

УДК 539.3

## Численный метод построения расчетной области для задач гидроупругих колебаний элементов конструкции

А. В. Линник, Р. П. Москаленко, Е. А. Стрельникова

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина  
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина*

Обоснован и усовершенствован метод расчета частот и форм колебаний слабоизогнутой лопасти, основанный на замене пространственного элемента конструкции плоским. Метод основан на применении граничных интегральных уравнений. Построен алгоритм численного решения задачи для определения давления на пластинку со стороны жидкости с использованием проекционного метода. Разработана процедура построения рабочей области для проведения численного интегрирования в задачах о свободных колебаниях элементов конструкции при взаимодействии с жидкостью. Частоты колебаний лопасти определены с использованием двух приближенных подходов.

**Ключевые слова:** численное интегрирование, свободные колебания, метода граничных элементов.

Обґрунтовано і вдосконалено метод розрахунку частот і форм коливань слабковигнутої лопаті, заснований на заміні просторового елементу конструкції плоским. Метод заснований на застосуванні граничних інтегральних рівнянь. Побудовано алгоритм чисельного рішення задачі для визначення тиску на пластину з боку рідини з використанням проєкційного методу. Розроблено процедуру побудови робочої області для проведення чисельного інтегрування в задачах про вільні коливання елементів конструкції при взаємодії з рідиною. Частоти коливань лопаті визначені з використанням двох наближених підходів.

**Ключові слова:** чисельне інтегрування, вільні коливання, методу граничних елементів.

The method of calculating the frequencies and vibration modes of slightly curved blade, based on replacing the spatial element by the flat one, has been substantiated and improved. The method is based on the usage of boundary integral equations. The algorithm for a numerical calculation to determine the liquid pressure on the blade by using the projection method is proposed. The workspace building procedure for the numerical integration in the free oscillation fluid-structure interaction problems is developed. The blade vibration frequencies have been determined by using two approximate approaches.

**Key words:** numerical integration, free oscillations, boundary element method.

### 1. Введение

Постоянное развитие современной техники выдвигает повышенные требования к исследованиям в области механики деформируемого твердого тела и строительной механики, посвященным развитию достоверных представлений о деформационных и механических свойствах материалов в различных режимах их эксплуатации, особенно при динамических нагрузках, когда существенную роль играют геометрия рассматриваемого элемента и его упругие свойства.

Исследованию задач о гидроупругом взаимодействии элементов конструкций посвящено большое количество работ [1-6] и др., и интерес к этой проблеме не ослабевает.

Изучение частот и форм собственных колебаний лопастей в жидкости является актуальной задачей при проектировании рабочих колес гидротурбин, при оценке остаточного ресурса гидротурбинного оборудования. Такие исследования необходимо проводить для предотвращения резонанса. По техническим причинам невозможно провести эксперимент для определения частот колебаний реальных лопастей в воде. Поэтому актуальным является развитие методов компьютерного моделирования.

Предлагаемые для решения таких задач инженерные методики обычно основываются на упрощающих гипотезах (плоских сечений, совпадения форм колебаний в воздухе и жидкости и др.). Такие подходы не могут быть приложены без дополнительных обоснований к задаче о погруженной в жидкость оболочке, моделирующей лопасть рабочего колеса, взаимодействующего с водной средой.

Современные методы построения математических моделей, с помощью которых строятся решения задач о колебаниях элементов конструкции, зачастую являются также и время- и ресурсо- затратными. И, хотя с их помощью можно получать в достаточной степени точные значения, в ряде случаев для принятия технических решений достаточно иметь приближенную оценку искомых динамических параметров.

## 2. Постановка задачи о гидроупругих колебаниях элементов конструкций в воде

Малые колебания оболочечного элемента конструкции, взаимодействующего с жидкостью, описываются уравнением

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}_a, \quad (1)$$

где  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  – операторы упругих и массовых сил,  $\mathbf{P}_a$  – давление жидкости на рассматриваемый деформируемый элемент конструкции (например, лопасть),  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, w)$  – вектор-функция перемещений.

Для построения матрицы  $\mathbf{M}$  необходимо знать значения толщины рассматриваемого элемента в заданном наборе точек поверхности.

Предполагается, что жидкость является идеальной, несжимаемой, а ее движение, вызванное малыми колебаниями оболочки, безвихревое, свободные вихри не образуются и не сходят с несущей поверхности.

