УДК 517.5:519.651

Способи задання функцій зі змінним періодом та їх наближення

Я. П. Василенко, Л. П. Дмитроца, М. З. Олійник, М. В. Приймак
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

В статті розроблено способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом і записані їх змінні періоди. Розглянута одна із задач наближення функцій тригонометричними рядами – розроблено метод визначення коефіцієнтів Фур'є функцій зі змінним періодом. Ортогональна тригонометрична система функцій із змінним періодом та її інтервал ортогональності узгоджені зі змінним періодом досліджуваної функції Як приклад, для однієї із функцій записана відповідна система тригонометричних функцій зі змінним періодом, обчислені коефіцієнти Фур'є та побудований скінчений ряд Фур'є, аналіз якого підтверджує правильність отриманих в роботі результатів.

Ключові слова: *функції зі змінним періодом, змінний період, коефіцієнти Фур'є функції зі змінним періодом, ряд Фур'є функцій зі змінним періодом.*

В статье разработаны способы аналитического задания функций с изменяющимся периодом и записаны их изменяющиеся периоды. Рассмотрена одна из задач приближения функций тригонометрическими рядами – разработан метод определения коэффициентов Фурье функций с изменяющимся периодом. Ортогональная тригонометрическая система функций с изменяющимся периодом и ее интервал ортогональности согласованы с изменяющимся периодом исследуемой функции. В качестве примера для одной из функций записана соответствующая система тригонометрических функций с изменяющимся периодом, вычислены коэффициенты Фурье и построен конечный ряд Фурье, анализ которого подтверждает правильность полученных в работе результатов.

Ключевые слова: *функции с изменяющимся периодом, изменяющийся период, коэффициенты Фурье функций с изменяющимся периодом, ряд Фурье функций с изменяющимся периодом.*

The ways of analytical definition of functions with variable period have been developed in the article. Their variable periods have been written as well. A problem of functions approximation by trigonometric series has been considered, namely, a method of definition of Fourier coefficients of functions with variable period has been developed. Orthogonal trigonometric system of functions with variable period and its orthogonality interval have been conformed with variable period of the function under research. As an example, for one of the functions the correspondent system of trigonometric functions with variable period has been written, Fourier coefficients have been calculated, a finite Fourier series have been constructed, which analysis has proved the obtained results.

Key words: *functions with variable period, variable period, Fourier coefficients of functions with variable period, Fourier series of functions with variable period.*

1. Вступ

Порівняно недавно був введений новий клас функцій – функцій зі змінним періодом [1]. Основною причиною їх появи була необхідність обґрунтувати модель емпіричних (за термінологією Лузіна – безформульних) функцій, характерною особливість яких є періодичність, але при цьому період повторюваності вже не є постійним, а певним чином змінюється. Такими є електрокардіограми, отримані під час чи після дії на пацієнта певних збудників спокою, наприклад, фізичного навантаження. Нагадаємо [1], що функція $f(x)$ дійсного аргументу $x \in I \subseteq R$ називається **функцією зі змінним періодом** (ФЗП), якщо існує така диференційовна функція $T(x) > 0$, що для всіх $x \in I$ таких, що $x + T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \tag{1.1}$$

Функція $T(x)$ називається змінним періодом. Із (1.1) випливає, що при $T(x) = T = const$ функція $f(x)$ є періодичною з періодом T. Щодо області визначення $I = [a, b]$, то в кожному конкретному випадку вона повинна уточнюватися.

Раніше були отримані вагомі результати в окремих напрямках побудови теорії ФЗП і їх прикладного застосування. В [2-4] розглянуті приклади елементарних ФЗП у вигляді тригонометричних функцій

$$\sin x^{\alpha}, \cos x^{\alpha}, \ \alpha > 0, \ \alpha \neq 1, \quad x \in I = [0, \infty).$$

Для цих функцій записані їх змінні періоди:

$$T(x) = -x + \left(x^{\alpha} + 2\pi\right)^{1/\alpha}, \ x \in [0, \infty),$$

$$T^{-}(x) = x - \left(x^{\alpha} - 2\pi\right)^{1/\alpha}, \ x \in [T(0), \infty).$$

