

УДК 532.5

Анализ вихрей Моффата внутри прямолинейного канала со вставками при малых числах Рейнольдса

А. А. Гуржий, А. В. Шалденко

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев, Украина

Рассмотрена задача о двухмерном течении вязкой несжимаемой жидкости внутри прямолинейного канала с системой вставок различной геометрии в приближении малых чисел Рейнольдса. Задача решена численно в терминах "функция тока - завихренность" на равномерной сетке с использованием простого явного метода с разностями против потока. Метод последовательной верхней релаксации был применен при решении уравнений Пуассона для функции тока и давления. Показано, что в течении перед вставками и за ними образуются циркуляционные зоны (вихри Моффата). Установлены количественная зависимость размеров и формы угловых вихревых структур от скорости осевого потока. Определены уровни потерь на давление, вызванные уменьшением эффективного сечения канала.

Ключевые слова: вихри Моффата, вязкая жидкость, ламинарное течение, прямолинейный канал, внутренние вставки.

Розглянуто задачу про двовимірну течію в'язкої нестисливої рідини всередині прямолінійного каналу з системою вставок різної геометрії в наближенні малих чисел Рейнольдса. Задача розв'язана чисельно в термінах "функція току – завихренність" на рівномірній сітці з використанням простого явного методу з різницями проти потоку. Метод послідовної верхньої релаксації був застосований при розв'язанні рівнянь Пуассона для функції току і тиску. Показано, що в течії перед вставками і за ними утворюються циркуляційні зони (вихори Моффата). Встановлено кількісна залежність розмірів і форми кутових вихрових структур від швидкості осьового потоку. Визначено рівні втрат на тиск, викликаний зменшенням ефективного перетину каналу.

Ключові слова: вихори Моффата, в'язка рідина, ламинарний плин, прямолінійний канал, внутрішні вставки.

The problem stated for two-dimensional flow of viscous incompressible fluid in a straight channel with a system of fittings having different geometry is considered using the approximation for the case of small Reynolds numbers. The problem is solved numerically in terms of "stream function - vorticity" on a uniform grid using a simple explicit method with upwind differences. The method of successive over-relaxation was applied for solving the Poisson equations for the function of stream and pressure. It is shown that the flow forms the circulating zones (Moffat's vortices) before fittings and after them. The quantitative dependence of the size and shape of the corner vortex structures on the axial velocity of the flow is determined. The pressure loss levels caused by decrease of the effective channel cross section are defined.

Key words: Moffat's vortices, viscous liquid, laminar flow, straight channel, internal fittings.

1. Введение

В последнее время в современной научной литературе отмечается повышенное внимание анализу проблемы формирования и взаимодействия локализованных вихревых структур различного масштаба. Их влияние на формирование течений, условия протекания различных вторичных эффектов сегодня уже не вызывают сомнений. Если работы начала прошлого столетия были в основном направлены на объяснение "вихревой теории материи" [1] на

основе взаимодействия инерционных эффектов и сил гравитации, то сегодня интерес к проблемам вихревой динамики (“сухожилий и мускулов течения жидкости” [2]) обусловлен новым пониманием преобладающего влияния вихревых структур на формирование течений различной природы, интенсивных процессов переноса скалярных полей в сплошных средах, образование неустойчивости потока и последующего перехода в турбулентность, генерацию вихревого звука и др.[3, 4].

Важной в понимании процесса образования вихрей явилась работа Моффата [5], в которой впервые были обнаружены локализованные вихревые структуры в угловых областях внутренних течений (двумерная прямоугольная полость с одной подвижной границей) при малых числах Рейнольдса. Автор аналитически показал, что в углах полости с неподвижными границами формируется локализованная область течения с ненулевой завиренностью. Она имеет форму треугольника, катеты которого примыкают к границам, а гипотенуза касается внешнего течения. В современной научной литературе [6-8] такие вихревые структуры получили название вихрей Моффата. Направление циркуляции в этих областях определяется направлением движения жидкости вдоль гипотенузы. Характерной особенностью вихрей Моффата является то, что модуль скорости внутри замкнутой циркуляционной зоны примерно на порядок меньше скорости внешнего потока.

