УДК 004.932.72'1

# Оценка параметров положения и видимого движения объектов по измерениям на серии кадров

Н. Ю. Дихтяр[1], Я. С. Мовсесян[1], В. Е. Саваневич[2]
[1]*Харьковский национальный университет имени радиоэлектроники, Украина*
[2]*Ужгородский национальный университет, Украина*

В статье разработан метод уточнения параметров положения объектов, неподвижных на серии кадров, инвариантный к перепутыванию измерений положений, выполненных на отдельных кадрах серии. Вычислительный метод основан на покадровом совместном расщеплении измерений. Использование вычислительного метода целесообразно при наличии высокой плотности объектов в исследуемых участках небесной сферы. Разработанный в статье метод уточнения параметров положения объектов может использоваться при формировании внутреннего каталога объектов неподвижных на серии кадров.

***Ключевые слова:*** *параметры видимого движения (положения) объекта, внутренний каталог, коэффициент расщепления.*

У статті розроблений метод уточнення параметрів положення об'єктів, нерухомих на серії кадрів, інваріантний до переплутування вимірювань положень, виконаних на окремих кадрах серії. Вимірювальний метод заснований на покадровому спільному розщепленні вимірювань. Використання обчислювального методу доцільно при наявності об'єктів з високою щільністю у досліджуваних ділянках небесної сфери. Розроблений в статті метод уточнення параметрів положення об'єктів може використовуватися при формуванні внутрішнього каталогу об'єктів нерухомих на серії кадрів.

***Ключові слова:*** *параметри видимого руху (положення) об'єкта, внутрішній каталог, коефіцієнт розщеплення.*

The article presents a method that allows improving accuracy of parameters, which describe positions of objects that appear to be fixed in the series of frames, and is invariant to mistakes occurred in measurements of some frames in the series. The computational method is based on by-frame joint splitting of measurements. Its application is useful when density of objects in the investigated sky area is high. The method can be used for formation of used internally catalog of objects, which are immobile through the whole frame series.

***Key words:*** *parameters of apparent motion (position) of the object, internal catalog, coefficient splitting.*

## 1. Введение

Одним из неотъемлемых атрибутов эффективного выделения астероидов на серии кадров является формирование внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии кадров, то есть звезд [1]. Внутренний каталог объектов, неподвижных на серии кадров (ВК), существенно снижает уровень ложных обнаружений малых тел Солнечной системы. ВК включает информацию о соответствующих объектах (звездах) и формируется, согласно своего названия, на серии кадров.

Для качественного формирования ВК необходимо по измерениям серии кадров найти уточненное положение каждой звезды, каждого объекта ВК. Эта задача усложняется в случае объектов находящихся на малых угловых расстояниях друг от друга, то есть «близких объектов».

**2. Цель работы**

Целью статьи является разработка метода уточнения параметров положения объектов, неподвижных на серии кадров, инвариантного к перепутыванию измерений этих положений, выполненных на отдельных кадрах серии.

**3. Анализ литературы**

Аналогичная задача имеет место в астрономии (при формировании астрометрических каталогов) [2, 3, 4, 5] и в теории и практике обработки локационной информации [6, 7, 8, 9]. В астрономии данная задача возникает при построении каталогов на основе данных телескопов с хорошим проницанием, особенно в окрестности Млечного Пути. В практике обработки локационной информации данная задача имеет место при наличии плотных потоков целей и низких пороговых значениях формирования отметок (измерений, блобов) в устройствах и программах первичной (внутрикадровой) обработки.

Традиционно уточнение параметров объектов на серии кадров осуществляется с использованием одной из модификации стробового метода. При этом на каждом кадре последовательно выбираются измерения соответствующие каждому объекту. Затем, по совокупности отобранных измерений решается задача уточнения параметров объекта с использованием, например, метода наименьших квадратов (МНК). При наличии близких объектов данный подход приводит к перепутыванию измерений между объектами. Данное перепутывание вносит искажения (ошибки) в уточненную оценку параметров объектов, которые не могут быть исключены на этапе сглаживания параметров объектов с использованием МНК. Существуют методы, инвариантные к перепутыванию измерений в стробах сопровождения объектов. Одними из первых таких методов являются методы вероятностной и совместной вероятностной идентификации данных [8]. Для их использования необходима соответствующая статистическая модель данных. Впервые она была предложена в работе П. А. Бакута [9]. В работе [10] данная модель уточнена относительно рассматриваемой задачи разработки метода уточнения параметров положения объектов, неподвижных на серии кадров, инвариантного к перепутыванию измерений этих положений, выполненных на отдельных кадрах серии. Как отмечалось, данный метод необходим при обработке результатов астероидных обзоров для формирования внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии кадров [1].

