УДК 539.3

Побудова комбінованого чисельно-аналітичного методу підвищеної точності для розрахунку задач оболонкових конструкцій

В. А. Дзюба

Черкаський національний університет імені Б. Хмельницького, Україна

В роботі наведений новий підхід до розрахунку з підвищеною точністю механічних характеристик оболонок змінної товщини. Запропонований метод зводиться до розв’язання СЛАР із використанням сплайнів та комбінованих ітераційних методів. Наукова новизна дослідження полягає у використанні сплайнів у ітераційній процедурі. Побудовано чисельно-аналітичний метод, що дає змогу отримати результати обчислень з підвищеною точністю. Проведена оцінка запропонованого методу на тестовому прикладі, модель точного розв’язку якого відома. Збіжність побудованої ітераційної процедури проілюстрована графічно.

Ключові слова: *крайова задача, апроксимація, сплайн, ітераційна схема, метод прогонки.*

В работе приведен новый подход к расчету с повышенной точностью механических характеристик оболочек переменной толщины. Предложенный метод сводится к решению СЛАУ с использованием сплайнов и комбинированных итерационных методов. Научная новизна исследования заключается в использовании сплайнов в итерационной процедуре. Построен численно-аналитический метод, который позволяет получить результаты вычислений с повышенной точностью. Проведена оценка предложенного метода на тестовом примере, модель точного решения которого известна. Графически проиллюстрирована сходимость построенной итерационной процедуры.

Ключевые слова: *краевая задача, аппроксимация, сплайн, итерационная схема, метод прогонки.*

This article represents a new approach, with which mechanical characteristics of the shells having variable thickness can be calculated with high accuracy. The proposed method reduces the problem to solving SLAE using splines and combined iterative methods. The iterative procedure uses splines, and this is the scientific novelty of the research. Numerical and analytical method that was intentionally developed makes it possible to obtain calculation results of high accuracy. The proposed method was assessed with the test example, having the known model of exact solution. The convergence of the constructed iterative procedure is illustrated graphically.

Key words: *boundary problem, approximation, spline, iterative scheme, tridiagonal matrix algorithm.*

1. Актуальність дослідження. Огляд публікацій по даній темі

При розв’язанні прикладних задач у різноманітних галузях техніки, можна спостерігати, що все частіш для потреб сучасної науки постають розрахунки пов’язані з великим об’ємом інформації, яка потребує опрацювання [1]. Зосередимо свою увагу на актуальності розробки розрахункових схем та обчислювального методу підвищеної точності для теорії оболонок.

У процесі створення новітніх конструкцій оболонки забезпечують високу міцність, жорсткість, теплоізоляційні характеристики. Питання дослідження обчислювальних методів теорії оболонок можна знайти у роботах Х. М.Муштарі, О. Т. Беккера, А.Т. Василенка, Я.М. Григоренка, П.О. Стеблянка, Дж. Кемпнера, А. В. Беляєва, Н. Я. Цимбельмана. Разом з цим виникають математичні та обчислювальні труднощі при виконанні граничних умов з достатньою точністю.

Прогресивні дослідження науковців в напрямі побудови ефективних методів обчислення механічних характеристик пластин та оболонок тісно пов'язані з розвитком сучасних ЕОМ [2, 3]. При підході до вибору методу розв'язання задач теорії оболонок, можливими варіантами є аналітичні та чисельні методи. Кожен з яких, в конкретній задачі, має свої переваги та недоліки, що обмежує його застосування. Використання чисельних методів не завжди ефективне, тому що їх розв'язання зводиться до розв'язання систем лінійних рівнянь великого порядку. Тому виникає необхідність до розробки чисельно-аналітичних методів для розв'язання задач оболонкових конструкцій [5].

2. Мета статті

Розробити комбінований метод на основі кінцево-різницевих апроксимацій похідних із залученням сплайнів для проведення розрахунку підвищеної точності задач оболонкових конструкцій змінної товщини.

3. Виклад основного матеріалу дослідження

Пропонується дослідити наступну систему диференціальних рівнянь у загальному вигляді

$$\begin{cases} U' = f_1(U,V) \\ V' = f_2(U,V) \end{cases} \tag{1}$$

із заданими крайовими умовами

$$\begin{aligned} U(0) &= U_* \\ V(L) &= V_* \end{aligned} \tag{1*}$$

Відомо, що систему (1) можна записати у різницевому вигляді з використанням класичних формул двоточкової апроксимації похідної. У цьому випадку ітераційну схему можна виконати за наступними розрахунковими формулами