В этом случае движение жидкости можно изучать в трехмерной постановке методами теории потенциала. В рассматриваемом случае существует потенциал скоростей, удовлетворяющий всюду вне оболочки гармоническому уравнению, а на лицевых поверхностях оболочки  $S^\pm$  – условию непротекания.

При потенциальном течении возмущенная скорость жидкости представляется в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \text{grad}\Phi(x, y, z, t), \quad (2)$$

где  $\Phi(x, y, z, t)$  – потенциал скоростей, индуцированных малыми свободными колебаниями оболочечного элемента.

Для определения давления жидкости на смоченные поверхности служит линеаризованный интеграл Коши-Лагранжа, который в случае покоящейся жидкости может быть записан в следующем виде:

$$P = -\rho_2 \left[ \frac{\partial \Phi^+(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^-(x, y, z, t)}{\partial t} \right], \quad (3)$$

где  $\rho_2$  – плотность жидкости.

Для нахождения давления на пластину со стороны жидкости необходимо определить функцию  $\Phi(x, y, z, t)$ , решая уравнение Лапласа при следующем граничном условии

$$(\Phi \cdot \mathbf{n})|_S = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad w = (\mathbf{U}, \mathbf{n}), \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к рассматриваемому элементу, а правая часть уравнения представляет собой скорость нормального перемещения деформируемого элемента.

Таким образом, требуется определить функции  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ ,  $\Phi(x, y, z, t)$ , удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (1) и уравнению Лапласа, условиям непротекания (4), закрепления пластины и затухания возмущенной скорости жидкости на бесконечности.

Рассмотрим задачу о малых гармонических колебаниях упругой лопасти в потоке. Представим вектор  $\mathbf{U}$  в форме  $\mathbf{U} = \mathbf{u}e^{i\Omega t}$ , где  $\Omega$  – частота, а  $\mathbf{u}$  – собственная форма колебаний в жидкости. При этом  $\Phi = \varphi e^{i\Omega t}$ . Будем искать

собственные формы колебаний в жидкости в виде ряда  $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k$ ,

где  $\mathbf{u}_k$  – собственные формы колебаний лопасти в воздухе.

$$\text{Тогда } w = \sum_{k=1}^N c_k w_k.$$

Пусть  $S$  – поверхность, ограничивающая погруженную в жидкость лопасть. Представим функцию  $\varphi(x, y, z)$  в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью  $\Gamma(\xi)$ ,  $\xi \in S$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi. \quad (5)$$

Известно, что  $\varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$ , т.е. перепад давления пропорционален плотности потенциала двойного слоя  $\Gamma$ .

Вычисляя нормальную производную потенциала двойного слоя (5) и подставляя полученное выражение в граничные условия (4), приходим к гиперсингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi = i\Omega w. \quad (6)$$

Пусть функции  $\Gamma_k(\xi)$  являются решениями гиперсингулярного уравнения (6) с соответствующим образом выбранными правыми частями:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi = w_k.$$

Запишем формальное равенство

$$\Gamma_k(\mathbf{x}) = H(w_k),$$

где  $H$  – обратный оператор к интегральному оператору в (6).

Приходим к проблеме собственных значений

$$c_j \Omega_j^2 = \Omega^2 \sum_{k=1}^N c_k \left[ \delta_{kj} + (H(\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{u}_j) \right]. \quad (7)$$

Определив решение задачи (7), вычисляем частоты  $\Omega$  колебаний оболочки в жидкости, а, зная коэффициенты  $c_k$ , находим формы ее колебаний в жидкости. Построенную в (7) матрицу  $P_{kj} = (H(\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{u}_j)$  называют матрицей присоединенных масс жидкости.

### 3. Численное определение элементов матрицы присоединенных масс жидкости

Для нахождения элементов матрицы присоединенных масс необходимо решить гиперсингулярное интегральное уравнение (6) с правыми частями в виде  $w_j$ .

Для решения гиперсингулярного уравнения (6) применен метод граничных элементов [2,6]. Область интегрирования разбивалась на конечное число четырехугольных подобластей  $N_S$ , в каждой из которых неизвестная плотность заменялась постоянной величиной. При вычислении конечной части по Адамару для интегралов в (6) по четырехугольнику, произвольно ориентированному в пространстве, использованы формулы [6].

Элементы матрицы присоединенных масс находились по формуле

$$P_{ik} = \iint_S \Gamma_i(x) w_k(x) dS, \quad (8)$$

где  $\Gamma_i(x)$  – амплитудные значения давления, индуцированного собственной формой  $w_k(x)$ .

После определения элементов матрицы присоединенных масс решается задача на собственные значения, описанная уравнением (7).