**4. Изложение основного материала**

Статистическая модель множества позиционных измерений на серии кадров участка небесной сферы. Выражение для условной вероятности формирования конкретного множества $\Omega_{nfr}$ измерений на кадре при наличии на соответствующем участке небесной сферы $Q_{sky}$ звезд с параметрами $\Omega_{sky} = \{\theta_1, ..., \theta_j, ..., \theta_{Qsky}\}$ в предположении, что все объекты различаемы, имеет вид [10]:

$$P_{\Omega nfr/\Omega sky} = P_{\Omega nfr\ (0)/\Omega sky} \cdot \sum_{H=0}^{\min(Q_{fr}, Q_{sky})} \tilde{P}_{\Omega nfr\ (H)/\Omega sky}, \tag{1}$$

где $\tilde{P}_{\Omega nfr\ (H)/\Omega sky} = \dfrac{P_{\Omega nfr\ (H)/\Omega sky}}{P_{\Omega nfr\ (0)/\Omega sky}}$;

$$P_{\Omega nfr\ (H)/\Omega sky} = P_{\Omega nfr\ (0)/\Omega sky} \cdot \left(\frac{1-F_{EOR}}{F_{EOR}}\right)^H \left[\prod_{Iobj=1}^{H} \frac{D_{\theta j}}{1-D_{\theta j}}\right] \frac{1}{C^H} \times$$

$$\times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \cdots \sum_{j_H=j_{H-1}+1}^{Q_{sky}} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{Q_{fr}} \cdots \sum_{\substack{i_H=1 \\ for \forall \alpha,\beta}}^{Q_{fr}} \prod_{Iobj=1}^{H} \frac{P_A(A_{Iobj}/\theta_{jIobj}) \cdot P_K(Y_{KIobj}/\theta_j)}{P_A(A_{Iobj}/0)}; \tag{2}$$

$F_{EOR}$ – условная вероятность ложной тревоги (УВЛТ) в ЭОР;

$D_\theta$ – условная вероятность правильного обнаружения небесного объекта с параметрами видимого движения (положения) и блеска $\theta$;

$C = \dfrac{1}{\Delta_{CCD}^2}$;

$\Delta_{CCD}$ – угловой размер пикселя ПЗС-матрицы;

$P_K(Y_{Ki}/\theta)$, $P_A(A_i/\theta)$ – условные вероятности формирования оценки положения $Y_{Ki}$ (координат) звезды и блеска $A_i$ в i-ом измерении $n_{fr}$-го кадра, при условии, что измерение соответствует звезде с параметрами $\theta$ видимого движения (положения) и блеска, соответственно;

$$P_K(Y_{K_{Iobj}}/\theta_j) = N_{YK\ Iobj}\left(Y_{KIobj}(\theta_j); \mathbf{\Sigma}_{\text{fri}\ n}\right)dy; \tag{3}$$

$$N_x(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}; \tag{4}$$

– значение многомерного нормального распределения с математическим ожиданием $\mu$ и корреляционной матрицей $\Sigma$ в точке $x$.

$$P_{\Omega\, nfr\ (0)/\Omega sky} = P_{\Omega\, nfr/(0)} \cdot \prod_{j=1}^{Q_{fr}} \frac{1-D_{\theta j}}{1-F_{EOR}}; \tag{5}$$

$$P_{\Omega nfr/(0)} = F_{EOR}^{Q_{sky}} (1-F_{EOR})^{L_{EOR}-Q_{sky}} \cdot C^{Q_{sky}} \cdot \prod_{i=1}^{Q_{sky}} P_A(A_i/0); \tag{6}$$

$P_A(A_i/0)$ – условная вероятность формирования оценки блеска небесного объекта $A_i$ в i-ом измерении исследуемого кадра, при условии, что измерение принадлежит ложному объекту;

$L_{EOR}$ – количество элементов разрешения, на которое можно разбить кадр.

Оценка параметров видимого движения (положения) объектов. Функция правдоподобия $P_{\Omega set/\Omega sky}$ множества измерений серии кадров $\Omega_{set}$ на $N_{fr}$ кадрах вводится путем перемножения $N_{fr}$ сомножителей, определенных выражением (1). В виду того, что сомножитель $P_{\Omega nfr(0)/\Omega sky}$ в дальнейшем сокращается, он будет опущен.

Уравнения максимального правдоподобия имеют вид:

$$\frac{\partial P_{\Omega nfr/\Omega sky}}{\partial\theta_j} = \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \frac{1}{\sum\limits_{H_{nfr}=0}^{\min(Q_{nfr},Q_{sky})} P_{\Omega nfr\,(H_{nfr})/\Omega sky}} \times$$

$$\times \sum_{Hnfr=0}^{\min(Q_{nfr},Q_{sky})} \frac{\partial P_{\Omega nfr\;(H_{nfr})/\Omega sky}}{\partial\theta_j} = 0\,, \qquad (7)$$

где $\frac{\partial P_{\Omega nfr\;(Hnfr)/\Omega sky}}{\partial\theta_j} = P_{\Omega nfr\;(0)/\Omega sky} \times$

$$\times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \cdots \sum_{j_{Hnfr}=j_{Hnfr-1}+1}^{Q_{sky}} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{Q_{nfr}} \cdots \sum_{\substack{i_{Hnfr}=1 \\ for \forall\alpha,\beta}}^{Q_{nfr}} \left[ \prod_{Iobj=1}^{H_{nfr}} \frac{\mathrm{D}_{\theta j}}{1\text{-}\mathrm{D}_{\theta j}} \cdot \frac{1-F_{EOR}}{F_{EOR}\cdot C} \cdot \frac{P_A(A_{Iobjn}/\theta_j)}{P_A(A_{Iobjn}/0)} \right] \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\theta_j} \cdot \prod_{Iobj=1}^{Í_{nfr}} P_K(Y_{KIobjn}/\theta_j). \qquad (8)$$

При $f_n(x) \neq 0$, $(n = \overline{1,N})$ справедливо тождество:

$$\frac{\partial}{\partial x}\prod_{n=1}^{N} f_n(x) = \left[\prod_{n=1}^{N} f_n(x)\right] \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{f_n(x)} \cdot \frac{\partial \mathrm{f_n}(x)}{\partial x}\,, \qquad (9)$$

