УДК 517.977.5

Модель оптимизации стратегии профилактических обслуживаний технической системы

Н. С. Подцыкин

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Рассмотрена задача поддержания работоспособности стареющей технической системы на оптимальном уровне с учетом состояния, которое определяет уровень ее работоспособности. Рассмотрен случай, когда это достигается применением управлений в плановые моменты контроля. Действие управления обновляет систему на случайную величину, зависящую от вида управления. Построена математическая модель системы. На ее основе решены задачи выбора оптимального числа текущих управлений до применения управления, соответствующего капитальному ремонту, и ε-оптимальной стратегии управления.

Ключевые слова: *математическая модель, износ технической системы, работоспособность системы, стратегия управления, состояние системы.*

Розглянуто задачу підтримки працездатності старіючої технічної системи на оптимальному рівні з урахуванням стану, який визначає рівень її працездатності. Розглянуто випадок, коли це досягається застосуванням управлінь в планові моменти контролю. Дія управління оновлює систему на випадкову величину, що залежить від виду управління. Побудовано математичну модель системи. На її основі вирішені завдання вибору оптимального числа поточних управлінь до застосування управління, відповідного капітального ремонту, і ε-оптимальне стратегії.

Ключові слова: *математична модель, знос технічної системи, працездатність системи, стратегія управління, стан системи.*

The problem of maintenance of operability of the growing old technical system at an optimum level taking into account a state which determines the level of its working capacity is considered. The case when it is reached by application of managements at the planned moments of control is considered. Action of management updates system on the random variable depending on a type of management. The mathematical model of system is constructed. On its basis problems of a choice of optimum number of the current managements before application of the management corresponding to capital repairs, and ε-optimum strategy of management are solved.

Key words: *mathematical model, wear of technical system, capacity of system, strategy of management, state of system.*

1. Введение

В процессе эксплуатации все технические системы изнашиваются, вероятность отказа увеличивается, а качество функционирования снижается. На практике для поддержания работоспособности системы на приемлемом уровне проводятся регулярные профилактические обслуживания и ремонты. Обычно стратегия применения профилактик определяется утвержденным регламентом, в котором заданы период и количество профилактических обслуживаний до капитального ремонта. Применение профилактики или ремонта направлено на уменьшение износа, которое далее будем считать как улучшение состояния системы. Степень улучшения состояния под действием профилактики и ремонта, как показывает практика, не детерминирована. Можно говорить лишь о вероятностном распределении на множестве всех возможных улучшений. Следует предположить, что тип распределения и его параметры зависят от системы и конкретного содержания профилактики или ремонта. Оценка распределения может быть получена обработкой доступной статистической информации. Использование этой информации при построении модели позволит выбрать более эффективную стратегию управления, чем заданную регламентом. Действительно, регламентом определено оптимальное правило использования профилактик и ремонтов для некоторой усредненной системы данного типа. Особенности конкретной системы, в частности, скорость износа, которая может зависеть не только от внешних факторов эксплуатации, но и от заложенных внутренних факторов при ее создании, не учитываются. Отсюда следует, что моделирование системы на основе ее состояния обеспечит более эффективное использование соответствующей системы.

Состояние системы определяется набором информативных параметров. Выбор информативных параметров, оценка состояния по значениям этих параметров рассмотрены в теории распознавания образов [1]. Далее считаем, что состояние рассматриваемой системы определено и их значения составляют отрезок прямой $[0,1]$.

2. Математическая модель

Пусть $E=[0,1]$ - множество состояний системы с элементами $x \in E$. Состоянию $x=0$ соответствует система с максимальной производительностью и минимальной вероятностью отказа, а состоянию $x=1$- полностью изношенная система, работа которой не приносит доход. Эволюция системы определяется случайным процессом $\eta(t,z)$, $t\in[0,\tau]$, $z \in E$, заданным на вероятностном пространстве (Ω, F, P) со значениями в измеримом пространстве (R,B), где R - числовая прямая, B - борелевская σ-алгебра. z - начало траекторий процесса после реализации управления.