$$\begin{array}{ll} x=0 & U_1^k = hf_{10}^{k-1} + U_0^{\,k-1} \\ x=x_1 & U_2^k = 2hf_{11}^{k-1} + U_0^{\,k-1} \\ x=x_2 & U_3^k = 2hf_{12}^{k-1} + U_1^{\,k-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x=x_i & U_{i+1}^k = 2hf_{1i}^{k-1} + U_{i-1}^{k-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x=x_{N-2} & U_{N-1}^k = 2hf_{1N-2}^{k-1} + U_{N-3}^{k-1} \\ x=x_{N-1} & U_N^k = 2hf_{1N-1}^{k-1} + U_{N-2}^{k-1} \\ x=x_N=L & U_N = h\left(f_{1N-1} + \dfrac{1}{2} f_{1N}\right) + \dfrac{U_{N-2}+U_{N-1}}{2} \end{array} \tag{2}$$

З метою покращення розрахунків звернемося до сплайн-апроксимації [4]. Відомі формули при фіксованих значеннях коефіцієнтів

$$n_0 = 8;\ k_0 = 1;\ k_1 = 11;\ k_2 = 18;\ k_3 = 9;\ k_4 = 2;\ k_5 = 3;\ k_6 = 6$$

$$\frac{1}{6h}\left[-k_1U_0 + k_2U_1 - k_3U_2 + k_4U_3\right] = f_{10};$$
$$\frac{1}{6h}\left[-k_4U_0 - k_5U_1 + k_6U_2 - k_0U_3\right] = f_{11};$$
$$\frac{1}{12h}\left[-k_0\left(U_4 - U_0\right) + n_0\left(U_3 - U_1\right)\right] = f_{12};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3}$$

$$\frac{1}{12h}\left[-k_0\left(U_{i+2} - U_{i-2}\right) + n_0\left(U_{i+1} - U_{i-1}\right)\right] = f_{1i};$$
$$\frac{1}{12h}\left[-k_0\left(U_N - U_{N-4}\right) + n_0\left(U_{N-1} - U_{N-3}\right)\right] = f_{1N-2};$$
$$\frac{1}{6h}\left[k_0U_{N-3} - k_6U_{N-2} + k_5U_{N-1} + k_4U_N\right] = f_{1N-1};$$
$$\frac{1}{6h}\left[-k_4U_{N-3} + k_3U_{N-2} - k_2U_{N-1} + k_1U_N\right] = f_{1N};$$

Користуючись виразами (3) виведемо розрахункові формули для організації ітераційної процедури в методі прогонки. Аналізуючи формули (3), бачимо, що для кінцевої точки $x = x_N = L$ існує два способи обчислення U_N, із врахування цих міркувань складемо лінійну комбінацію останніх двох формул, приймаючи $\alpha + \beta = 1$, матимемо

$$k_4U_N + k_5U_{N-1} - k_6U_{N-2} + k_0U_{N-3} = 6hf_{1N-1} \qquad (\times\alpha)$$
$$k_1U_N - k_2U_{N-1} + k_3U_{N-2} - k_4U_{N-3} = 6hf_{1N} \qquad (\times\beta)$$
$$\begin{gathered}\left[\alpha k_4 + (1-\alpha)k_1\right]U_N + \left[\alpha k_5 - (1-\alpha)k_2\right]U_{N-1} + \left[-\alpha k_6 + (1-\alpha)k_3\right]U_{N-2} + \\ + \left[\alpha k_0 - (1-\alpha)k_4\right]U_{N-3} = 6h\left[\alpha f_{1N-1} + (1-\alpha) f_{1N}\right]\end{gathered} \tag{4}$$

Введемо позначення, та знайдемо можливі проміжки значень для α

$$A_1 = \alpha k_4 + (1-\alpha)k_1 = 2\alpha + (1-\alpha)11 = 11 - 9\alpha,\ A_1 \in [11; 2]$$
$$A_2 = \alpha k_5 - (1-\alpha)k_2 = 3\alpha - (1-\alpha)18 = -18 + 21\alpha,\ A_2 \in [-18; 3]$$
$$A_3 = -\alpha k_6 + (1-\alpha)k_3 = -6\alpha + (1-\alpha)9 = 9 - 15\alpha,\ A_3 \in [9; -6]$$
$$A_4 = \alpha k_0 - (1-\alpha)k_4 = \alpha - (1-\alpha)2 = -2 + 3\alpha,\ A_4 \in [-2; 1]$$

Знайдемо допустимий діапазон значень α для стійкого розрахунку в ітераційній схемі Зейделя

а) $|A_1| > |A_2| \Rightarrow 11 - 9\alpha \geq 18 - 21\alpha, 12\alpha \geq 7, \alpha \geq \frac{7}{12}$

б) $|A_1| > |A_3| \Rightarrow 11 - 9\alpha \geq -9 + 15\alpha, 20 \geq 24\alpha, \alpha \leq \frac{5}{6}$

в) $|A_1| > |A_4| \Rightarrow 11 - 9\alpha \geq -2 + 3\alpha, 13 \geq 12\alpha, \alpha \leq \dfrac{13}{12}$

Виконавши обрахунки, приходимо до висновку, що для проведення стійкого розрахунку в ітераційній схемі Зейделя допустимим діапазоном для величини α є проміжок $0,58(3) \leq \alpha \leq 0,83(3)$.