Долгое время считалось, что образование застойных зон в угловых областях течений не оказывают существенного влияния на общее поведение потока вязкой жидкости во внутренних течениях [9] при малых числах Рейнольдса (приближение Стокса). Вихри Моффата часто использовались в качестве тестовых задач при разработке различных численных методов для решения уравнений движения сплошной среды. Сегодня имеется аналитическое обобщение этой задачи для трехмерных течений [10].

Недавние исследования [11,12,13] показали, что локализованные вихревые структуры в угловых зонах внутренних течений играют важную роль в формировании процессов переноса тепла в охладительных системах (микроканалы различной геометрии с системой перпендикулярных вставок) при малых числах Рейнольдса. Такие микроканалы применяются при охлаждении различных устройств радио-электронной аппаратуры (чипы, микропроцессоры) Медленное движение теплоносителя в угловых зонах течения приводит к ее нагреву за счет внешнего диффузионного потока. Было показано, что угловые циркуляционные зоны, по мере увеличения скорости течения, приобретают квазистационарность, которая приводит к периодическому колебательному движению границы, разделяющей вихри Моффата и внешний поток. При этом часть холодной жидкости из внешнего потока поступает в угловую область течения, и такой же объем теплоносителя выносится основным течением. В результате общий конвективный перенос тепла из внешней среды в канал существенно повышается при малых числах Рейнольдса.

Формирование вихрей Моффата во внутренних течениях уменьшает эффективное сечение каналов и приводит к соответствующему повышению усредненного градиента давления, необходимого для формирования течения с заданной скоростью. Анализ научной литературы показал, что этому вопросу

уделено мало внимания. Проблема влияния скорости течения на физические параметры угловых циркуляционных течений фактически не рассматривалась.

Целью работы является установление влияния скорости течения внутри прямолинейного канала с перпендикулярными вставками различной геометрии на размеры и форму циркуляционных областей в угловых зонах течения в приближении малых чисел Рейнольдса. Необходимо выяснить влияние размера и количества вихрей Моффта на разность давлений, прикладываемую к входу в выходу канала, для поддержания заданной скорости течения в канале.

2. Математическая постановка задачи

Движение однородной вязкой несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ρ и коэффициентом кинематической вязкости ν описывается уравнением Навье-Стокса и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{U}(U, V, W)$ – поле скорости, p – поле давления.

Наложение операции ротора на уравнение (1) позволяет получить уравнение переноса завихренности. В двухмерном случае поле завихренности имеет единственную компоненту ($\omega = \partial V / \partial x - \partial U / \partial y$), направленную перпендикулярно к плоскости течения. В этом случае уравнение переноса завихренности приобретает простой вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U \omega}{\partial x} + \frac{\partial V \omega}{\partial y} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}, \quad (3)$$

Если ввести функцию тока, связанную с распределением поля скорости выражениями

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (4)$$

то можно получить уравнение Пуассона для функции тока

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (5)$$

В дальнейшем, при необходимости, по заданному распределению поля скорости можно восстановить распределение поля давления, воспользовавшись уравнением Пуассона для давления

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right\}. \quad (6)$$

Поставленная задача должна быть дополнена начальными и граничными условиями. Граничными условиями являются (рис.1)

$$U|_{S1, S2} = 4U_0 y \left(\frac{1}{D} - \frac{y}{D^2} \right), \quad U|_{S3, S4} = 0, \quad V|_{S1, S2, S3, S4} = 0,$$

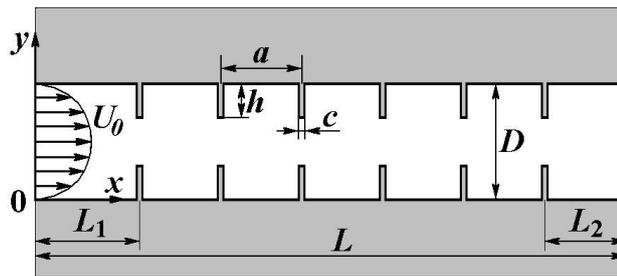


Рис. 1. Геометрия канала с системой симметричных вставок

$$\Psi|_{s_{1,s2}} = \frac{4y^2U_0}{D} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{3D} \right), \quad \Psi|_{s3} = 0, \quad \Psi|_{s4} = \frac{2DU_0}{3}, \quad (7)$$

$$\omega|_{s_{1,s2}} = \frac{4U_0}{D} \left(1 - \frac{2y}{D} \right), \quad p|_{s1} = p_0, \quad p|_{s2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{s_{3,s4}} = 0.$$

Здесь U_0 – максимальная скорость течения на входе канала.