Множество управлений $Y = Y_1 \cup Y_2$ составлено из элементов $y_i \in Y_1$, $i=1,..,l$, применяемых в качестве текущих профилактических обслуживаний, и элементов $y_i \in Y_2$, $i=l+1,..,m$, применяемых в качестве ремонтов. Применение управления $y \in Y$ в состоянии $x \in E$ через интервал времени t_y определяет распределение вероятностей на множестве состояний E, которое задается плотностью распределения вероятностей $f_y(z|x)$, отличной от 0 на множестве $[0,x] \in E$. Здесь через t_y обозначена длительность реализации управления y, в течение которого система простаивает. Будем допускать, что длительность простоя t_y зависит от принадлежности y к Y_1 или к Y_2. Пусть $z \in E$- состояние, наблюдаемое после применения управления. Обозначим через $f_\eta(x|z)$ - плотность распределения вероятностей на множестве состояний через интервал времени τ в следующий момент контроля. Предполагается, что эта плотность отлична от 0 на множестве $[z,1] \in E$.

Пусть $\nu(x)$ - интенсивность приносимого системой дохода в состоянии x, при условии, что она работает. Стоимость управления $y \in Y$, примененного в состоянии $x \in E$, обозначим через $r(x, y)$. Система рассматривается на неограниченном интервале времени.

Измеримое отображение $\psi : E \to Y$ назовем решающей функцией. Последовательность решающих функций $\pi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{k+1})$ назовем стратегией управления. Будем предполагать, что выбранная стратегия π применяется на всех периодах T. Такое предположение является обобщением известного определения стационарной стратегии [2].

Зафиксируем стратегию $\pi^0 = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{k+1})$. Для каждого $x \in E$ управление $\psi_i(x) \in Y_1$ при $i = 1,...,k$ и $\psi_{k+1}(x) \in Y_2$. Пусть в начале периода T, перед применением управления, наблюдалось состояние $x^1 \in E$ и на этом периоде система управлялась стратегией π^0. Обозначим состояние перед применением управления на i-ом периоде τ через x^i, а после применения управления - z^i, $i = 1,...,k+1$, Вычислим среднюю величину дохода в единицу времени $w(x^1, \pi^0)$ на периоде T. Для этого необходимо знать условные плотности распределения вероятностей состояния x^i, $i = 2,...,k+2$, перед применением управления в начале i-го периода τ и, затем, суммарный доход за весь период T.

В условиях сделанных предположений плотность распределения вероятностей $p(x^i)$ можно найти последовательно для $i = 2,...,k+2$:

$$p(x^2) = \int_0^{\min(x^1, x^2)} f_\eta(x^2 | z^1) f_{\psi_1(x^1)}(z^1 | x^1) dz.^1$$

$$p(x^i) = \int_0^1 \left\{ \int_0^{\min(x^{i-1}, x^i)} f_\eta(x^i | z^{i-1}) f_{\psi_{i-1}(x^{i-1})}(z^{i-1} | x^{i-1}) dz^{i-1} \right\} p(x^{i-1}) dx^{i-1}, \quad i = 3,...,k+2.$$

Оценку суммарного дохода $v(x^1, x^{k+1})$ на периоде T найдем последовательно вычислив

$$v(x^1, x^2) = \int_0^{\min(x^1, x^2)} \int_0^\tau \nu\left(\frac{t}{\tau}(x^2 - z^1) + z^1 \right) f_{\psi_1(x^1)}(z^1 | x^1) dt dz^1 - r(x^1, \psi_1(x_1)), \psi_1(x^1) \in Y_1$$

$$v\left(x^1, x^i\right) = \int_0^1 \left\{ \int_0^{\min\left(x^{i-1}, x^i\right)} \int_0^{\tau} v\left(\frac{t}{\tau}\left(x^i - z^{i-1}\right) + z^{i-1}\right) f_{\psi_{i-1}\left(x^{i-1}\right)}\left(z^{i-1} \middle| x^{i-1}\right) dt dz^{i-1} - \right.$$

$$\left. - \left(x^{i-1}, \psi_{i-1}\left(x^{i-1}\right)\right) + v\left(x^1, x^{i-1}\right) \right\} \cdot p\left(x^{i-1}\right) dx^{i-1}, \qquad i = 3, ..., k+2.$$