Знайдемо оптимальне значення для α, коли $|A_2| = |A_3| \Rightarrow 18 - 21\alpha = -9 + 15\alpha, 27 = 36\alpha, \alpha = \dfrac{27}{36} = \dfrac{3}{4} = 0,75$, отже оптимальним значенням є $\alpha = 0,75$. Таким чином, при підстановці знайденого значення α у вираз (4), отримаємо кінцеву формулу для U_N

$$U_N = \frac{6}{17} h\left[3 f_{1N-1} + f_{1N}\right] + \frac{9}{17}\left[U_{N-1} + U_{N-2}\right] - \frac{1}{17} U_{N-3}. \tag{5}$$

Беручи до уваги формули (3), (5) запишемо розрахункові формули для прямого ходу методу прогонки для системи (1), (1*)

$$U_0 = U_*$$

$$U_1^k = \frac{1}{k_2}\left(6hf_{10}^{k-1} + k_1 U_0 + k_3 U_2^{k-1} - k_4 U_3^{k-1}\right)$$

$$U_2^k = \frac{1}{k_6}\left(6hf_{11}^{k-1} + k_4 U_0 + k_5 U_1^{k-1} + k_0 U_3^{k-1}\right)$$

$$U_3^k = \frac{1}{k_6}\left(6hf_{12}^{k-1} + k_4 U_1^{k-1} + k_5 U_2^{k-1} + k_0 U_4^{k-1}\right)$$

....

$$U_i^k = \frac{1}{k_6}\left(6hf_{1i-1}^{k-1} + k_4 U_{i-2}^{k-1} + k_5 U_{i-1}^{k-1} + k_0 U_{i+1}^{k-1}\right); i = 2,3,\ldots,N-1 \tag{6}$$

$$U_{i+1}^k = \frac{12h}{n_0} f_{1i}^{k-1} + U_{i-1}^{k-1} + \frac{k_0}{n_0}\left(U_{i+2}^{k-1} - U_{i-2}^{k-1}\right); i = 2,3,\ldots,N-2$$

$$U_N^k = \frac{6}{17} h\left(3 f_{1N-1}^{k-1} + f_{1N}^{k-1}\right) + \frac{9}{17}\left(U_{N-1}^{k-1} + U_{N-2}^{k-1}\right) - \frac{1}{17} U_{N-3}^{k-1}$$

Виведемо формули для зворотного ходу методу прогонки для цього скористаємося формулами (3). Проводячи аналогічні до прямого ходу міркування, стає зрозуміло, що обчислити V_0 можна двома способами, у зв'язку з цим складемо лінійну комбінацію перших двох рівнянь (3) за умови, що $\alpha + \beta = 1$

$$-k_1 V_0 + k_2 V_1 - k_3 V_2 + k_4 V_3 = 6hf_{20} \qquad (\times\alpha)$$

$$-k_4 V_0 - k_5 V_1 + k_6 V_2 - k_0 V = 6hf_{21} \qquad (\times\beta)$$

$$\begin{aligned} &-V_0\left[\alpha k_1 + k_4(1-\alpha)\right] + V_1\left[\alpha k_2 - k_5(1-\alpha)\right] + V_2\left[-\alpha k_3 + k_6(1-\alpha)\right] + \\ &+ V_3\left[\alpha k_4 - k_0(1-\alpha)\right] = 6h\left[\alpha f_{20} + f_{21}(1-\alpha)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Оптимальним значенням для стійкого розрахунку в ітераційній схемі Зейделя буде $\alpha = \frac{1}{4}$. Підставивши значення α у вираз (7) матимемо кінцеву формулу для обчислення V_0

$$V_0 = -\frac{6}{17}h\left[f_{20} + 3f_{21}\right] + \frac{9}{17}\left(V_1 + V_2\right) - \frac{1}{17}V_3 . \tag{8}$$