Граничные условия для поля завихренности на твердых поверхностях будет определено далее.

В качестве начальных условий для полей скорости $U(x,y,0)$, $V(x,y,0)$ функции тока $\Psi(x,y,0)$ и завихренности $\omega(x,y,0)$ выбирается распределения полей, полученные в результате решения соответствующей стационарной задачи (3-5) с граничными условиями (7).

В дальнейшем поставленную математическую задачу удобно пронормировать на U_0 , D – ширину канала и ρ – плотность жидкости. В этом случае время будет отнесено к величине D/U_0 , поле завихренности будет пронормировано на отношение U_0/D , функция тока – на величину U_0D , а давление будет отнесено к величине ρU_0^2 . В этом случае можно ввести параметр течения – число Рейнольдса, равное отношению

$$\text{Re} = \frac{U_0D}{\nu}. \quad (8)$$

В дальнейшем будут при решении задачи и анализе полученных результатов используются только безразмерные переменные и величины.

3. Численная модель течения

Рассмотрим течение вязкой однородной жидкости внутри двумерного прямолинейного канала длиной $L = 18.0$ (рис.1) и шириной $D = 1.0$. Внутри канала расположена система перпендикулярных вставок шириной $c = 0.1$, высотой h , расположенные симметрично (и в шахматном порядке, несимметрично) на расстоянии a друг относительно друга. Начальный и конечный участки канала длиной $L_1 = L_2 = 2.0$ отведены для стабилизации течения жидкости, поступающей (выводимой) в канал. Течение жидкости направлено слева направо.

Задача решалась численно на равномерной сетке с пространственной дискретизацией $\delta = 0.05$ и временной дискретизацией Δ . Введем обозначения индексов узловых значений физических полей в рассматриваемой задаче следующим образом

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, t) &= \Psi(i\delta, j\delta, n\Delta) = \Psi_{i,j}^n, & U(x, y, t) &= U(i\delta, j\delta, n\Delta) = U_{i,j}^n \\ V(x, y, t) &= V(i\delta, j\delta, n\Delta) = V_{i,j}^n, & \omega(x, y, t) &= \omega(i\delta, j\delta, n\Delta) = \omega_{i,j}^n.\end{aligned}\quad (9)$$

Уравнение переноса завихренности (3) решалось с использованием простого явного метода второго порядка точности по пространственным переменным и первого порядка точности по времени. Нелинейное конвективное слагаемое в численной схеме записано разностями первого порядка против потока. В конечном итоге получаем

$$\omega_{i,j}^{n+1} = (1-4\beta)\omega_{i,j}^n - \beta^*(A_{i,j}^n + B_{i,j}^n) + \beta(\omega_{i-1,j}^n + \omega_{i+1,j}^n + \omega_{i,j-1}^n + \omega_{i,j+1}^n), \quad (10)$$

где

$$A_{i,j}^n = \begin{cases} U_{i,j}^n \omega_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n \omega_{i-1,j}^n & \text{при } U_{i,j}^n \geq 0, \\ U_{i+1,j}^n \omega_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n \omega_{i,j}^n & \text{при } U_{i,j}^n < 0, \end{cases}$$

$$B_{i,j}^n = \begin{cases} V_{i,j}^n \omega_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n \omega_{i,j-1}^n & \text{при } V_{i,j}^n \geq 0, \\ V_{i,j+1}^n \omega_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n \omega_{i,j}^n & \text{при } V_{i,j}^n < 0, \end{cases}$$

В приведенном выражении использовались обозначения

$$\beta = \frac{\Delta}{\delta^2}, \quad \beta^* = \frac{\Delta}{\delta^2 \text{Re}}. \quad (11)$$

Выражение (10) позволяет определить распределение поля завихренности во внутренних узлах расчетной области. На поверхностях S_1 и S_2 заданы граничные условия Дирихле, которые вносятся на произвольном временном слое. Граничные условия на поверхностях S_3 и S_4 получаются в результате разложения в ряд Тейлора распределения поля функции тока [14]

$$\omega|_{S_{3,S4}} = 2 \frac{\Psi_s - \Psi_{s+1}}{\delta^2}, \quad (12)$$

где индекс s обозначает слой на твердой поверхности канала, а индекс $s+1$ соответствует следующему слою в направлении, перпендикулярном к стенке.

