

УДК 519.71

Ідентифікація стаціонарних слабо формалізованих систем з невідомими входами у n -вимірному фазовому просторі

О. М. Назаренко, О. М. Ніколаєнко

Сумський державний університет, Україна

Проводиться моделювання та ідентифікація динамічної моделі з невідомими входами з метою імітації та прогнозування. Невідомий вхід зв'язується лінійною залежністю з керуваннями та їх похідними, а фазові координати розкладаються на трендову і періодичну складові. Оцінювання невідомих параметрів моделі, на які накладаються певні обмеження, проводиться методами економетрики.

Ключові слова: невідомі входи, специфікація, ідентифікація, фазові координати, керування, імітація, прогнозування.

Проводится моделирование и идентификация динамической модели с неизвестными входами с целью имитации и прогнозирования. Неизвестные входы связываются линейной зависимостью с управлениями и их производными, а фазовые координаты разлагаются на трендовую и периодическую составляющие. Оценивание неизвестных параметров модели, на которые накладываются определенные ограничения, проводится методами эконометрики.

Ключевые слова: неизвестные входы, спецификация, идентификация, фазовые координаты, управления, имитация, прогнозирование.

Held modeling and identification of dynamic model with unknown inputs to simulate and predict. Unknown inputs associated linear relationship with management and their derivatives, and the phase coordinates are decomposed into trend and periodic components. Estimation of unknown parameters of the model, which imposed certain restrictions, by the methods of econometrics.

Keywords: unknown inputs, specification, identification, phase coordinates, control, simulation, prediction.

1. Вступ

Сучасний системний аналіз вивчає властивості реальних систем за допомогою їх динамічних моделей, поданих у вигляді диференціальних або диференціально-алгебраїчних рівнянь. Однак розв'язанню прямої задачі, як правило, передує розв'язання оберненої задачі динаміки, яка полягає у відновленні закону руху динамічної системи за статистичними даними [1, 2]. Характерними особливостями слабо формалізованих систем [3, 4] є відсутність предметно-орієнтованої специфікації їх моделей, неповнота інформації про динаміку змінних, неможливість проведення безпосереднього експерименту.

Нехай стан системи у будь-який момент часу $t \in [t_0, t_f]$ характеризується фазовим вектором $\mathbf{k}(t)$, а вхід системи – вектором $\mathbf{I}(t)$. Позначимо $\{\mathbf{I}_t\}$, $\{\mathbf{k}_t\}$ множину даних спостережень у N цілочисельних точках проміжку $[t_0, t_*)$, $t_* < t_f$. Проміжок $[t_0, t_*)$ будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок $[t_*, t_f]$ – періодом прогнозування. В залежності від вхідної статистичної інформації обернені задачі динаміки діляться на 4 типи.

1. Задачі чистої параметричної ідентифікації ($\{\mathbf{I}_t\}$, $\{\mathbf{k}_t\}$ відомі).

2. Задачі сумісної ідентифікації входу і параметрів ($\{\mathbf{I}_t\}$ невідоме).
3. Задачі сумісної ідентифікації стану і параметрів ($\{\mathbf{k}_t\}$ невідоме).
4. Задачі сумісної ідентифікації входу, стану і параметрів ($\{\mathbf{I}_t\}, \{\mathbf{k}_t\}$ – невідомі).

Якщо статистичні дані $\{\mathbf{k}_t\}$ невідомі, то можна використовувати заміщуючі змінні. Нехай, наприклад, відома статистична інформація відносно приростів $\mathbf{n}_t = \mathbf{k}_t - \mathbf{k}_{t-1}$ ($t = \overline{1, N}$). Тоді у якості заміщуючих змінних доцільно вибрати

$$\mathbf{y}_t = \sum_{\tau=1}^t \mathbf{n}_\tau \Rightarrow \mathbf{k}_t = \mathbf{y}_t + \mathbf{k}_0, \quad (1)$$

причому значення компонент вектора \mathbf{k}_0 заздалегідь невідомі.

Невідомий вхід $\mathbf{I}(t)$ породжує проблему його моделювання. На практиці використовують такі варіанти моделювання [5].