Используя тождество (9), выражение (8) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial P_{\Omega nfr\,(Hnfr)/\Omega sky}}{\partial\theta_j} = P_{\Omega nfr(0)/\Omega sky} \times$$

$$\times \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \cdots \sum_{j_{Hnfr}=j_{Hnfr-1}+1}^{Q_{sky}} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{Q_{fr}} \cdots \sum_{\substack{i_{Hnfr}=1 \\ \text{for } \forall\alpha,\beta}}^{Q_{fr}} \left( \prod_{Iobj=1}^{H_{nfr}} P_K(Y_{KIobj}/\theta_j) \right) \times$$

$$\times \left( \prod_{Iobj=1}^{H_{nfr}} \frac{D_{\theta j}}{1-D_{\theta j}} \cdot \frac{1-F_{EOR}}{F_{EOR}\cdot C} \cdot \frac{P_A(A_{Iobjn}/\theta_j)}{P_A(A_{Iobjn}/0)} \right) \sum_{Iobj=1}^{H_{nfr}} \frac{1}{P_K(Y_{KIobjn}/\theta_{j\mu})} \cdot \frac{\partial P_K(Y_{KIobjn}/\theta_j)}{\partial\theta_j}. \qquad (10)$$

Данное выражение имеет смысл при условии, что ни один сомножитель последнего произведения не равен нулю. Указанное условие предполагается выполненным. В противном случае соответствующее данному произведению слагаемое тождественно нулю и может быть опущено.

В последней сумме отличным от нуля может быть не более одного слагаемого. Остальные слагаемые можно исключить, так как они соответствуют другим звездам и производная от них по параметрам видимого движения (положения) $j$-й звезды тождественна нулю. Кроме того, согласно гипотезе о сочетании измерений, которой соответствует данное слагаемое, $j$-й небесный объект может не иметь подтверждения в виде измерения.

Введем переменную $\psi_{jni}$, которая равна единице, если в последней сумме выражения (10) используется i-е измерение с координатами $Y_{KIobj}$, а производная берется по параметрам $j$-го объекта. Иными словами:

$$\Psi_{jni} = \begin{bmatrix} 1, \; при \quad i_\eta = i \quad и \quad j_\eta = j, \\ 0, \; в \;\; противном \;\; случае. \end{bmatrix} \tag{11}$$

Всего на $n_{fr}$-м кадре $Q_{nfr}$ (индекс $n_{fr}$ ранее был опущен) измерений. Естественно, что каждое из них хотя бы по одному разу включено в гипотезы о сочетании измерений в качестве измерения от $j$-го объекта. Последнее позволяет при приведении подобных вынести вероятности $P_K(Y_{KIobjn}/\theta_j)$ и их производные за знак сумм. При этом выражение (10) примет вид:

$$\frac{\partial P_{\Omega nfr(Hnfr)/\Omega sky}}{\partial\theta_j} = \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \frac{1}{P_K(Y_{KIobj}/\theta_j)} \cdot \frac{\partial P_K(Y_{KIobj}/\theta_j)}{\partial\theta_j} \cdot P_{\Omega nfr\,(0)/\Omega sky} \times$$

$$\times \left[ \sum_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \cdots \sum_{j_H=j_{Hnfr-1}+1}^{Q_{sky}} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha \neq i_\beta}}^{Q_{nfr}} \cdots \sum_{\substack{i_{Hnfr}=1 \\ for\ \forall\alpha,\beta}}^{Q_{nfr}} \left( \prod_{I_{obj}=1}^{H_{nfr}} \frac{D_{\theta j}}{1-D_{\theta j}} \cdot \frac{1-F_{EOR}}{F_{EOR}\cdot C} \cdot \frac{P_A(A_{Iobjn}/\theta_j)}{P_A(A_{Iobjn}/0)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left( \prod_{\eta=1}^{H_{nfr}} P_K(Y_{KIobjn}/\theta_j) \right) \cdot \psi_{Iobjn} \right]. \tag{12}$$

При подстановке выражения (2) и выражения для производной (12) в уравнение (7), с учетом всех гипотез о количестве измерений от звезд, будет получено уравнение максимального правдоподобия:

$$\sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} \frac{1}{P_K(Y_{KIobjn}/\theta_j)} \cdot \frac{\partial P_K(Y_{KIobjn}/\theta_j)}{\partial\theta_j} = 0\,, \tag{13}$$

где

$$\lambda_{jni} = \frac{\sum\limits_{H_n=1}^{\min(Q_{nfr},Q_{sky})} \left[ \sum\limits_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum\limits_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \cdots \sum\limits_{j_{Hnfr}=j_{Hnfr-1}+1}^{Q_{sky}} \sum\limits_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha\neq i_\beta}}^{Q_{nfr}} \cdots \sum\limits_{\substack{i_{Hnfr}=1 \\ for\ \forall\alpha,\beta}}^{Q_{nfr}} \left( \prod\limits_{Iobj=1}^{H_{nfr}} P_K(Y_{KIobjn}/\theta_j) \right) \right.}{\sum\limits_{H_{nfr}=0}^{\min(Q_{nframe},Q_{sky})} \left[ \sum\limits_{j_1=1}^{Q_{sky}} \sum\limits_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}} \cdots \sum\limits_{j_{Hnfr}=j_{Hnfr-1}+1}^{Q_{sky}} \sum\limits_{\substack{i_1=1 \\ i_\alpha\neq i_\beta}}^{Q_{nfr}} \cdots \sum\limits_{\substack{i_{Hnfr}=1 \\ for\ \forall\alpha,\beta}}^{Q_{nfr}} \left( \prod\limits_{Iobj=1}^{Hnfr} P_K(Y_{KIobjn}/\theta_j) \right) \right.} \times$$