Не смотря на свою простоту программной реализации, простой явный метод имеет существенный недостаток, связанный с устойчивостью вычислений. Схема имеет ограничение на шаг интегрирования по времени, выполнение которого обеспечивает сходимость итерационных вычислений. Некоторые подробности анализа этой численной схемы можно найти в [13,14].

Уравнение Пуассона для функции тока (5) и для поля давления (6) решалось с использованием метода последовательной верхней релаксации [14]

$$\Psi_{i,j}^{(k+1)} = (1-\lambda)\Psi_{i,j}^{(k)} + \frac{\lambda}{4}(\Psi_{i-1,j}^n + \Psi_{i+1,j}^n + \Psi_{i,j-1}^n + \Psi_{i,j+1}^n - S\delta^2). \quad (13)$$

В приведенном уравнении λ – параметр релаксации, значение которого выбирается в соответствии с рекомендациями [14]. Последнее слагаемое в уравнении (13) представляет собой источниковое слагаемое: в уравнении Пуассона для функции тока $S = -\omega$.

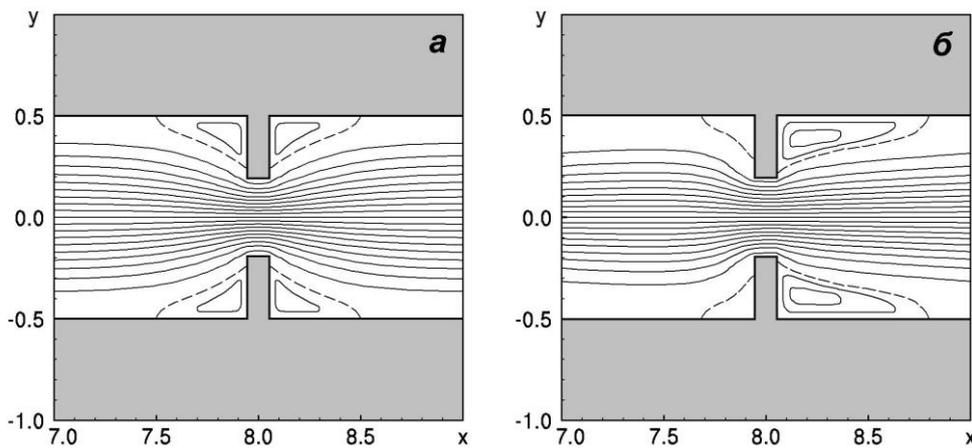


Рис.2. Распределение функции тока внутри канала с вставками $h = 0.3$, $a = 2.0$ при а) $Re = 40$, б) $Re = 100$

Аналогичное выражение использовалось при решении уравнения Пуассона для давления (6) с правой частью

$$S_{i,j} = \frac{1}{2\delta^2} [(U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n)(V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n) - (U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n)(V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n)]. \quad (14)$$

Численная схема решения поставленной задачи была протестирована на двумерной задаче течения вязкой несжимаемой жидкости внутри прямолинейного канала без вставок, которая имеет аналитическое решение [15]. Анализ численных результатов показал, что точность определения поля функции тока на пространственной дискретизации $\delta = 0.05$ составляет величину $E_\Psi \approx 10^{-5}$, а поля скорости – $E_U \approx 10^{-4}$ для чисел Рейнольда $Re < 650$. В тестовой задаче поле давления было определено с точностью $E_p \approx 10^{-4}$, поле завихренности – $E_\omega \approx 10^{-3}$. Можно сделать вывод, что численное решение найдено с хорошей точностью в указанном диапазоне чисел Рейнольдса для проведения последующих вычислений и анализа полученных результатов.