Крім того в [2-4] побудована система тригонометричних функцій

$$\sin kx^{\alpha}, \cos kx^{\alpha}, \ x \geq 0, \ \alpha > 0, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

та показано, що вона є ортогональною на інтервалі $[x_0, x_0 + T(x_0)]$, $x_0 > 0$, із ваговою функцією $\rho_{\alpha}(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$. Якщо врахувати, що для цієї системи її період $T(x) = -x + \left(x^{\alpha} + 2\pi\right)^{1/\alpha}$, інтервал ортогональності набуває вигляду $\left[x_0, \left(x_0^{\alpha} + 2\pi\right)^{1/\alpha}\right]$. Із (1.2), а також із формули змінного періоду та виразу для інтервалу ортогональності видно, що при кожному фіксованому значенні параметра α ми отримуємо відповідно йому нову ортогональну систему.

Важливо наголосити, що систему функцій (1.2) можна узагальнити, якщо замість x^{α}, що входить в цю систему, взяти функцію $g(x)$. Ця функція повинна бути неперервною, строго зростаючою або спадною. Виявлення інших властивостей функції $g(x)$ та тригонометричної системи функцій $\sin kg(x), \cos kg(x), \ k = 1, 2, \ldots$, зокрема, яким буде змінний період цієї системи, вимагає окремого вивчення.

Маючи клас функцій зі змінним періодом, ортогональні системи тригонометричних ФЗП, виникає питання наступних кроків розвитку теорії та методів дослідження ФЗП. Звичайно, що тут цілком природно скористатися досвідом вивчення функцій [5,6], в основі якого лежить **«алгоритм наближення»**. Його суть в нашому випадку зводиться до заміни досліджуваної функції $f(x) \in F$, де F – клас функцій зі змінним періодом (клас наближуваних функцій), іншою функцією $g(x) \in G$, де G – множина наближуючих функцій зі змінним періодом. В нашому випадку процес створення «алгоритму наближення» може бути розбитий на декілька етапів. Ось деякі з них:

- ✓ побудова теорії тригонометричних рядів Фур'є ФЗП;
- ✓ розроблення на цій основі методів наближення ФЗП;
- ✓ дослідження наближуючих (отриманих в результаті наближення) ФЗП методами тригонометричних рядів Фур'є.

При розробці тих чи інших методів «алгоритму наближення» виникнуть питання їх перевірки з використанням для цього ФЗП, заданих аналітично. Однак методів аналітичного задання ФЗП, відмінних від найпростіших (тригонометричних) ФЗП, на даний час не існує.

2. Мета роботи та постановка задачі

Мета роботи – розробити способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом, записати вирази їх змінних періодів та розглянути питання знаходження їх коефіцієнтів Фур'є та побудови ряду Фур'є.

3. Способи задання періодичних функцій

Щоб розглянути питання розробки способів аналітичного задання ФЗП, спочатку проведемо аналіз існуючих способів задання періодичних функцій (з постійним періодом). Аналіз літературних джерел, зокрема [7-9], показує, що для цього в основному використовують три різновидності способів (методів, підходів). Це графічно-описові способи, аналітичні способи, метод «зсуву».

3.1 Графічно-описове задання періодичних функцій

Графічний спосіб в основному використовується в літературі технічного спрямування. Для прикладу такий спосіб знаходимо в [7, с.23], де показано графік функції, що має форму періодичних коливань прямокутної форми, та з якого видно, що на проміжку $\left[-T/2, 0\right)$ функція приймає значення -1, на проміжку $\left[0, -T/2\right)$ – значення 1. При цьому вказується, що за межами інтервалу $\left[-T/2, T/2\right)$ графік функції продовжується періодично. Аналогічно задаються періодичні коливання пилоподібної та інших форм [8, с.25].