$$\times\frac{\left.\left(\prod_{Iobj=1}^{H_{nfr}}\frac{D_{\theta\,Iobjn}}{1-D_{\theta\,Iobjn}}\cdot\frac{1-F_{EOR}}{F_{EOR}\cdot C}\cdot\frac{P_A(A_{Iobjn}/\theta_j)}{P_A(A_{Iobjn}/0)}\right)\cdot P_{\Omega nfr(0)/\Omega sky}\cdot\psi_{Iobjn}\right]}{\left.\left(\prod_{Iobj=1}^{H_{nfr}}\frac{D_{\theta\,Iobjn}}{1-D_{\theta\,Iobjn}}\cdot\frac{1-F_{EOR}}{F_{EOR}\cdot C}\cdot\frac{P_A(A_{Iobjn}/\theta_j)}{P_A(A_{Iobjn}/0)}\right)\cdot P_{\Omega nfr(0)/\Omega sky}\right]}.\quad(14)$$

При использовании первой статистической модели (количество ложных измерений распределено по закону Пуассона с известной интенсивностью) выражение, подобное выражению (14), примет вид:

$$\lambda_{jni}=\frac{\sum_{H_{nc}=1}^{\min(Q_{nfr},Q_{sky})}\left\{\sum_{j_1=1}^{Q_{sky}}\sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}}\ldots\sum_{j_H=j_{H-1}+1}^{Q_{sky}}\sum_{\substack{i_1=1\\ i_\alpha\neq i_\beta}}^{Q_{nfr}}\ldots\ldots\sum_{\substack{i_H=1\\ \text{for }\forall\alpha,\beta}}^{Q_{nfr}}\prod_{Iobj=1}^{H_{nc}}\left[\frac{Q_{nfr}}{\mu\cdot C}\cdot P_{\hat{E}}(Y_{KIobjn}/\theta_j)\right]P_{\Omega nfr(0)/\Omega sky}\cdot\psi_{Iobjn}\right\}}{\sum_{H_{nc}=0}^{\min(Q_{nfr},\,Q_{sky})}\left\{\sum_{j_1=1}^{Q_{sky}}\sum_{j_2=j_1+1}^{Q_{sky}}\ldots\sum_{j_H=j_{H-1}+1}^{Q_{sky}}\sum_{\substack{i_1=1\\ i_\alpha\neq i_\beta}}^{Q_{nfr}}\ldots\ldots\sum_{\substack{i_H=1\\ \text{for }\forall\alpha,\beta}}^{Q_{nfr}}\prod_{Iobj=1}^{H_{nc}}\left[\frac{Q_{nfr}}{\mu\cdot C}\cdot P_{\hat{E}}(Y_{KIobjn}/\theta_j)\right]P_{\Omega nfr(0)/\Omega sky}\right\}}\quad(15)$$

Далее исследование проводится для одной из координат. Для упрощения математического описания, предполагается, что ошибки измерений по различным координатам одного объекта независимы. Следовательно, задача определения параметров видимого движения (положения) $j$-го объекта сводится к двум взаимно независимым задачам определения параметров видимого движения (положения) $j$-го объекта вдоль каждой из двух координат.

С учетом тождества $\exp'(x)=x'\exp(x)$ производная, входящая в (13), может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial P_K(Y_{K_{Iobj}}/\theta_j)}{\partial\theta_j}=N_{yjni}(\mathrm{y}_{jni}(\theta_\mathrm{j});\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{fr}\,i\,n})dy\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{2}\Delta y_{jni}^T\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{fr}\,i\,n}{}^{-1}\Delta y_{jni}\right)\quad(16)$$

где $\Delta y_{jni}=y_n(\theta_j)-y_{jni}$ – отклонение между положением j-го объекта и $i$-м измерением $n_{fr}$ -го кадра.

Подставив вместо $P_K(Y_{K_{Iobj}}/\theta_j)$ выражение (3), а вместо производной $\frac{\partial P_K(Y_{K_{Iobj}}/\theta_j)}{\partial\theta_j}$ выражение (16), каждое слагаемое уравнения (13) примет вид :

$$\lambda_{jni}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(-\frac{1}{2}\Delta y_{jni}^T\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{fr}\,i\,n}{}^{-1}\Delta y_{jni}\right).\quad(17)$$

Тем самым с учетом симметричности корреляционной матрицы уравнение максимального правдоподобия (13) примет вид:

$$\sum_{nfr=1}^{N_{fr}}\sum_{i=1}^{Q_{nfr}}\lambda_{jni}\Delta y_{jni}^T\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{fr}\,i\,n}{}^{-1}\frac{\partial\Delta y_{jni}}{\partial\theta_j}=0.\quad(18)$$

При этом $\Sigma_{jni}$ является диагональной матрицей для любых $j$, $i$, $n_{fr}$, а выражение (18) примет вид:

$$\sum_{n_{fr}=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \frac{\lambda_{jni}}{\sigma_{jni}^2} \Delta y_{jni} \frac{\partial \Delta y_{jni}}{\partial \theta_{jnfr}} = 0,$$

где $\sigma_{jni}$ – СКО ошибки оценки исследуемой координаты $j$-го объекта, содержащейся в $i$-ом измерении $n_{fr}$-го кадра.