1. Принцип мультиплікатора:

$$\mathbf{I}(t) = R\mathbf{x}(t). \quad (2)$$

2. Принцип акселератора:

$$\mathbf{I}(t) = B\dot{\mathbf{x}}(t). \quad (3)$$

3. Модель з інерційною ланкою:

$$\mathbf{I}(t) = D\mathbf{x}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t). \quad (4)$$

Вектор $\mathbf{x}(t)$ в (2) – (4) будемо називати вектором керувань. Припускаємо, що відомі статистичні дані $\{\mathbf{x}_t\}$, $t = \overline{1, N}$. Конструювання закону керування здійснює регулятор [6], за допомогою якого досліджуваний об'єкт переводиться із початкового стану \mathbf{k}_0 (в момент часу t_0) в кінцевий бажаний стан \mathbf{k}_* (в момент часу t_*). Регулятор повинен реалізувати основну ідею теорії керування – принцип оберненого зв'язку, який вказує на те, щоб вектор керувань $\mathbf{x}(t)$ або вхід $\mathbf{I}(t)$ в кожний момент часу t був функцією фазового вектора $\mathbf{k}(t)$ та його похідною $\dot{\mathbf{k}}(t)$. У випадку лінійної стаціонарної моделі пропонується зв'язок

$$\mathbf{I}(t) = \dot{\mathbf{k}}(t) + \Lambda\mathbf{k}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (5)$$

де Λ – діагональна матриця з додатними елементами.

Експериментальні дослідження макроекономічних процесів підтверджують справедливність нульової гіпотези $H_0: \Lambda = \lambda E$ (λ – скалярна додатна величина, E – одинична матриця). В [7] використано принцип мультиплікатора (2) при ідентифікації динамічної моделі (5), за допомогою якої описувалась економіка в цілому розвинутих країн Західної Європи.

2. Постановка задачі

Складність і швидка мінливість слабо формалізованих процесів, присутність не формалізованих і невизначених факторів – основні причини, які перешкоджають складанню математичних моделей, які б адекватно описували досліджувані динамічні системи. Для встановлення закономірностей, властивих слабоформалізованим системам, будемо припускати, що об'єм вибірки N є

достатньо великим і на періоді ідентифікації $[t_0, t_*)$ стабілізувались взаємозв'язки між окремими елементами системи. На практиці це означає, що елементи матриць, що фігурують в (2) – (5), зв'язані між собою певними співвідношеннями, які заздалегідь невідомі. Крім того, на елементи цих матриць можуть накладатись обмеження, які випливають з фізичної сутності задачі.

У даній роботі розглядається лінійна стаціонарна модель вигляду

$$\dot{\mathbf{k}}(t) + \lambda \mathbf{k}(t) = D\mathbf{x}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (6)$$

в якій замість $\mathbf{k}(t)$ використовується згідно (1) замішувачий вектор

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{k}(t) + \mathbf{k}_0. \quad (7)$$

Задача полягає у специфікації фазових координат \mathbf{k}_i і відповідних керувань \mathbf{x}_i ($i=1, n$), визначенні розмірності n фазового простору та оцінюванні невідомих параметрів системи диференціальних рівнянь (6). Оскільки метою дослідження є прогнозування майбутніх станів системи, то ідентифікацію невідомих параметрів моделі необхідно проводити через призму імітаційних та прогнозних властивостей фазових координат і керувань. Основну роль в процесі налаштування модельних траєкторій руху на необхідні властивості повинен відіграти регулятор, який буде складатись із декількох регулюючих пристроїв [8].

3. Метод розв'язання задачі

Тенденцію розвитку динамічної системи будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес будемо описувати за допомогою розкладу в ряд Фур'є відхилень статистичних даних відносно відповідного тренду. Нехай

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \beta(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t), \quad t = \overline{1, N}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}. \quad (8)$$

Визначення періоду T коливань даної системи і встановлення частот із спектра (8), на які налаштовані гармонічні хвилі, будемо встановлювати за допомогою першого регулюючого пристрою, що обчислює сумарні значення керувань. Для нього складемо регресійну модель

$$x_i - \bar{x} = \beta(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t) + v_t, \quad t = \overline{1, N}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}. \quad (9)$$

Керування повинні бути обраними такими, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштовувалися на частоти, ідентифіковані в (9). Оскільки кожна підмножина, яка відповідає певному керуванню, має свою специфіку функціонування, то кількості значущих гармонік у розкладі різних керувань (8) можуть різнитись. Якщо вибрана підмножина швидко реагує на якісні зміни у даній динамічній системі, то їй відповідатиме максимальна кількість гармонік у розкладі (8), тобто $n-1$ гармонік. Мінімальна кількість гармонік буде відповідати тим підмножинам, які слабо реагують на зміни в інших підмножинах.