3.2 Аналітичні способи задання періодичних функцій

Методи аналітичного задання періодичних функцій – це певним чином побудована суперпозиція спеціально підібраних функцій. Серед функцій, що входять в суперпозицію, можуть бути тригонометричні функції, деякі елементарні функції, зокрема показникова і степенева функції. Широке використання знаходять також функції, що є простими на вигляд, але вже не відносяться до класу елементарних функції. Це:

a) **модуль** функції f , тобто $|f|$;

b) **знак** (сигнум) функції: $sign\, f$;

c) **дробова** частина функції: $\{f\}= f-[f]$, де $[f]$ – ціла частина.

Наведемо приклади аналітичного задання періодичних функцій, даючи їм для зручності відповідні назви.

a) Тригонометричні функції $\sin x,\ \cos x,\ tg\, x,\ ctg\, x$. Найбільш використовують перші дві із цих функцій – $\sin x$ та $\cos x$ або їх узагальнення $A\sin(\omega x+\varphi)$ та $A\cos(\omega x+\varphi)$.

b) Показникова $f(x)=a^{g(x)}$ або стапенева $f(x)=(g(x))^{a}$ функції, де $a>0$, $g(x)$ – тригонометрична функція, найчастіше $g(x)=\sin x$ або $g(x)=\cos x$.

c) Модуль функції: $f(x)=|g(x)|$, де $g(x)$ – тригонометрична функція. В більш загальному випадку $f(x)=h(|g(x)|)$, $h(\bullet)$ є неперервна функція.

d) Знак (сигнум) функції: $f(x)=sign\, g(x)$, $g(x)$ – тригонометрична функція.

e) Дробова частина функції: $f(x)=g(\{x\})$, де $g(\bullet)$ – неперервна зростаюча (спадна) функція, $\{x\}$ – дробова частина числа x.

Приклади аналітичного задання періодичних функцій легко продовжити.

Періодичні функції можна також отримувати із вже побудованих шляхом їх певних перетворень. Це може бути розтяг чи стиснення вздовж осей Ox і Oy, та зсуву по осі Ox вправо чи вліво, по осі Oy – вверх, вниз. Розглянемо приклад та графік однієї із аналітично заданих періодичних функцій.

Приклад 1. Дробова частина від функції $g(x)=x,\ x\in(0,\infty)$, в степені $\alpha>0$, тобто $f(x)=\{x\}^{\alpha}$. Графік функції $\{x\}^{\alpha}$ – це періодичні з періодом $T=1$ коливання пилкоподібної форми, добре відомі в електро- та радіотехніці [8]. Для $\alpha=2$ графік функції $\{x\}^{2}$ зображений на рис.1.

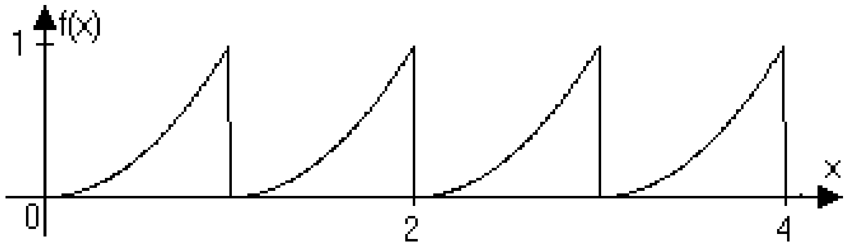

Рис.1. Графік функції $f(x)=\{x\}^{2}$.

3.3 Спосіб отримання періодичних функцій із використанням оператора зсуву.

Один із способів задання періодичних функцій – це графічний спосіб в поєднанні із оператором зсуву. Про цей спосіб йдеться в [9, с. 34]: для побудови графіка періодичної функції з періодом T достатньо провести побудову на відрізку $[0,T)$ і потім отриману криву **паралельно перенести** на віддаль $nT,\ n=\pm1,\pm2,\ldots$, вправо і вліво вздовж осі Ox. Зауважимо, що для реалізації цього способу чи не єдиним виходом є використання теорії рядів Фур'є [6, с. 29].

4. Способи задання функцій зі змінним періодом та їх змінні періоди

Подібно до основних способів задання періодичних функцій можуть бути розроблені способи задання функцій зі змінним періодом. Проте в цих випадках крім самих способів задання функцій важливим є питання задання їх змінних періодів. Основну увагу ми звернемо лише на способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом.