Или с учетом уравнений соответствующих $N_{fr}$ параметрам видимого движения (положения) $j$-го объекта вдоль исследуемой координаты в матричной форме:

$$B_j^T \lambda_j \Sigma_j^{-1} \Delta y_{Iobj} = 0, \qquad (19)$$

где $B_j^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Delta y_{j11Iobj}}{\partial \theta_{j1}} & \dots & \dfrac{\partial \Delta y_{jN_{fr}Q_{nfr}Iobj}}{\partial \theta_{j1}} \\ . & \dots & . \\ \dfrac{\partial \Delta y_{j11Iobj}}{\partial \theta_{jNf}} & \dots & \dfrac{\partial \Delta y_{jN_{fr}Q_{nfr}Iobj}}{\partial \theta_{jNf}} \end{pmatrix}$;

$$\lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_{j11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{j12} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{jNfrQ_{fr}} \end{pmatrix};$$

$$\Sigma_j^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_{\mathrm{j}11}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sigma_{\mathrm{j}12}^2} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{\sigma_{\mathrm{j}NfrQfr}^2} \end{pmatrix};$$

$\Delta y_{jIobj} = y_{Iobj} - y_{Iobj}(\theta_j)$;

$y_{Iobj}^T = \{y_{11Iobj}, y_{12Iobj}, \dots, y_{1Q_{fr1}Iobj}, \dots, y_{NfrQfrIobj}\}$;

$y_{Iobj}^T(\theta_j) = \{y_{11Iobj}(\theta_j), y_{12Iobj}(\theta_j), \dots, y_{1Q_1Iobj}(\theta_j), \dots, y_{NfrQfrIobj}(\theta_j)\}$ –матрица экстраполяции;

$N_f$ – количество параметров видимого движения (положения).

В формировании указанных матриц принимают участие исследуемой координаты всех измерений на всех кадрах, от первой исследуемой координаты на первом кадре и до последней исследуемой координаты на последнем кадре.

Наличие различных элементов на каждом кадре в матрице экстраполяции $y_{Iobj}(\theta_j)$ вызвано необходимости учесть различное время формирования измерений на кадре или обзоре. Такая необходимость имеет место, когда проводится обзор, состоящий из многих кадров. При исследовании серии кадров одного и того же участка неба, по одному кадру на каждый обзор время формирования всех измерений кадра-обзора одинаково. Следовательно, при этом соответствующие элементы матрицы экстраполяции $y_{Iobj}(\theta_j)$ будут одинаковы.

Для полиномиальной модели движения объекта

$$y_{Iobj}(\theta_j) = B_j \theta_j,$$

$$\theta_j^T = \left\{\theta_{j1}, \theta_{j2}, ..., \theta_{jNf}\right\}.$$

Итак, теперь уравнение (19) можно переписать в виде:

$$B_j^T \lambda_j \Sigma_j^{-1} y_{Iobj} = B_j^T \lambda_j \Sigma_j^{-1} B_j \theta_j .$$

Или

$$\theta_j = \left(B_j^T \lambda_j \Sigma_j^{-1} B_j\right)^{-1} B_j^T \lambda_j \Sigma_j^{-1} y_{Iobj}. \qquad (20)$$

Оценка параметров видимого движения (положения) множества $\Omega_{sky}$ звезд исследуемого участка неба осуществляется путем параллельного или последовательного использования $Q_{sky}$ раз системы уравнений (20).

Так как находящиеся в правой части уравнения (20) коэффициенты расщепления зависят от искомого параметра $\theta_j$, то решение уравнения получается путем использования итерационной схемы метода простой итерации [11, 12, 13, 14].

При получении оценки (20) параметров движения (положения) $Q_{sky}$ близких объектов поочередно выполняются две процедуры. Первая – процедура расщепления (14) множества сформированных измерений на $(Q_{sky}+1)$ множество субизмерений. В результате данной операции каждое измерение будет расщепляться на субизмерения. Расщепление выполняется согласно значениям параметров множества звезд исследуемого участка неба $\Omega_{sky} = \{\theta_1, ..., \theta_j, ..., \theta_{Qsky}\}$, полученным на предыдущей итерации. На первой итерации метода при получении расщеплении используются поступающие извне начальные приближения параметров видимого движения (положения) $Q_{sky}$ близких объектов. При расщеплении также «отделяются» ложные измерения, для которых объекты не являются их источником или измерения, не соответствующие объектам исследуемого класса (например, ИСЗ, астероиды).

Результатом первой процедуры являются значения коэффициентов расщепления измерений $\lambda_{jni}$. Данные коэффициенты расщепления являются апостериорными вероятностями принадлежности $i$-го измерения $n_{fr}$-го кадра $j$-му объекту. Можно сказать, что каждое измерение расщепляется на ряд субизмерений, по количеству объектов, с учетом возможного наличия «ложных» измерений, с разным весом, но с одними и теми же координатами. Таким образом, имеет место нечеткая классификация [15], при которой определяется не факт безусловной принадлежности измерения тому или иному объекту, а лишь степень его относительной согласованности с каждым из объектов. Все измерения, сформированные на $N_{fr}$ кадрах, в той или иной мере (в зависимости от значения соответствующего коэффициента расщепления $\lambda_{jni}$) участвуют в формировании оценки параметров видимого движения (положения) каждого из $Q_{sky}$ объектов. То есть речь идет не об определении факта безусловной принадлежности измерений тому или иному объекту, а лишь об уточнении степени их относительной согласованности с параметрами видимого движения (положения) объектов.