Нехай проведена специфікація компонент вектора керувань і тим самим встановлені розмірність фазового простору n та період коливань T . Тоді покладемо $N=T$ і можна розпочинати ідентифікацію рівняння руху (6).

У випадку (8) помножимо рівняння (6) на $e^{\lambda t}$ і проінтегруємо його від заданого значення t_* до моменту t . Маємо

$$\int_{t_*}^t e^{\lambda\tau} (\dot{\mathbf{k}}(\tau) + \lambda\mathbf{k}(\tau)) d\tau = \int_{t_*}^t e^{\lambda\tau} (D\mathbf{x}(\tau) + C\dot{\mathbf{x}}(\tau)) d\tau.$$

Після деяких перетворень одержуємо

$$\mathbf{k}(t) = e^{-\lambda(t-t_*)} (\mathbf{k}_* - C\mathbf{x}_*) + C\mathbf{x}(t) + (D - \lambda C) e^{-\lambda t} \int_{t_*}^t e^{\lambda\tau} \mathbf{x}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Тоді інтеграл в (10) можна подати у вигляді

$$\int_{t_*}^t e^{\lambda\tau} \mathbf{x}(\tau) d\tau = e^{\lambda t} \mathbf{f}(t) \Big|_{t_*}^t, \quad (11)$$

де $\mathbf{f}(t)$ – відома вектор-функція при заданому розкладі (8) вектора $\mathbf{x}(t)$.

Тепер розв'язок (10) можна записати так:

$$\mathbf{k}(t) = C\mathbf{x}(t) + (D - \lambda C)\mathbf{f}(t). \quad (12)$$

Отже, при заданих векторах $\mathbf{x}(t)$ (8) і $\mathbf{f}(t)$ (11) задача зводиться до оцінювання невідомих матриць C , D і параметра λ . При практичних дослідженнях елементи матриць C і D є додатними. Крім того, для зменшення числа ступенів вільності при оцінюванні цих коефіцієнтів необхідно встановити можливі зв'язки між ними. Для цього використаємо регулятор, який буде складатися з трьох регулюючих пристроїв, що обчислюють сумарні значення y , f і x . Відповідні регресійні моделі мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_t - \bar{y} &= \mathbf{c}'((\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - \lambda(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}})) + \mathbf{d}'(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) + h_t, \quad t = \overline{1, N}, \\ f(t) - \bar{f} &= \mathbf{q}'(\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{p}'((\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - \lambda(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}})) + v_t, \quad t = \overline{1, N}, \\ x(t) - \bar{x} &= \lambda(f(t) - \bar{f}) + \mathbf{m}'(\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{l}'(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) + w_t, \quad t = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (13)$$

де h_t, v_t, w_t – випадкові відхилення; всі невідомі параметри регулятора додатні.

Регресійна модель для фазового вектора \mathbf{y} реалізувалася у вигляді:

$$\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}} = C((\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) - \hat{\lambda}(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}})) + D(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}) + \mathbf{h}_t, \quad t = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Тут на елементи невідомих матриць C і D накладалися наступні обмеження (\hat{a} – МНК-оцінка параметра a):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_{ij} &= \hat{d}_j, \quad \sum_{i=1}^n c_{ij} = \hat{c}_j, \quad \sum_{i=1}^n \hat{q}_i c_{ij} = \hat{p}_j, \quad \sum_{i=1}^n \hat{q}_i d_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \hat{m}_i d_{ij} = \hat{l}_j, \quad \sum_{i=1}^n \hat{m}_i c_{ij} = 1, \\ \frac{1}{3} \hat{d}_j &< d_{ii} < \frac{2}{3} \hat{d}_j, \quad \frac{1}{3} \hat{c}_j < c_{ii} < \frac{2}{3} \hat{c}_j, \quad d_{ij} > 0, \quad c_{ij} > 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

що впливають з фізичної постановки задачі і сутності параметрів регулюючих пристроїв в (13).