Обозначим $v\left(x^1\right) = \int_0^1 v\left(x^1, x^{k+2}\right) p\left(x^{k+2}\right) dx^{k+2}$. Отсюда получаем, что

$$w\left(x^1, \pi^0\right) = \frac{1}{(k+1)\tau + k \cdot t_1 + t_2} v\left(x^1\right), \tag{1}$$

где $t_1 = t_y$ для $y \in Y_1$, $t_2 = t_y$ для $y \in Y_2$.

Вычислим переходную плотность распределения вероятностей $q\left(x^{k+2} \middle| x^1, \pi^0\right)$ на периоде T. Заметим, что найденные выше условные плотности $p\left(x^i\right)$ значений состояний перед применением управления на i-ом периоде τ, определяют искомую плотность $q\left(x^{k+2} \middle| x^1, \pi^0\right)$ на периоде T. Именно

$$q\left(x^{k+2} \middle| x^1, \pi^0\right) = p\left(x^{k+2}\right). \tag{2}$$

3. Алгоритм решения задачи

Множество состояний $E = [0,1]$ разделим на подынтервалы длиной $\frac{1}{N}$. Дискретное множество состояний $\hat{E} = \left(x_1, ..., x_N\right)$ получим, выбрав соответствие $x_i \to \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right)$, $i = 1, ..., N$. Пусть $f : \hat{E} \to Y$ - решающая функция, определенная на $\hat{E}$. Пусть $\pi = \left(f_1, ..., f_{k+1}, f_1, ..., f_{k+1}, ...\right)$ - стратегия управления, заданная на неограниченной последовательности периодов T. Здесь k фиксировано и $k \le k_{\max}$. Далее положим, что стратегия π определяется двумя решающими функциями f и g, причем $f : \hat{E} \to Y_1$, $g : \hat{E} \to Y_2$, $f_i = f$ для $i = 1, ..., k$, $f_{k+1} = g$. Полученную стратегию назовем обобщенной стационарной.

Обозначим $(k+1)$ - шаговую матрицу переходных вероятностей, соответствующую периоду T, через $Q(f)$. Заметим, что здесь f определяется набором решающих функций $\left(f_1, ..., f_{k+1}\right)$, заданных на периоде T. Ее элементы $Q\left(x_i \middle| x_j, f\right)$, $x_i, x_j \in \hat{E}$, получены из (2) после дискретизации E. Вектор-столбец непосредственных доходов $w(f)$ с компонентами $w\left(x_i, f\right)$, $x_i \in \hat{E}$, получим из (1).

Пусть система управляется обобщенной стационарной стратегией $\pi = (f, f, ...)$. Начальное состояние $x \in \hat{E}$. Предположим, что матрица Q регулярна для любой решающей функции f [2]. Тогда величина среднего дохода в единицу времени составит величину [2]

$$\varphi(\pi)(x) = \frac{1}{n} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} Q^i(f) w(f), \tag{3}$$

причем $\varphi(\pi)(x)$ не зависит от x.

Для нахождения стратегии, максимизирующей значение φ, известны разные алгоритмы [2].

Далее рассмотрим задачу оптимизации количества k профилактических обслуживаний системы на периоде T и выбор ε-оптимальной стратегии управления. В основу метода решения задачи положим алгоритм, основанный на принципе сжатых отображений [2]. Приведем необходимые для этого сведения.

Пусть V - линейное пространство векторов размерности N. Каждому вектору $v \in V$ поставим в соответствие величину $\Delta v = \max_x v(x) - \min_x v(x)$. Она определяет полунорму в V. Пусть $S = \{c \in V : \Delta c = 0\}$. Как известно [3], на фактор-пространстве $\hat{V} = V / S$ функция Δ определяет норму. Далее, для определенности, пусть используемый представитель каждого класса смежности из $\hat{V}$ имеет нулевую первую компоненту.

