // Прикл. механика. – 1981. – №3. – С. 129-131.
14. Шульга Н.А., Колодий В.И. Дифракция волн сдвига на упругом включении некруговой цилиндрической формы // Мех. композит. материалов. – 1981. – №1. – С. 153-156.
15. Панченко Б.Е. Высокоточное кластерное решение задачи дифракции волн сдвига на системе отверстий в полубесконечной изотропной среде с защемленной границей // Пробл. програмування. – 2012. – №1. – С. 121-131.
16. Панченко Б.Е. Поведение системы некруговых отверстий в полупространстве со свободной границей от воздействия стационарных SH -волн // Проблемы управления и информатики. – 2012. – №4. – С. 84-93.
17. Панченко Б.Е., Назаренко А.М. Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №1. – С. 172-187.
18. Кюркчан А.Г., Скородумова Е.А. Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов // Акустический журнал. – 2007. – №3. – С. 5-14.
19. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Взаимодействие волн сдвига с периодической системой цилиндрических неоднородностей произвольного поперечного сечения // Пробл. машиностр. – 1992. – Вып. 38. – С. 48-52.
20. Химич А.М., Поляно В.В. Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов // Пробл. програм. – 2008. – №3. – С. 145-149.