4. Численные результаты

Рассмотрим течение жидкости внутри прямолинейного канала с системой симметричных вставок высотой $h = 0.3$, расположенные на расстоянии $a = 2.0$. На рис.2 показано распределение функции тока $\Psi(x,y)$ в средней части канала, полученное при достижении течением стационарного режима, который контролировался изменением во времени профиля скорости на входе канала. На рисунке нанесены система линий тока с шагом дискретизации $\Delta\Psi = \Psi_{S_4}/20$. Циркуляционные зоны показаны штриховой линией, которая начинается и заканчивается на твердой поверхности. Линии тока внутри вихрей Моффата нанесены на рисунках с шагом дискретизации $\Delta\Psi = 0.001$.

По мере приближения потока к вставкам скорость течения увеличивается, что соответствует сгущению линий тока на рисунке. При малых значениях чисел

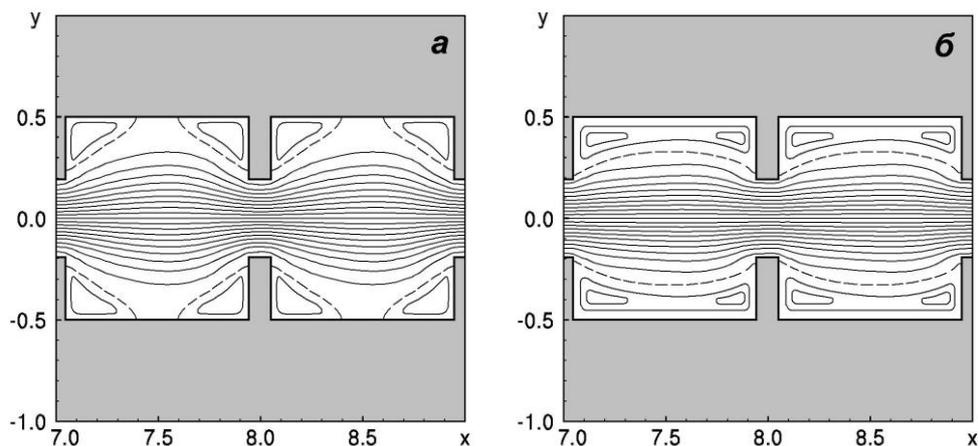


Рис.3. Распределение функции тока внутри канала с вставками $h = 0.3$, $a = 1.0$ при а) $Re = 40$, б) $Re = 100$

Рейнольдса (рис.2,а) до и после вставки образуются две симметричные циркуляционные зоны. Жидкости в верхних зонах, соответствующих вихрям Моффата, вращаются против часовой стрелки, а в нижних зонах – в противоположном направлении. При увеличении скорости течения (рис.2,б) симметрия нарушается: гидродинамический напор уменьшает размеры вихрей Моффата, расположенных до вставки. С другой стороны, движение жидкости по инерции способствует увеличению размеров угловых вихрей, расположенных за вставками. Можно заметить, что при увеличении скорости течения вихри Моффата за вставками увеличивают свою скорость вращения, в то время как вихри до вставок постепенно свою угловую скорость вращения уменьшают.

Аналогичная тенденция наблюдается при уменьшении расстояния между вставками. На рис.3. показано распределение функции тока $\Psi(x,y)$ при $h = 0.3$ и $a = 1.0$, выполненный в аналогичном стиле. При малых числах Рейнольдса распределение функции тока является симметричным относительно вставок. Сравнение рис.2,а и рис.3,а позволяет сделать вывод о том, что форма и размер угловых вихревых структур примерно одинаковы при малых скоростях течения основного потока. Вихри Моффата перед вставкой и за ней в первом приближении можно считать одинаковыми для разных значений расстояний a между вставками. При увеличении скорости осевого потока вихри Моффата вытягиваются вдоль границы и замыкаются (рис.3,б), образуя единую циркуляционную зону, отделяющую осевой поток от границ канала.