Вторая процедура получения оценки (20) параметров движения (положения) $Q_{sky}$ близких объектов выполняет взаимно независимую оценку параметров видимого движения (положения) для каждого из $Q_{sky}$ объектов. Для этого параллельно может быть использовано $Q_{sky}$ вычислительных субпроцедур. На вход каждый из $Q_{sky}$ вычислительных субпроцедур поступают все сформированные измерения с соответствующими им коэффициентами расщепления $\lambda_{jni}$.

Сформированные оценки в качестве начального приближения поступают на процедуру расщепления получения оценки (20) параметров движения (положения) $Q_{sky}$ близких объектов. Итерационный процесс выполняется до тех пор, пока либо все коэффициенты расщепления $\lambda_{jni}$ на $k$-м и $(k-1)$-м шаге метода получения оценки (20) параметров движения (положения) близких объектов не станут практически попарно равны, либо, что то же самое, оценки $\hat{\Omega}_{Qsky(k-1)}$ и $\hat{\Omega}_{Qsky(k)}$ попарно практически совпадут:

$$\left|\hat{\theta}_{jk-1} - \hat{\theta}_{jk}\right| < \varepsilon_s ,$$

где $\varepsilon_s$ – наперед заданная малая величина, определяющая необходимую точность вычислений.

Таким образом, задачу определения параметров видимого движения (положения) $Q_{sky}$, с помощью выражения (13), можно свести к множеству из $Q_{sky}$ независимых задач определения параметров одного объекта с предшествующей задачей расщепления измерений путем вычисления коэффициентов расщепления $\lambda_{jni}$.

При больших «расстояниях» между объектами на кадре апостериорные вероятности $\lambda_{jni}$ получат свои предельные значения 0 и 1.

При этом оценки параметров видимого движения (положения) каждого из

$Q_{sky}$ объектов можно получить, с помощью процедуры:

$$\bar{\theta}_j = \left(B_j^T \Sigma_j^{-1} B_j\right)^{-1} B_j^T \Sigma_j^{-1} y_{Iobj}. \qquad (21)$$

Выражение (21) является частным случаем уравнения (20) и представляет собой традиционный вычислительный метод оптимальной оценки параметров видимого движения (положения) одиночного объекта [6, 7, 16, 17, 18] по фиксированной выборке методом наименьших квадратов. При этом необходимость в итерационной схеме отсутствует.

Выражение (20) является системой уравнений максимального правдоподобия оценки параметров движения (положения) объектов, в том числе близких объектов. Хотелось бы конкретизировать данную систему для модели линейной траектории вдоль каждой из координат в виду практической значимости данного частного случая. Пусть модель движения любого из Q объектов вдоль каждой из R координат имеет вид $y_{nfr} = y_0 + V\tau_{nfr}$. С целью снижения громоздкости приводимых выражений в последних предполагается, что относительное количество измерений от j–го объекта на $n_{fr}$–м кадре в общем количестве измерений, включая ложные $p_{i\,nfr}$ известно, а дисперсии оценок одинаковых координат положения объектов на любом из обзоров известны и одинаковы. Снятие указанных ограничений не представляет существенных трудностей [19]. Итак, производные, входящие в уравнение (18), могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial P_{y/\theta}(y_{nfri}/\theta_j)}{\partial y_{0j}} = \frac{\partial}{\partial y_{0j}}\left[P_{\theta Ajnfr}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_{nfri} - y_{0j} - V_j\tau_{nfri}\right)^2\right\}\right] =$$

$$= P_{\theta Ajnfr} N_{y_{nfri}}\left(y_{0j} + V_j\tau_{nfri}; \sigma^2\right)\frac{y_{nfri} - y_{0j} - V_j\tau_{nfri}}{\sigma^2}; \qquad (22)$$

$$\frac{\partial P_{y/\theta}(y_{nfri}/\theta_j)}{\partial V_j} = P_{\theta Ajnfr} N_{y_{nfri}}\left(y_{0j} + V_j\tau_{nfri}; \sigma^2\right)\frac{n_{nfri}(y_{nfri} - y_{0j} - V_j n_{nfri})}{\sigma^2}, \qquad (23)$$

где $N_x(m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right)$;

$\tau_{nfri}$– время формирования $i$-го измерения на $n_{fr}$ -го кадре (при исследуемой постановке задачи совпадает с временем привязки кадра).

В рассматриваемом случае, когда обзор состоит из одного кадра все измерения одного кадра, а значит одного обзора, имеют одно время формирования.

С учетом $\sigma_{jni} > 0$, а также выражений (22) и (23), подсистема уравнений максимального правдоподобия для одной координаты и одного объекта имеет вид [7]:

$$\begin{cases} \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} (y_{nfri} - y_{0j} - V_j \tau_{nfri}) = 0; \\ \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} (y_{nfri} - y_{0j} - V_j \tau_{nfri}) \tau_{nfri} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Решение подсистемы уравнений (24) удобно представить в виде:

$$\begin{cases} \hat{y}_{0j} = \dfrac{D_j C_j - B_j D_{nfrj}}{A_j C_j - B_j^2}; \\ \hat{V}_j = \dfrac{D_{nfrj} - \hat{y}_{0j} B_j}{C_j}. \end{cases} \tag{25}$$

где $A_j = \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni}$; $B_j = \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} \tau_{nfri}$; $C_j = \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} \tau_{nfri}^2$;

$$D_j = \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} y_{nfri}; \qquad D_{nfrj} = \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} \tau_{nfri} y_{nfri}.$$

Особенно практически значимым случаем в рамках задачи, рассматриваемой в статье, является случай неподвижных объектов. При этом оцениваемыми параметрами являются не параметры движения, а координаты положения объекта, неизменные на исследуемой серии кадров.