4.1. Приклади аналітичного задання функцій зі змінним періодом

a) Тригонометричні функції $\sin x^{\alpha}, \cos x^{\alpha}, tg\, x^{\alpha}, ctg\, x^{\alpha}, \alpha>0, \alpha\neq1$. Найбільш використовують перші дві із цих функцій – $\sin x^{\alpha}$ та $\cos x^{\alpha}$ або їх узагальнення $A\sin\left(kx^{\alpha}+\phi\right)$ та $A\cos\left(kx^{\alpha}+\phi\right)$.

b) Показникова функція: $f(x)=a^{g(x)}$, де число $a>0$, $g(x)$ – тригонометрична функція із змінним періодом, найчастіше $g(x)=\sin x^{\alpha}, \alpha>0, \alpha\neq1$, або $g(x)=\cos x^{\alpha}$.

c) Степенева функція: $f(x)=(g(x))^{a}$, де число a та функція $g(x)$ такі ж, як і в пункті 3.2.

d) Модуль функції: $f(x)=|g(x)|$, $g(x)$ – тригонометрична функція зі змінним періодом.

e) Знак (сигнум) функції: $f(x)=sign\, g(x)$, $g(x)$ – тригонометрична функція із змінним періодом.

f) Дробова частина: $f(x)=\{g(x)\}^{\alpha}$, де $a>0$, $\{\bullet\}$– дробова частина, $g(x)$ – деяка нелінійна неперервна зростаюча (спадна) функція.

g) Трансформація функцій із змінним періодом.

Розглянуті вище способи отримання функцій із змінним періодом можуть бути узагальнені шляхом застосування до них певних перетворень. В першу чергу це стосується найпростіших перетворень – паралельного переносу та стиснення (розтягу) вздовж осей абсцис і ординат.

Як і у випадку з періодичними функціями, приклади аналітичного задання функцій із змінним періодом можна продовжити.

4.2. Графіки аналітично заданих функцій із змінним періодом.

Наведемо графіки деяких із функцій із змінним періодом та запишемо їх змінні періоди.

Приклад 2. Степенева функція $f(x)=\left(\sin x^{4/3}+1/2\right)^{2}$ (рис.2), її змінний період $T(x)=-x+\left(x^{4/3}+2\pi\right)^{3/4}$ (рис. 4, неперервний графік).

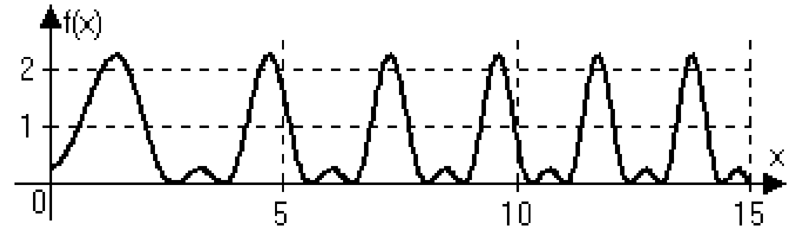

Рис. 2. Графік функції $f(x)=\left(\sin x^{4/3}+1/2\right)^{2}$.

Приклад 3. Суперпозиція степеневої функції та функції «дробова частина»: $f(x)=\left\{x^{3/5}\right\}^{2}$. Графік цієї функції – це коливання пилкоподібної форми (рис.3) зі змінним періодом $T(x)=-x+\left(x^{3/5}+2\pi\right)^{5/3}$, графік якого зображений на рис. 4 (пунктирна лінії).

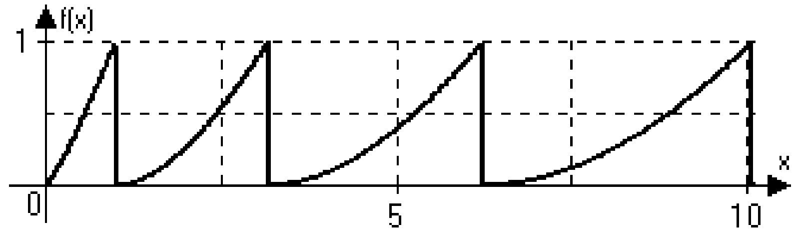

Рис.3. Графік функції $f(x)=\left\{x^{3/5}\right\}^{2}$.