Определим на V ряд операторов

$$Q(f)v = \sum_{z \in \hat{E}} v(z) Q(z | x, f(x)), \quad x \in \hat{E},$$

$$F(f)v = w(f) + Q(f)v,$$

$$Uv = \max_f F(f)v.$$

Теорема 1 [4]. Пусть $\pi = (f, f, ...)$ - стационарная стратегия, $\pi^* = (f^*, f^*, ...)$ - оптимальная стратегия и $v \in V$ - произвольный вектор. Обозначим $\Phi(\pi) = F(f)v - v$, $\overline{\Phi}(\pi) = \max_x \Phi(\pi)(x)$, $\underline{\Phi}(\pi) = \min_x \Phi(\pi)(x)$. Тогда $\underline{\Phi}(\pi) \le \varphi(\pi) \le \overline{\Phi}(\pi)$. Обозначим далее $\Phi = Uv - v$, $\overline{\Phi} = \max_x \Phi(x)$, $\underline{\Phi} = \min_x \Phi(x)$. Тогда $\underline{\Phi} \le \varphi(\pi^*) \le \overline{\Phi}$.

Следствие 1 [4]. Пусть $\pi^* = (f^*, f^*, ...)$ - оптимальная стратегия, $v_k, v_{k+1} \in \hat{V}$ и f_{k+1} удовлетворяют условиям: $v_{k+1} = Uv_k = F(f_{k+1})v_k$. Обозначим $\varepsilon = \|v_{k+1} - v_k\|$, $v_k, v_{k+1} \in \hat{V}$. Тогда решающая функция f_{k+1} определяет ε-оптимальную стратегию

Оператор U обозначим через $U^{(k)}$, если U максимизирует вектор $(w + Qv)$ по решающим функциям $f^{(k)}$ при фиксированном числе k.

Предлагается следующий оптимизационный алгоритм.

Выберем $\varepsilon > 0$.

1-й шаг алгоритма.

Выберем произвольно начальный вектор $v_0 \in V$.Обозначим $\kappa_0 = \{1,\ldots,k_{\max}\}$ - множество допустимого количества профилактических обслуживаний на периоде T. Для каждого $k \in \kappa_0$ вычислим $v_1^{(k)} = U^{(k)} v_0$. Обозначим через $f_1^{(k)}$ решающие функции, определяемые оператором $U^{(k)}$. Вычислим интервалы $\left(\underline{\varphi}_1^{(k)}, \overline{\varphi}_1^{(k)}\right)$, где $\underline{\varphi}_1^{(k)} = \min_x \left(U^{(k)} v_0 - v_0\right)(x)$, $\overline{\varphi}_1^{(k)} = \max_x \left(U^{(k)} v_0 - v_0\right)(x)$, $k \in \kappa_0$. Обозначим $S_1 = \bigcup_{k \in \kappa_0} \left(\underline{\varphi}_1^{(k)}, \overline{\varphi}_1^{(k)}\right)$. Исключим из S_1 все интервалы $\left(\underline{\varphi}_1^{(i)}, \overline{\varphi}_1^{(i)}\right)$ такие, для которых найдется хотя бы один интервал $\left(\underline{\varphi}_1^{(j)}, \overline{\varphi}_1^{(j)}\right)$, у которого $\underline{\varphi}_1^{(j)} > \overline{\varphi}_1^{(i)}$. Получим связное множество $S_1^{'}$, которое составлено, вообще говоря, из меньшего количества интервалов $\kappa_1 \subseteq \kappa_0$. Длину интервала $S_1^{'}$ обозначим через $\delta\left(S_1^{'}\right)$. Из Следствия 1 получаем, что выбирая любое значение $k \in \kappa_1$ и соответствующее этому значению решающую функцию $f_1^{(k)}$, получим стационарную стратегию $\pi_1 = \left(f_1^{(k)}, f_1^{(k)}, \ldots\right)$, которая по критерию (3) отличается от оптимальной стратегии на величину не более чем $\delta\left(S_1^{'}\right)$. Если $\delta\left(S_1^{'}\right) < \varepsilon$, то цель достигнута. Иначе переходим к следующему шагу алгоритма.

n-й шаг алгоритма.