С увеличением скорости течения размер циркуляционных зон возрастает. На рис.4 показана зависимость площадей вихрей Моффата перед вставкой (S_1 , штриховая линия) и после вставок (S_2 , сплошная линия) для разных значений высот вставок. В диапазоне чисел Рейнольдса $Re < 40 \dots 50$ площади циркуляционных зон перед и после вставок примерно одинаковы. С увеличением скорости течения зоны после вставок существенно увеличиваются в размерах. Такая тенденция проявляется и для меньших вставок, $h = 0.2$. Для малых вставок ($h = 0.1$) площади циркуляционных зон оказываются малыми,

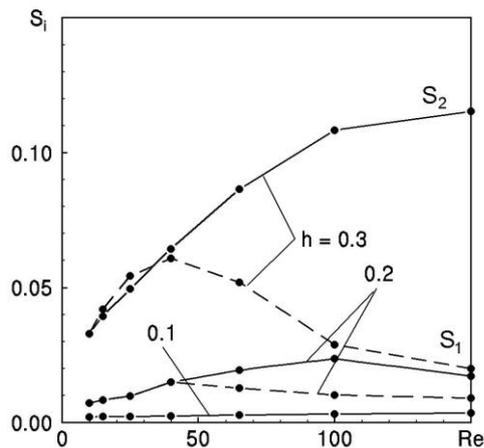


Рис.4. Зависимость площади циркуляционных зон от скорости осевого потока для вставок различной высоты h

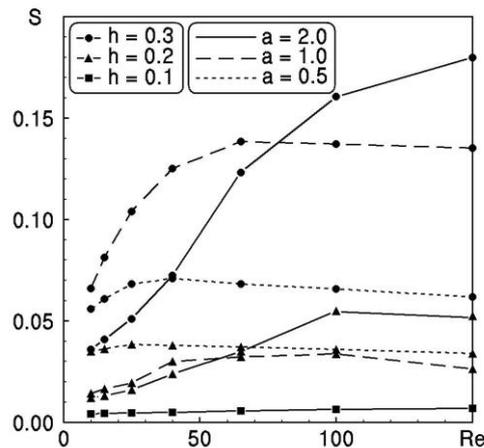


Рис.5. Зависимость общей площади циркуляционных зон от скорости осевого потока для $a = 0.5, 1.0$ и 2.0

причем их размеры остаются практически неизменными в области скоростей, соответствующих значениям $Re < 150$.

Рис.5 иллюстрирует зависимость общей площади ($S = S_1 + S_2$) вихрей Моффата, которая приходится на один сегмент канала между вставками, от скорости течения жидкости в канале с обозначениями, показанными на рисунке. Видно, что для каждого значения высоты вставок и значения расстояния между вставками, площади циркуляционных зон увеличиваются, затем, при некотором значении числа Рейнольдса Re , достигают максимума. Дальнейшее увеличение скорости потока приводит к уменьшению размеров вихрей Моффата. Однако, можно заметить общую тенденцию: большие размеры циркуляционных зон соответствуют большим значениям высот вставок и расстояний между ними для одинаковых значений скорости осевого потока жидкости.

Существенное усложнение структуры потока около вставок вызывает соответствующие изменения в поле давления. На рис.6 показано распределение поля давления около вставки ($h = 0.3, a = 1.0$) при $Re = 40$. Видно, что при замедлении потока осевой градиент поля давления уменьшается, в то время как за вставкой течение ускоряется, а осевой градиент поля давления увеличивается. Интересно заметить, что по распределению поля давления достаточно сложно выявить угловые вихревые структуры, что подтверждает фундаментальный вывод о том, что распределение давления явно в уравнении переноса завихренности не участвует [4].

На рис.7 показана зависимость разности приложенного к входу и выхода прямолинейного канала от скорости течения в нем при разных значениях высоты вставок ($h = 0.1 \dots 0.3$) и расстояния ($a = 0.5 \dots 2.0$) между ними. Обозначения кривых показаны на рисунке. Сплошной линией представлена зависимость для прямолинейного канала без вставок. Видно, что усредненный вдоль канала градиент давления прямо пропорционален скорости течения, что