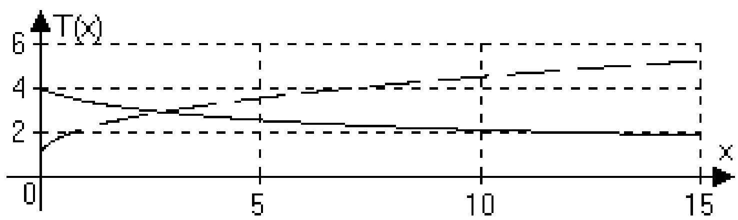

Рис.4. Графіки змінних періодів: $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$ *– суцільна лінія;*

$T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 2\pi\right)^{5/3}$ *– пунктирна лінія.*

Приклад 4. Суперпозиція логарифмічної функції та функції «дробова частина»: $f(x) = \{\log_c x\}, x \ge 1, c > 1$. При $c = 3$ графік функції $f(x) = \{\log_3 x\}$ показаний на рис.5. Варто звернути увагу, що для цієї функції її змінний період $T(x) = x(c-1)$, тобто є лінійною функцією з коефіцієнтом $k = c - 1$. Для функції, зображеної на рисунку 5, її змінний період $T(x) = 2x$.

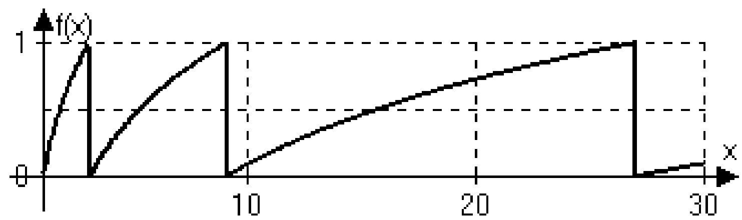

Рис.5. Графік функції $f(x) = \{\log_3 x\}$.

5. Коефіцієнти та ряди Фур'є функцій із змінним періодом

Наявність аналітично заданих функцій зі змінним періодом та їх змінних періодів, а також ортогональних тригонометричних систем ФЗП, дає можливість розглядати питання розробки теорії рядів Фур'є ФЗП. Важливо наголосити, що при цьому повинна виконуватися наступна умова: змінний період функції, для якої припускається будувати її ряд Фур'є та змінний період відповідної системи тригонометричні ФЗП повинні співпадати. Для деяких із наведених вище аналітично заданих ФЗП відповідні їм тригонометричні системи ФЗП є відомими. Не вдаючись до всебічного розгляду ряду питань, що стосуються теорії рядів Фур'є ФЗП, зупинимося лише на конкретному прикладі обчислення коефіцієнтів та побудови скінченого ряду Фур'є ФЗП. Для порівняння результатів обчислень будемо також розглядати паралельно із ФЗП «подібну» до неї функцію з постійним періодом. Необхідні розрахункові формули та додаткову інформацію для цього розмістимо в порівняльній таблиці 1.

Таблиця 1. Дані дослідження

Функція зі змінним періодом	Функція з постійним періодом
$f(x)=\left\{x^{3/5}\right\}^2$	$f(x)=\{x\}^2$
Змінний період $T(x)=-x+\left(x^{3/5}+2\pi\right)^{5/3}$	Період $T=1$
Ортогональна тригонометрична система функцій $\sin 2\pi kx^{3/5}, \cos 2\pi kx^{3/5},\ k=1,2,\ldots$ із змінним періодом $T(x)=-x+\left(x^{3/5}+2\pi\right)^{5/3}$	Ортогональна тригонометрична система функцій $\sin 2\pi kx, \cos 2\pi kx,\ k=1,2,\ldots,$ із періодом $T=1$
Для довільної точки $x_0\geq 0$ інтервал ортогональності $[x_0, x_0+T(x_0)]=\left[x_0, \left(x_0^{3/5}+1\right)^{5/3}\right]$	Для довільної точки $x_0\geq 0$ інтервал ортогональності $[x_0, x_0+1]$
Скалярний добуток функцій на інтервалі $\left[x_0, \left(x_0^{3/5}+1\right)^{5/3}\right]$ із ваговою функцією $\rho(x)=\frac{3}{5}x^{-2/5}$: $(f,g)=\int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5}+1\right)^{5/3}} \frac{3}{5}x^{-2/5} f(x)g(x)dx$	Скалярний добуток функцій $f(x)$ і $g(x)$ на інтервалі $[x_0, x_0+1]$ із ваговою функцією $\rho(x)=1$: $(f,g)=\int_{x_0}^{x_0+1} f(x)g(x)dx$
Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$: $a_0=2\int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5}+1\right)^{5/3}} \frac{3}{5}x^{-2/5} f(x)dx,$	Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$: $a_0=2\int_{x_0}^{x_0+1} f(x)dx,$