На основі формул (3), (8) запишемо формули зворотного ходу методу прогонки для системи (1) з крайовими умовами (1*)

$$\begin{gathered}
V_0^k = -\frac{6}{17}h\left[f_{20}^{k-1} + 3f_{21}^{k-1}\right] + \frac{9}{17}\left(V_1^{k-1} + V_2^{k-1}\right) - \frac{1}{17}V_3^{k-1} \\
V_{j-1}^k = \frac{1}{n_0}\left(-12hf_{2j}^{k-1} - k_0\left(V_{j+2}^{k-1} - V_{j-2}^{k-1}\right) + V_{j+1}^{k-1}\right);\ j = 2 \\
V_j^k = \frac{1}{k_6}\left(-6hf_{2j+1}^{k-1} + k_0V_{j-1}^{k-1} + k_5V_{j+1}^{k-1} + k_4V_{j+2}^{k-1}\right);\ j = N-2; N-3;....;3,2 \\
V_{N-2}^k = \frac{1}{k_6}\left(-6hf_{2N-1}^{k-1} + k_0V_{N-3}^{k-1} + k_5V_{N-1}^{k-1} + k_4V_N\right) \\
V_{N-1}^k = \frac{1}{k_2}\left(-6hf_{2N}^{k-1} - k_4V_{N-3}^{k-1} + k_3V_{N-2}^{k-1} + k_1V_N\right) \\
V_N = V_*
\end{gathered} \tag{9}$$

У статті запропонований новий варіант чисельно-аналітичного методу дослідження моделей для задач оболонкових конструкцій. Запропонована теорія розрахунку будується на основі детального аналізу поставленої задачі, із врахуванням крайових умов, властивостей системи, що знаходиться під дією навантаження, та здатністю системи зберігати початкові дані.

Перевага даного методу полягає в тому, що ми отримуємо явні розрахункові формули, так як система може бути громіздкою в залежності від кількості кроків по x, то відшукання її розв'язку добре відомими методами може викликати труднощі, оскільки не вдасться знайти обернену матрицю.

4. Результати та їх обговорення

Для дослідження оцінки запропонованого нами методу проведення розрахунків, використаємо тестову задачу, модель точного розв'язку якого є відомою.

$$\begin{aligned}
&y'(x) = \frac{x}{z(x)};\ z'(x) = -\frac{x}{y(x)}, 0 \le x \le 1 \\
&y(0) = 1, z(1) = 1
\end{aligned} \tag{10}$$

Якщо припустити, що $y(x,\alpha), z(x,\alpha) -$ розв'язки задачі Коші, то

$$y'(x,\alpha) = \frac{x}{z(x,\alpha)};\ z'(x,\alpha) = -\frac{x}{y(x,\alpha)}, y(0,\alpha) = 1, z(0,\alpha) = \alpha.$$

Точний розв'язок матиме вигляд $y(x,\alpha) = e^{\frac{x^2}{2\alpha}}, z(x,\alpha) = 2\alpha e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$.

На малюнку наведені чисельні результати для системи (10) та їх порівняння з точним розв’язком