4. Практична реалізація алгоритму

Апробація моделі проводилася на прикладі макроекономічного розвитку Франції за 1956–2011 рр. [9]. У якості координат фазового вектора \mathbf{y} вибиралися прирости основних фондів (статистичні дані – Gross fixed capital formation), а вектора керувань \mathbf{x} – випуски секторів (статистичні дані – Value added). Чисельний експеримент встановив оптимальне значення об'єму вибірки

$N = 50$, при цьому 1960–2009 рр. – період ідентифікації, 2010–2011 рр. – період прогнозування. Встановлено, що при рівні значущості $\alpha=0,005$ і числу ступенів вільності $k=N-2n$ економіці Франції властиві чотири значущі гармоніки ($k=1, 2, 3, 6$): хвиля Кондратьєва ($k=1$), хвиля Кузнеця ($k=3$), хвиля Жугляра ($k=6$) [10] і хвиля з періодом, що дорівнює половині періоду хвилі Кондратьєва ($k=2$). Оптимальний поділ економіки Франції на сектори такий: промисловість та сільське господарство (Industry; Agriculture); будівництво та транспорт (Construction; Transport); фінансовий сектор і нерухомість (Finance; Real estate); комунікації та наука (Communication; Science); сфера послуг (Service Industries).

Оцінювання регресійної моделі (8) дало наступні значення коефіцієнтів детермінації R^2 трендів, навколо яких відбуваються коливання (табл. 1).

Табл. 1. Коефіцієнти детермінації трендів

№ сектора	1	2	3	4	5	Σ
R^2	0,5231	0,8548	0,8993	0,8220	0,8756	0,8021

Аналіз табл. 1 показує, що для вибраних секторів (особливо для першого сектору) і для економіки в цілому коливання випусків навколо відповідного тренду є відчутними. Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань кожного сектору обчислюються за допомогою відповідних коефіцієнтів детермінації, значення яких наведені в табл. 2.

Табл. 2. Коефіцієнти детермінації гармонік

№ сектора	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=6$	Σ
1	0,9523	0,0179	0,0205	0,0020	0,9926
2	0,6319	0,2883	0,0486	0,0072	0,9760
3	0,7604	0,1792	0,0385	0,0035	0,9815
4	0,8661	0,0911	0,0220	0,0045	0,9836
5	0,8174	0,1632	0,0061	0,0017	0,9882
Σ	0,8082	0,1596	0,0186	0,0046	0,9909

Регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків. Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків (ВВП) приводяться в табл. 3.

Табл. 3. Якість модельних траєкторій випусків

№ сектора	1	2	3	4	5	Σ
R^2	0,9992	0,9991	0,9989	0,9989	0,9995	0,9992

На рис. 1 приведені графіки модельних кривих ВВП економіки в цілому та їх коливань. Тут точками зображені статистичні дані, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 р.). Порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що відповідають 2010 і 2011 рр.) свідчить про високоточні прогнозні властивості моделі (9).

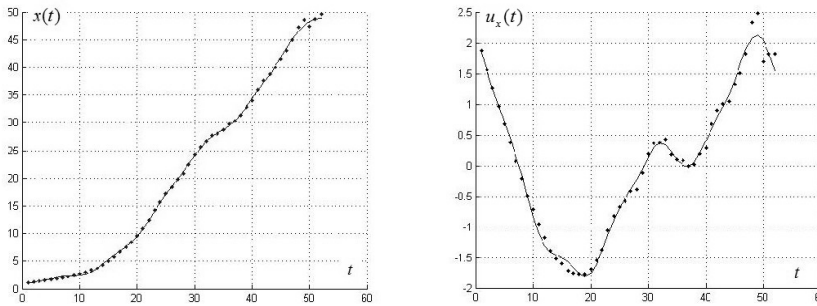


Рис. 1. Модельні криві ВВП та відповідних коливань за 1960-2011 рр.

Наступним кроком є оцінювання регулятора (13). При $\hat{\lambda} = 0.0177$ та ідентифікованому розкладі (8) обчислюємо інтеграли, що фігурують в (11), і знаходимо вектор-функцію $\mathbf{f}(t)$. Далі оцінюємо регресійну модель (14).

МНК-оцінки елементів матриці C і D наведені в табл. 4.