Не трудно показать, что искомые оценки координат положения объекта могут быть получены следующим образом:

$$\begin{cases} x_{nfr}(\Theta_j) = \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} x_{nfri}; \\ y_{nfr}(\Theta_j) = \sum_{nfr=1}^{N_{fr}} \sum_{i=1}^{Q_{nfr}} \lambda_{jni} y_{nfri}. \end{cases} \tag{26}$$

Метод формирования коэффициентов расщепления $\lambda_{jni}$. Каждое слагаемое числителя (без учета предиката $\psi_{jni}$) и знаменателя (14) является вероятностью формирования очередной гипотезы о принадлежности измерений $n_{fr}$-го кадра $Q_{sky}$ объектам. При этом, первая часть вложенных сумм соответствует назначению $H_{nfr}$ объектов подтвержденными на $n_{fr}$-ом кадре, а вторая часть – назначению $H_{nfr}$ измерений объектам, то есть подтверждающими объекты. Суммирование организовано таким образом, что каждому конкретному объекту назначается свое конкретное измерение. Тем самым вычисление апостериорной вероятности принадлежности $i$-го измерения $n_{fr}$-го кадра $j$-му объекту (14) соответствует вычислению суммы вероятностей всех гипотез о сочетании измерений на кадре с учетом их пропусков, в которых данное $i$-е измерение $n_{fr}$-го кадра соответствует $j$-му объекту. Включение в данную сумму только гипотез, соответствующих принадлежности данного измерения данному объекту, осуществляется за счет использования введенных предикатов $\psi_{jni}$ (11). Так как при $H_{nfr}=0$ ни один предикат не равен единице, то в числителе (14) данная сумма начинается с $H_{nfr}=1$.

При этом формирование коэффициентов расщепления (апостериорных вероятностей) $\lambda_{jni}$ (14) на $n_{fr}$-м кадре осуществляется только на основе измерений $n_{fr}$-го кадра. Из этого следует, что в данном случае перебор гипотез о сочетании измерений, по отношению к глобальному перебору вариантов существенно упрощен.

Вычислительный метод определения коэффициентов расщепления (апостериорных вероятностей) $\lambda_{jni}$ может иметь следующий вид. На каждом кадре отводится матрица размера $(Q_{sky}+1)\cdot Q_{nfr}$.

Каждая строка таких матриц соответствует одному измерению. Нулевой их столбец соответствует случаю, когда измерение в рамках проверки очередной гипотезы о сочетании измерений признано «ложным». В свою очередь $j$-й столбец соответствует признанию измерения принадлежащему $j$-му объекту. В $ji$-м элементе $n_{fr}$-ой матрицы находится сумма вероятностей гипотез о сочетании измерений, в которых $i$-е измерение $n_{fr}$-го кадра принадлежит $j$-му объекту.

Для формирования коэффициентов расщепления (апостериорных вероятностей) на каждом кадре необходимо организовать последовательность вложенных друг в друга переборов (циклов): по количеству измерений от объектов $H_{\mathrm{nfr}}=\overline{0,\min(Q_{\mathrm{nfr}},Q_{\mathrm{sky}})}$; по вариантам отбора $H_{nfr}$ из $Q_{nfr}$ измерений для назначения их объектам (всего $C_{Qnfr}^{H_{nfr}}=\dfrac{Q_{nfr}!}{H_{nfr}!(Q_{nfr}-H_{nfr})!}$ вариантов); по вариантам отбора $H_{nfr}$ из $Q_{sky}$ объектов для назначения их подтвержденными (всего $C_{Qsky}^{H_{nfr}}=\dfrac{Q_{sky}!}{H_{nfr}!(Q_{sky}-H_{nfr})!}$ вариантов); по вариантам сочетаний объект – измерение (всего $H_{nfr}!$ вариантов).

Далее внутри указанных переборов (циклов) следует вычислить значение вероятности очередной гипотезы о сочетании измерений. При этом отклонения между координатами объекта и ожидаемым его положением вычисляются в соответствии с оценкой параметров его видимого движения (положения), полученной на предыдущей итерации.

Далее организовывается вложенный в предыдущие переборы (циклы) перебор (цикл) по количеству измерений $Q_{nfr}$ на $n_{fr}$-ом кадре (по строкам $n_{fr}$-й матрицы). Если в рамках очередной гипотезы измерение признано «ложным» – значение вероятности записывается с накоплением на нулевую позицию строки. Если измерение признано принадлежащим $j$-му объекту – с накоплением на $i$-е измерение.

Если при $Q_{sky} = 3$, $Q_{nfr} = 5$ первое, второе, третье измерения признаны соответствующим второму, третьему и первому объектам соответственно, а два последние измерения признаны «ложными», то запись значений вероятностей гипотез будет произведена на позиции, отмеченные в таблице 1 крестиками.

*Табл. 1. Пример гипотезы о сочетании измерений*

| $Q_{sky}$ \ $Q_{nfr}$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | x | |
| 2 | | | | x |
| 3 | | x | | |
| 4 | x | | | |
| 5 | x | | | |

По окончании на $n_{fr}$-ом кадре всех указанных выше переборов (циклов) все элементы $n_{fr}$-й матрицы нормируются – делятся на суммарную вероятность гипотез о принадлежности измерений $n_{fr}$-го кадра объектам.