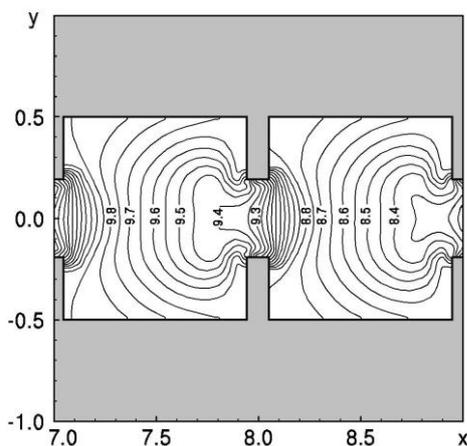


Рис.6. Распределение поля давления в канале с симметричными вставками

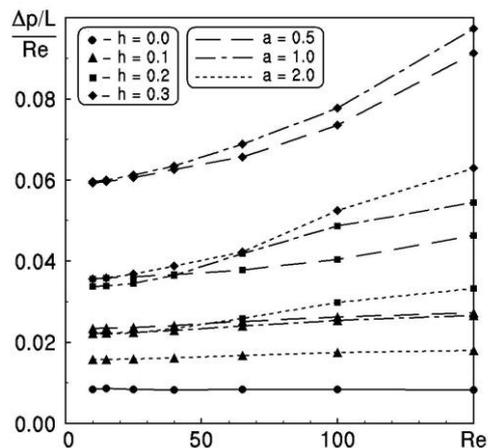


Рис.7. Зависимость приложенной к каналу разности давлений от скорости течения жидкости

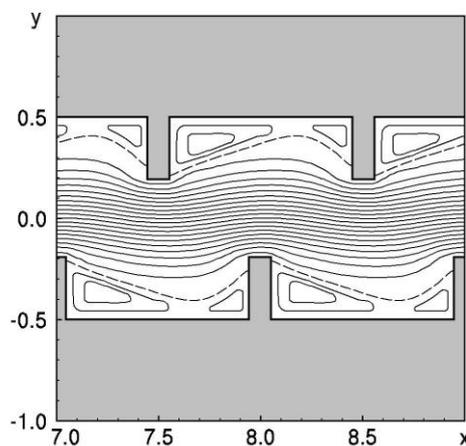
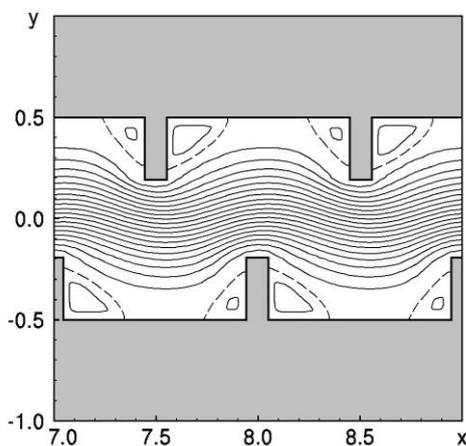


Рис.8. Распределение функции тока внутри канала с несимметричными вставками $h = 0.3$, $a = 1.0$ при а) $Re = 40$, б) $Re = 100$

согласуется с данными [13]. Численный анализ данных на рис.7 показал, что разность давлений, приложенных к каналу, определяется количеством вставок и их высотой. Вихревые структуры, формируемые около вставок, существенного влияния на величину Δp при малых числах Рейнольдса ($Re < 50 \dots 70$) не оказывают. При увеличении скорости осевого потока в канале энергия, необходимая на формирование вихрей Моффата становится соизмеримой с энергией потока, наклон кривой на рис.7 при числах Рейнольдса $Re > 100$ заметно возрастает.

При несимметричном расположении вставок, качественная структура вихрей Моффата совпадает со случаем симметричного распределения вставок (рис.8). Заметные отличия возникают только в форме границы, разделяющей циркуля-

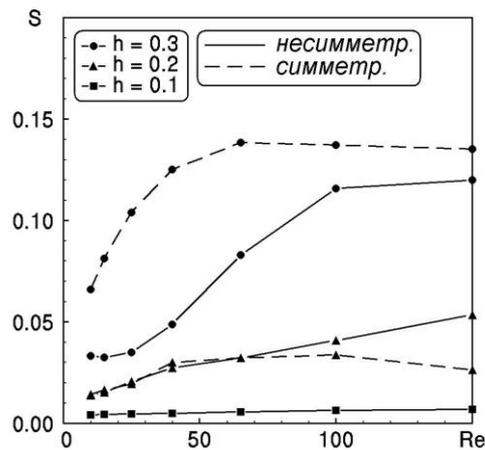


Рис.9. Залежність площі циркуляційних зон від швидкості осевого потоку для симметричних та несимметричних вставок різної висоти h

ционну зону від зовнішнього потоку. Несимметричність потоку приводить до того, що циркуляційні зони перед вставкою стають менше за площі, оскільки потік, рухаючись по інерції, “придавлює” вихри Моффата до твердої поверхні. Цей же ефект сприяє збільшенню вихрей Моффата, які формуються після вставки (рис.9).