#### 4. Свободные колебания лопастей поворотно-лопастных рабочих колес в водной среде

В работе проведен расчет частот и форм собственных колебаний модели лопасти рабочего колеса поворотно-лопастной гидротурбины Нижне-Тулумской ГЭС. Геометрические и механические параметры взяты из работы [7].

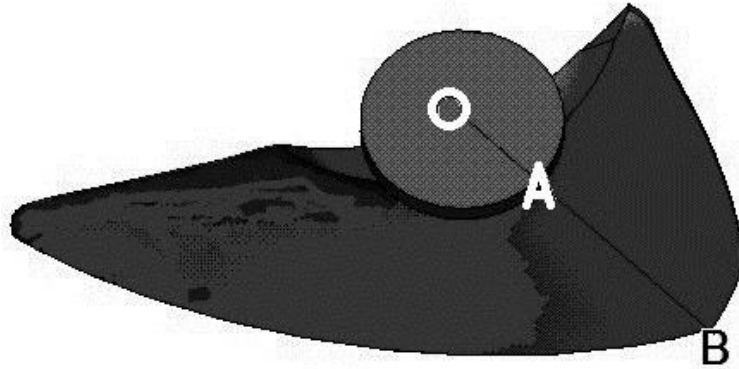


Рис.1. Общий вид лопасти рабочего колеса поворотно-лопастной турбины

Расчеты выполнялись для ОАО «Турбоатом». При инженерных расчетах указанные лопасти моделируются пластинами переменной толщины. Выбираются секториальные пластинки, толщины которых меняются по линейному закону. Меньшее значения радиуса равно значению радиуса  $OA$ , а большее значение –  $OB$ . Предполагается, что толщина секториальной пластинки изменяется по линейному закону, от значения в точке  $A$  до значения в точке  $B$  (рис. 1).

Цель данного исследования – обосновать и усовершенствовать инженерный подход, когда реальная слабоизогнутая лопасть моделируется пластиной переменной толщины.

Общий вид пластин, которыми моделируется лопасть Нижне-Тулумской ГЭС, приведен на рис.2. Здесь показаны как секториальная пластинка, так и пластинка, полученная по предложенному уточненному алгоритму.

Использование методов, основанных на численном интегрировании, требует корректного построения соответствующих сеток.

Предполагается, что поверхность оболочки аналитически задана в некоторой системе координат. Все рассмотрения проводятся в евклидовом пространстве. Выбирается новая система координат, в одной из плоскостей которой будет строиться «рабочая» проекция поверхности. Понятие «рабочая» подразумевает, что решение задачи будет построено по данным, относящимся к новой системе координат. Отметим, что для вычисления гиперсингулярных интегралов с постоянной плотностью по плоским элементам получена аналитическая формула [8,9].

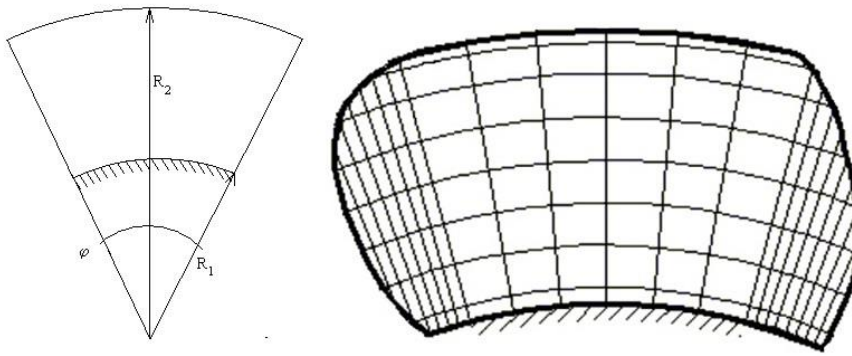


Рис.2. Сетка граничных элементов

Выбор новой системы координат определяется двумя критериями:

1) Перпендикулярность к вектору скорости натекающей жидкости, то есть ось  $Z'$  в новой системе координат параллельна вектору скорости потока жидкости (оптимальное условие – однородность потока);

2) Сонаправленность осей  $X'$  и  $Y'$  с проекциями окаймляющего прямоугольника на плоскость, перпендикулярную к оси  $Z'$  (окаймляющий прямоугольник можно выбрать как по принципу наименьшей площади, так и по максимальной длине одной из сторон при условии, что каждая грань прямоугольника имеет минимум одну общую с контуром фигуры точку).