Для каждого $k \in \kappa_{n-1}$ вычислим $v_n^{(k)} = U^{(k)} v_{n-1}^{(k)}$. Обозначим через $f_n^{(k)}$ решающие функции, определяемые оператором $U^{(k)}$. Вычислим интервалы $\left(\underline{\varphi}_n^{(k)}, \overline{\varphi}_n^{(k)}\right)$, где $\underline{\varphi}_n^{(k)} = \min_x \left(U^{(k)} v_{n-1}^{(k)} - v_{n-1}^{(k)}\right)(x)$ $\overline{\varphi}_n^{(k)} = \max_x \left(U^{(k)} v_{n-1}^{(k)} - v_{n-1}^{(k)}\right)(x)$, $k \in \kappa_{n-1}$. Обозначим $S_n = \bigcup_{k \in \kappa_{n-1}} \left(\underline{\varphi}_n^{(k)}, \overline{\varphi}_n^{(k)}\right)$. Исключим из S_n все интервалы $\left(\underline{\varphi}_n^{(i)}, \overline{\varphi}_n^{(i)}\right)$, для которого найдется интервал $\left(\underline{\varphi}_n^{(j)}, \overline{\varphi}_n^{(j)}\right)$ такой, что $\underline{\varphi}_n^{(j)} > \overline{\varphi}_n^{(i)}$. Получим множество $S_n^{'}$, составленное из интервалов с индексами k, образующими множество $\kappa_n \subseteq \kappa_{n-1}$. Заметим, что количество составляющих интервалов $S_n^{'}$, вообще говоря, уменьшается с каждым шагом алгоритма. Кроме того, сжатие оператора U [2] обеспечивает для каждого $k \in \kappa_n$ стремление к нулю при $n \to \infty$ интервалов $\left(\underline{\varphi}_n^{(k)}, \overline{\varphi}_n^{(k)}\right)$ и, следовательно, интервала $S_n^{'}$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное число шагов алгоритма n_0, когда будет достигнуто неравенство $\delta\left(S_{n_0}^{'}\right) < \varepsilon$.

4. Заключение

Модели профилактики технических систем, основанные на состоянии, позволяют находить более эффективные стратегии управления, чем обычно используемые на практике модели, основанные на “наработке на отказ”. Выше рассмотрена еще одна возможность повышения эффективности управления работоспособностью стареющих технических систем за счет выбора оптимального числа профилактических обслуживаний до планового ремонта. Предложенный оптимизационный алгоритм позволяет одновременно с выбором оптимального числа профилактических обслуживаний перед капитальным ремонтом находить ε-оптимальную стратегию применения управлений в зависимости от состояния, наблюдаемого в момент контроля. Практическая реализация предложенного метода оптимизации требует использования математической программы типа MAPLE, MATLAB. Применение полученных результатов предполагает возможность контроля параметров, определяющих работоспособность рассматриваемой системы. Выбор информативных параметров и правило определения состояния на их основе рассмотрено в теории распознавания образов [1].

Дальнейшее развитие предложенного подхода к оптимизации эффективности использования стареющих технических систем может быть направлено в сторону рассмотрения сложных систем. Новым шагом здесь будет обобщение полученных результатов на резервированные системы, системы, последовательно соединенные, в смысле надежности, и их комбинации. При этом возможны различные стратегии организации профилактических обслуживаний и ремонтов. Например, разработка метода нахождения оптимального периода контроля для всей системы и стратегии управления всеми ее подсистемами. Другим возможным подходом к оптимизации сложной системы является ее иерархическое представление. Оптимальные решения находятся для каждого уровня иерархии и реализуются, начиная с самого верхнего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания, М.: Высшая школа, 2004. – 262с.
2. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 175с.
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. – 443с.
4. Подцыкин Н.С. Оптимизация периода наблюдений в марковском процессе принятия решений. Вісник ХНУ, №629, Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, Випуск 3, Харків, 2004., с.25-32.

Надійшла – 23.11.2015.