Табл. 4. МНК-оцінки елементів матриці C і D

Матриця C					Матриця D				
2,1232	0,3216	0,2242	0,2988	0,2656	0,0424	0,0084	0,0067	0,0058	0,0060
0,3183	2,1093	0,2755	0,3145	0,2545	0,0069	0,0379	0,0052	0,0070	0,0080
0,2472	0,2712	2,1716	0,2855	0,2943	0,0061	0,0045	0,0362	0,0083	0,0041
0,2849	0,3469	0,3516	2,1309	0,2845	0,0072	0,0134	0,0063	0,0326	0,0035
0,2679	0,2855	0,2832	0,2755	1,9954	0,0062	0,0052	0,0085	0,0065	0,0417

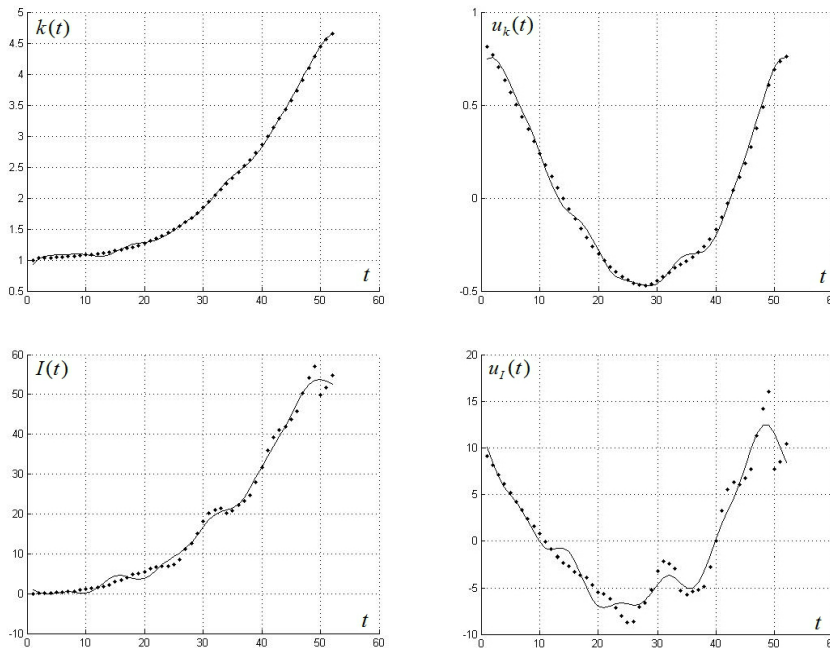


Рис. 2. Модельні траєкторії ОФ, інвестицій та відповідних коливань

Розроблений алгоритм параметричної ідентифікації моделі n -секторної економіки дозволяє оцінити невідомі значення \mathbf{k}_0 основних фондів секторів у початковий момент часу t_0 . Ці значення дозволяють відновити статистичні дані по ОФ, які нам були невідомі. За формулою (4) можна також відновлювати статистичні дані по інвестиціям і будувати їх траєкторії. Рис. 2 ілюструє зміну ОФ і інвестицій економіки Франції в цілому та їх відповідних коливань.

5. Висновки

У даній роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації стаціонарної динамічної моделі з невідомим входом. Траєкторії руху керувань моделюються за допомогою розкладання на трендову та періодичну складові. Ідентифікація невідомих параметрів проводилася за допомогою регулятора, який складався з трьох регулюючих пристроїв. На параметри моделі накладалися обмеження, що впливають з фізичної сутності задачі. Чисельна реалізація побудованих алгоритмів на статистичних даних реальної динаміки показала їх ефективність.

ЛІТЕРАТУРА

1. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука. – 1987. – 304 с.
2. Ljung L. System Identification. Theory for the user. 2nd ed. – N.J.: PTR Prentice Hall, Upper Saddle River. – 1999. – 432 p.
3. Альбрехт Э. Г. Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2002. – Т.5. – С. 54–86.
4. Nazarenko O.M., Filchenko D.V. Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective // Int. J. of Innovating Computing, Information and Control. – Japan, 2008. – Vol. 4, No. 7. – P. 1553 – 1566.
5. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М: Юнити-Дана. – 2005. – 295с.
6. Бабаков И. М. Теория колебаний. Изд. 4-е, испр. – М.: Наука. – 2004. – 591 с.
7. Назаренко О. М., Ніколаєнко О.М. Параметрична ідентифікація моделі Солоу макро економічної системи // Вісник НТУ«ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №6(1115). – С. 82-91.
8. Назаренко О. М., Ніколаєнко О. М. Моделювання та ідентифікація лінійної стаціонарної моделі з невідомими входами // Труды XVII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2015). Харків-Суми. – 2015. – С. 177-180.
9. INSEE. – <http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action>.
10. Коротаяев А.В. Кондратьевские волны в мировой экономической динамике // Системный мониторинг. Глобальное и региональное развитие. – М.: Либроком / URSS, 2010. – С. 189-229.