$a_k = 2 \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5}+1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) \cos 2\pi k x^{3/5}\, dx$, $b_k = 2 \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5}+1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) \sin 2\pi k x^{3/5}\, dx$	$a_k = 2 \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) \cos 2\pi x\, dx$, $b_k = 2 \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) \sin 2\pi x\, dx$
Ряд Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos 2\pi k x^{3/5} + b_k \sin 2\pi k x^{3/5}$	Ряд Фур'є $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x$
Квадрат норми функції: $\lVert f(x) \rVert^2 = \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5}+1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} \cdot x^{-2/5} f^2(x)\, dx$	Квадрат норми функції: $\lVert f(x) \rVert^2 = \int_{x_0}^{x_0+1} f^2(x)\, dx$
Нерівність Бесселя: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \le 2 \lVert f(x) \rVert^2$	Нерівність Бесселя: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \le 2 \lVert f(x) \rVert^2$

Використовуючи наведені в таблиці 1 розрахункові формули, були знайдені коефіцієнти Фур'є для функцій $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$ і $f(x) = \{x\}^2$. Результати обчислень наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Коефіцієнти Фур'є

	Функція	
	$f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$	$f(x) = \{x\}^2$
	Інтервал ортогональності	
	$\left[5, \left(5^{3/5}+1\right)^{5/3}\right] = [5, 8.560]$	$[0,1]$

	Коефіцієнти Фур'є (з точністю до 10^{-4})			
	a_k, $k=\overline{0,10}$	b_k, $k=\overline{1,10}$	a_k, $k=\overline{0,10}$	b_k, $k=\overline{1,10}$
0	0.667		0.667	
1	0.101	–0.318	0.101	–0.318
2	0.025	–0.159	0.025	–0.159
3	0.011	–0.106	0.011	–0.106
4	0.006	–0.080	0.006	–0.080
5	0.004	–0.064	0.004	–0.064
6	0.002	–0.053	0.002	–0.053
7	0.002	–0.045	0.002	–0.045
8	0.001	–0.040	0.001	–0.040
9	0.001	–0.035	0.001	–0.035
10	0.001	–0.032	0.001	–0.032
	$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{10} a_k^2+b_k^2=0.391$		$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{10} a_k^2+b_k^2=0.391$	
	$2\|f(x)\|^2=0.400$		$2\|f(x)\|^2=0.400$	

Порівняння коефіцієнтів Фур'є для функцій $f(x)=\left\{x^{3/5}\right\}^2$ і $f(x)=\{x\}^2$ показує їх «практичне» співпадання. Деякі неузгодженості можна пояснити похибками обчислень а також, можливо, і програмним забезпеченням Advanced Grapher, яке крім побудови графіків на рисунках 1-7 використовувалося для інтегрування (при знаходження коефіцієнтів Фур'є) та деяких обчислень.

Використовуючи наведені в таблиці 2 коефіцієнти a_k, $k=\overline{0,10}$ і b_k, $k=\overline{1,10}$, були обчислені значення, що входять в нерівність Бесселя $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k^2+b_k^2 \le 2\|f(x)\|^2$. Виявилося, що $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{10} a_k^2+b_k^2=0.391$, $2\|f(x)\|^2=0.4$, тобто при заданій точності 10^{-4} вже при $n=10$ нерівність Бесселя переходить в рівність Парсеваля.