Вычислительный метод оценки параметров видимого движения (положения) объектов, основанный на решении уравнений максимального правдоподобия (18) с апостериорными вероятностями принадлежности $i$-го измерения $n_{fr}$-го кадра $j$-му объекту $\lambda_{jni}$, вычисленными в соответствии с (14), подобен [6], [20] вычислительному методу с совместной вероятностной идентификацией данных (СВИД). Кроме того, вычисление апостериорных вероятностей в обоих вычислительных методах эквивалентно. Вместе с тем в СВИД в качестве начального приближения параметров видимого движения (положения) объектов используются их оценки, полученные на предыдущем кадре. В уточнении оценок на $n_{fr}$-ом кадре используются только измерения $n_{fr}$-го кадра. При этом используется только одна итерация. В этой связи СВИД имеет меньшую точность оценок параметров видимого движения (положения) объектов по отношению к разработанному вычислительному методу тем в большей степени, чем ближе объекты, больше их количество и хуже начальное приближение, о чем свидетельствуют результаты статического моделирования.

**5. Выводы**

В статье разработан итерационный вычислительный метод оценки параметров положення и видимого движения известного количества близких объектов (18), (14), (20), (25), (26). Вычислительный метод основан на покадровом совместном расщеплении измерений. Разработанный вычислительный метод оценки параметров движения (положения) известного количество близких объектов является параллельным аналогом метода совместной вероятностной идентификации данных [6, 20]. Его использование целесообразно при наличии высокой плотности объектов в исследуемых участках небесной сферы. Полученные результаты можно легко обобщить на случай неизвестного количества объектов. Целесообразным выглядит сравнительный анализ объема вычислений и точности полученных оценок с аналогичными процедурами, основанными на расщеплении, выполняемом независимо для каждого измерения каждого кадра исследуемой серии [21, 22].

ЛИТЕРАТУРА

1. Саваневич В.Е., Брюховецкий А. Б., Кожухов А. М., Диков Е. Н., Власенко В. П. Программа CoLiTec автоматизированного обнаружения небесных тел со слабым блеском // Космічна наука і технологія. – 2012. – т.18. – №1. – С. 39 – 46.
2. Zacharias, N.; Finch, C. T. et al (2013). The Fourth US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4). The Astronomical Journal, 145(2), id. 44, 14.
3. Zacharias N. The fourth U.S. Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC4) // Norbert Zacharias for the UCAC team, USNO, Washington DC. – July 2012 // [Электронный ресурс] – Режим доступа к ресурсу:http://ad.usno.navy.mil/ucac/readme_u4v5 – Название с экрана.
4. Fedorov P. N., Myznikov A. A., Akhmetov V. S. The XPM Catalogue: absolute proper motions of 280 millionstars // MNRAS. – 2009. – V. 393. – P. 133-138
5. Hog E.; Fabricius C.; Makarov V. V. The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars // Astronomy and Astrophysics, – 2000. – V. 355. – P. L27-L30
6. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию – К.: Издательство КвіЦ, 2000. – 428 с.
7. Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации – М.: "Радио и связь", 1986 - 352 с.
8. Bar–Shalom Y. Kalman Filter Versus IMM Estimator: When Do We Need // IEEE Trans. on AES. – 2003. – Vol. 39, № 4. – P. 1452 – 1456.
9. Бакут П.А., Жулина Ю.В., Иванчук Н.А. Обнаружение движущихся объектов. – М.: «Сов. Радио». – 1980. – 288 с.
10. Саваневич В.Е. Статистическое описание множества позиционных измерений на серии кадров участка небесной сферы / В.Е. Саваневич, Я.С. Мовсесян, Н.Ю. Дихтяр
11. Wang, Y. & Witten, I. H. The estimation of mixing distributions by approximating empirical measures. – Dept. of Computer Science, University of Waikato, New Zealand. –1999

12. Granino A. Korn, Theresa M. Korn Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. – General Publishing Company. – 2000. –P. 1151
13. Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ.. М., 1975
14. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики – М.: Наука, 1966 г., 664 стр.
15. Айвазян С.А. Бухштабер В.М., Енюков И.С, Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
16. Ермаков С.М. Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента – М.: Наука, 1987. – 320 с.
17. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning Springer-Verlag New York – 2009 – P.745
18. Bühlmann P. Statistics for High-Dimensional Data (Springer Series in Statistics) – Springer; 2011 edition (April 11, 2013) – P. 558.
19. Саваневич В.Е. Определение координат статистически зависимых объектов на дискретном изображении // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – № 1. – С. 4 – 8.
20. Kuo-Chu Chang, Y. Bar-Shalom. Join Probabilistic Date Association for Multitarget Tracking whis Possibly Unrezolved Measurements and Maneuvers // IEEE Trans. on AC. – Vol. 29. – №7. – 1984. – P. 585–594.
21. Саваневич В.Е., Логачев С.В., Пугач А.В. Бесстробовый алгоритм оценки параметров близких траекторий. // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – №2.– С. 4 - 8.
22. Дихтяр Н. Ю. Мовсесян Я.С., Саваневич В.Е., Брюховецкий А.Б. Отождествление измерений кадра с формулярами каталога // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т». – Вып. 67. – Х., 2015. – С. 197-215


Надійшла у першій редакції 08.10.2015, в останній - 02.11.2015.