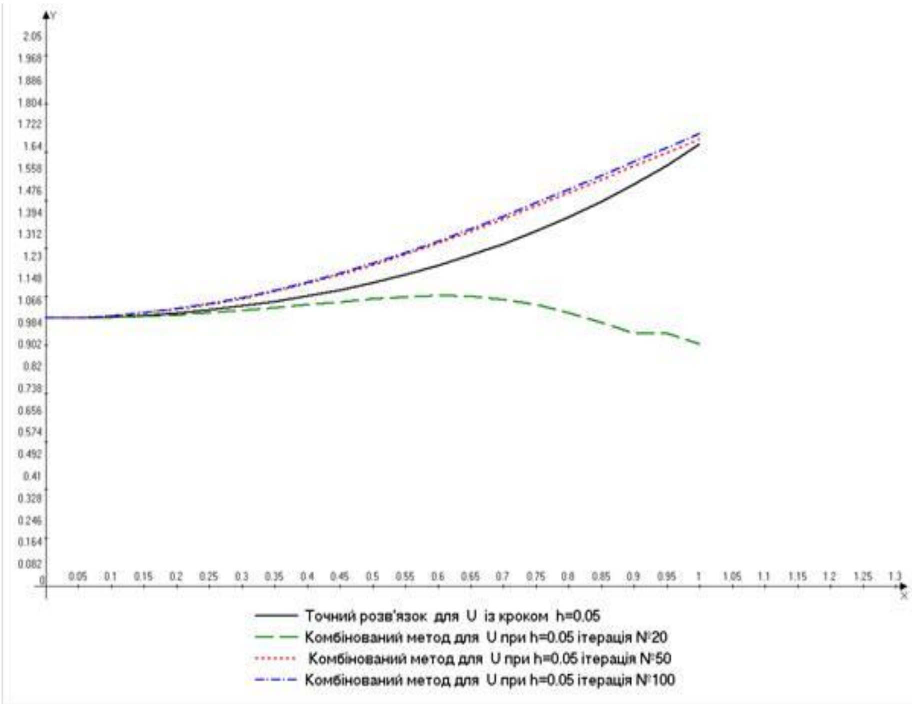

Рис.1. Порівняння отриманих розв’язків для U

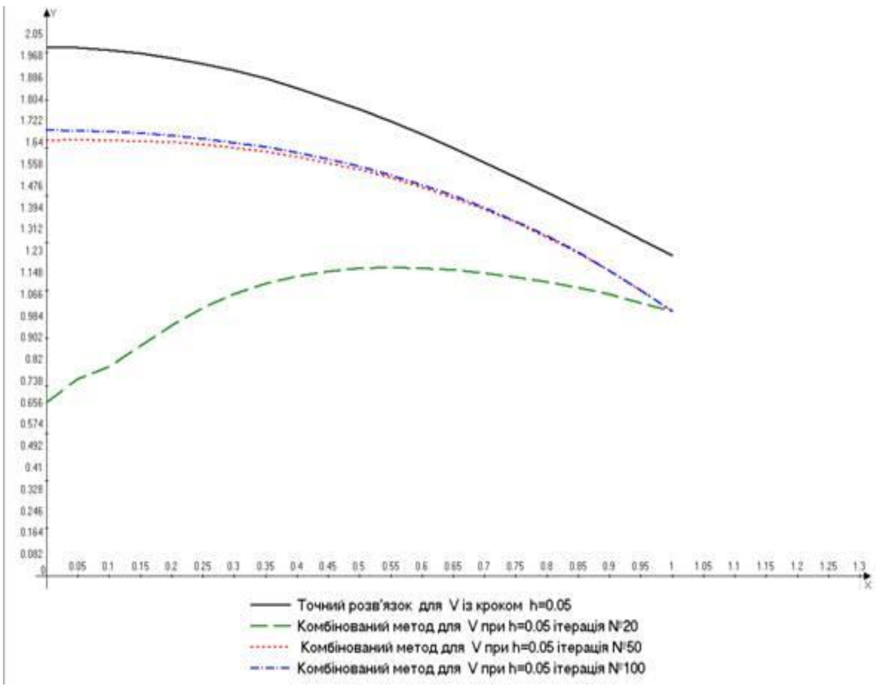

Рис.2. Порівняння отриманих розв’язків для V

Проведені модельні дослідження показали, що організована нами ітераційна процедура з використанням сплайнів є успішною у використанні та збігається з допустимою максимально відносною похибкою.

Математичне моделювання задач оболонкових конструкцій та вдало підібраний обчислювальний метод з його успішною реалізацією відкриває можливість проведення чисельних експериментів для розробки нових технічних рішень.

5. Наукова новизна

У статті показано використання комбінованого підходу до побудови обчислюваного методу, метод побудований ітераційно на основі сплайн-функцій, що дає змогу проводити обчислення з підвищеною точністю, такого роду підхід, а саме використання сплайнів у ітераційній процедурі застосовується вперше.

6. Висновки

Наведений новий підхід до побудови обчислюваного методу для задач теорії оболонок, що дає змогу проводити розрахунки підвищеної точності за рахунок використання сплайнів та комбінованих ітераційних методів. Показана реалізація запропонованого методу на тестовому прикладі, з відомим точним розв'язком, наведені візуальні графіки отриманих розв'язків, доведено, що метод збігається та є ефективним у використанні. Виникає теоретичний та практичний інтерес до подальшого дослідження запропонованого у статті чисельно-аналітичного методу, що, в свою чергу, розширить спектр його застосування у тій чи іншій галузі промисловості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно- аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академпериодика, 2006. – 472 с.
2. Рудаков К. М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій. – К: Навч. Посібник. – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 379 с.: іл.
3. Стеблянко П.А., Дзюба А.П., Сафронов О.О. Использование сплайн-аппроксимаций для решения задачи расчета цилиндрической оболочки с переменной жесткостью // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. – Випуск 15. –Дніпропетровськ, 2011. – С. 170–182.
4. Стеблянко П. О. Методи розщеплення в просторових задачах теорії пластичності. – Київ: Наукова думка, 1998. – 304 с.
5. V.A. Dzyuba, P.O. Steblyanko, J. Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences, II(4) No 32, 41(2014).

Надійшла у першій редакції 15.02.2016, в останній - 01.04.2016.