5. Висновки

Розглянуто задачу про двохмерне рух в'язкої несжимаємої рідини всередині прямолинійного каналу з системою симметричних та несимметричних вставок в наближенні малих чисел Рейнольдса. Задача розв'язувалася чисельно методами “функція току - завихренність” на рівномірній сітці з використанням простого явного методу з різницями проти потоку для розв'язання рівняння переносу завихренності та методу послідовної верхньої релаксації для розв'язання рівняння Пуассона для функції току та рівняння Пуассона для тиску.

Основне уваження в роботі приділено аналізу параметрів циркуляційних зон, утворених рухом в'язкої рідини навколо системи вставок. Показано, що вставки збільшують втрати на тиск, яке необхідно прикласти до входу та виходу каналу для досягнення заданої осевої швидкості каналу. Звуження каналу призводить до помітного підвищення втрат на тиск, викликане зменшенням ефективного перерізу каналу не тільки в області розміщення вставок, але й звуженням каналу за рахунок циркуляційних зон, формуваних перед вставками та за ними.

Встановлено, що площа кутових вихрей Моффата збільшується з збільшенням швидкості осевого потоку, досягає максимального значення, а подальше збільшення швидкості течії призводить до поступового зменшення їх розмірів для певних значень висоти h вставок та відстані a між ними. Показано, що вихреві структури перед вставкою та за нею можуть при певних значеннях чисел Рейнольдса з'єднатися,

образує єдину вихреву структуру, відділяючу основне течіння від твердої границі.

Застосування системи перпендикулярних вставок в каналах охолоджувальних систем радіоелектронної апаратури дозволяє значно інтенсифікувати процеси переносу тепла з зовнішнього середовища в рідкий теплоносітель при ламінарних режимах течіння. Вивчення впливу локалізованих кутових структур на процеси переносу скалярних полів представляє сьогодні одне з перспективних технічних напрямків, що дозволяють вирішити проблему контролюваного і управляемого теплоотвода в мікроелектроніці.

ЛИТЕРАТУРА

1. Silliman R.H. William Thomson: Smoke rings and nineteenth-century atomism // *ISIS*. – 1963. – Vol.54, N4. – p.461-474.
2. Saffman P.G., Baker G.R. Vortex interactions // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1979. – Vol.11, N1. – p.95-121.
3. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости.:М: Мир, 1973. – 758с.
4. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур // К: Наукова думка., 1993. – 280с.
5. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1964. – Vol.18, N1. – p.1-18.
6. Trueba J.L., Arrayás M. Vorticity field, helicity integral and persistence of entanglement in reaction-diffusion systems // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2009. – Vol.42, N28. – p.282001.
7. Oliveira M.S.N., Rodd L.E., McKinley G.H., Alves M.A. Simulations of extensional flow in microrheometric devices // *Microfluidics and nanofluidics*. – 2008. – Vol.5, N6. – p.809-826.
8. Denn M.M. Fifty years of non-Newtonian fluid dynamics // *AIChE journal*. – 2004. – Vol.50, N10. – p.2335-2345.
9. Bajer K., Moffatt H.K.. *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics* – London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 384p.
10. Gomilko A.M., Malyuga V.S., Meleshko V.V. On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2003. – Vol.476 – p. 159-177.
11. Roberts E.P.L., Mackley M.R. The simulation of stretch rates for the quantitative prediction and mapping mixing within a channel flow // *Chemical Engineering Science*, 1995. – V.50, N.23. – p.3727-3746.
12. Halpern D., Wei H.H. Electroosmotic flow in a microcavity with nonuniform surface charges // *Langmuir*. – 2007. – Vol. 23, N18. – p.9505-9512.
13. Гуржий А.А., Шалденко А.В. Анализ процессов теплопередачи в криволинейных микроканалах, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью // *Восточно-европейский журнал передовых технологий*. – 2015. – Т.78, N.6/8. – с.41-49.
14. Роч П. Вычислительная гидромеханика / П.Роч. – М.: Мир, 1980. – 616с.