За значеннями коефіцієнтів Фур'є (таблиця 2) побудовані також ряди Фур'є. На рис.6 показано графік побудованого для функції $f(x)=\left\{x^{3/5}\right\}^2$ її скінченого ряду Фур'є $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{6} a_k \cos 2\pi k x^{3/5}+b_k \sin 2\pi k x^{3/5}$ та графік самої функції. Порівняння графіків показує, що скінчений ряд Фур'є достатньо «добре» відтворює форму самої функції.

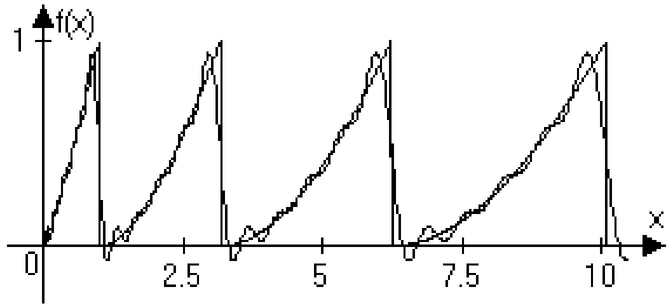

Рис.6. Ряд Фур'є (перші шість пар доданків) для функції $f(x)=\left\{x^{3/5}\right\}^2$ *(хвилястий графік) та графік самої функції.*

Такі ж висновки можна зробити і щодо скінченого ряду Фур'є для функції $f(x)=\{x\}^2$, графік якого зображений на рис. 7.

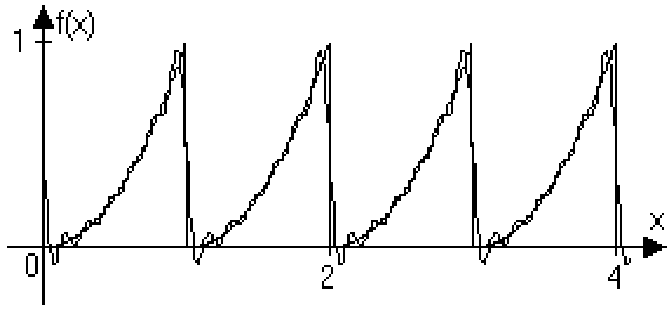

Рис.7. Ряд Фур'є (перші шість пар доданків) для функції $f(x)=\{x\}^2$ *(хвилястий графік) та графік самої функції.*

6. Висновки

Розроблені в роботі способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом є продовженням розвитку теорії цих функцій. Для однієї із таких функцій обчислені її коефіцієнти Фур'є, аналіз значень яких підтвердив попередньо зроблені припущення про можливість обчислення коефіцієнтів на довільно розміщеному інтервалі ортогональності відповідної системи тригонометричних функцій зі змінним періодом, аби тільки довжина інтервалу узгоджувалася із значенням змінного періоду. Побудований з використанням знайдених коефіцієнтів скінчений ряд Фур'є достатньо «добре» відтворює форму самої функції. Отримані результати можна розглядати як вагомий внесок в теорію рядів Фур'є функцій зі змінним періодом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 132-141.
2. Приймак М.В. Система тригонометричних функцій із змінним періодом та деякі їх властивості // International Conferenceon Functional Analys is dedicated to the 90-th anniversary of V.E.Lyantse. 17-21 November 2010. – Lviv. – С. 97-98.
3. Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П. Сигнали зі змінним періодом та їх модель // Вісник НТУУ«КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка» – К.: Век+, 2013. – №59. – С. 116-121.
4. М.В.Приймак, Я.П.Василенко, Л.П.Дмитроца. Клас функцій зі змінним періодом // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. – №1105. – Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2014. – Випуск 24. – С. 21-32.
5. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 454 с.
6. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Гос. изд-во физ. мат-й литературы, 1960. – 390с.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Под ред. А.Н.Тихонова. М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
8. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
9. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. – Изд. 4-е, испр. – М.: МЦНМО, 2002. – 664 с.

Надійшла у першій редакції 22.06.2015, в останній - 08.04.2016.