Определившись с направлением осей в рабочей системе координат, строим проекцию контура исходной поверхности на плоскость  $X'Y'$ .

Методом R-функций строится предикатное уравнение рабочей области [8].

Этап выбора и построения сетки разбиения для интегрирования проводится в начальной стадии решения методом [8], исходя из координат узлов в новой плоскости.

#### 4.1. Построение области интегрирования

Поскольку необходимо вычислять большое количество двойных интегралов (8) по созданной области, применяется процедура подготовки области интегрирования, формирующая сетку интегрирования по обоим направлениям. Находятся границы созданной области по оси  $Y$  при заданных координатах  $X$  с помощью процедуры поиска корней гибридным методом Ньютона-Рафсона с бисекцией [10].

В узлах на линиях интегрирования строятся нормали, сонаправленные с натекающим потоком.

Таким образом, формируется векторный базис нормалей  $\{\vec{N}_1; \dots; \vec{N}_m\}$ , где  $m$  – количество узлов разбиения.

Поскольку мы имеем две системы координат в пространстве (Рис. 3), то для удобства работы нам необходимо преобразовать аналитическое выражение заданной поверхности в новой системе координат.

Далее необходимо перейти от показателя высоты по оси  $Z$  к набору значений матрицы толщин по оси  $Z'$ , взятых в точках пресечения нормалей к рабочей плоскости с исследуемой поверхностью.

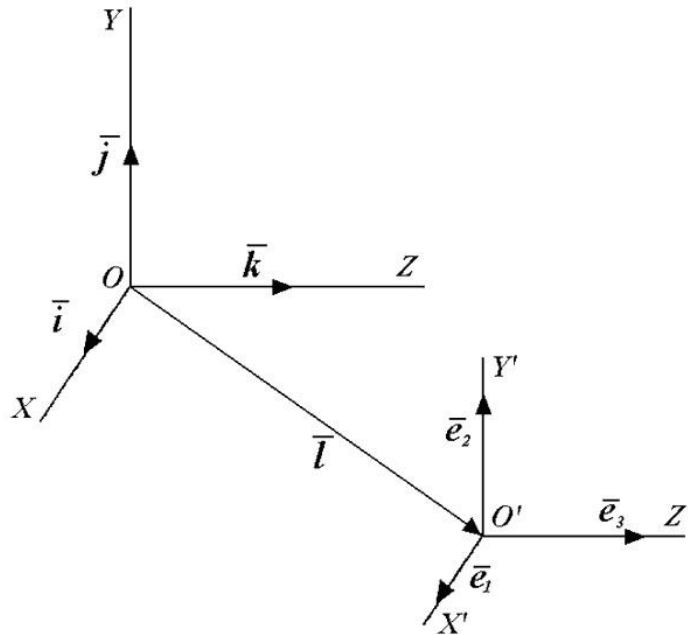


Рис.3. Две системы координат в пространстве

Воспользовавшись преобразованием аналитического выражения заданной поверхности в новой системе координат, получим значения матрицы эффективных толщин

$$H_{(m,n)} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \\ \dots & \dots & \dots \\ h_m & \dots & h_{n-m} \end{bmatrix},$$

где  $n$  – количество линий интегрирования,  $m$  – количество узлов на линии. Узлам, не попавшим внутрь контура, в матрице соответствуют нулевые значения.

Пусть  $G'$  - функция, описывающая поверхность заданной оболочки в рабочей системе координат. Построив нормали к рабочей плоскости в узлах и получив набор значений точек их пересечения с оболочкой, формируем матрицу

$$Q_1(x', y', z')_{(m,n)} = \begin{bmatrix} q_1^1(x', y', z') & \dots & q_n^1(x', y', z') \\ \dots & \dots & \dots \\ q_m^1(x', y', z') & \dots & q_{n-m}^1(x', y', z') \end{bmatrix}.$$

Исследовав функцию  $G'$  на нули по оси  $Z'$  в точках  $Q_1(x', y')_{(m,n)}$ , и получил второй набор точек

$$Q_2(x', y')_{(m,n)} = \begin{bmatrix} q_1^2(x', y', z') & \dots & q_n^2(x', y', z') \\ \dots & \dots & \dots \\ q_m^2(x', y', z') & \dots & q_{n-m}^2(x', y', z') \end{bmatrix},$$

поэлементно заполняем  $H_{(m,n)}$  значениями эффективной толщины, вычисляя расстояния между элементами  $Q_1(x', y')_{(m,n)}$  и  $Q_2(x', y')_{(m,n)}$ .

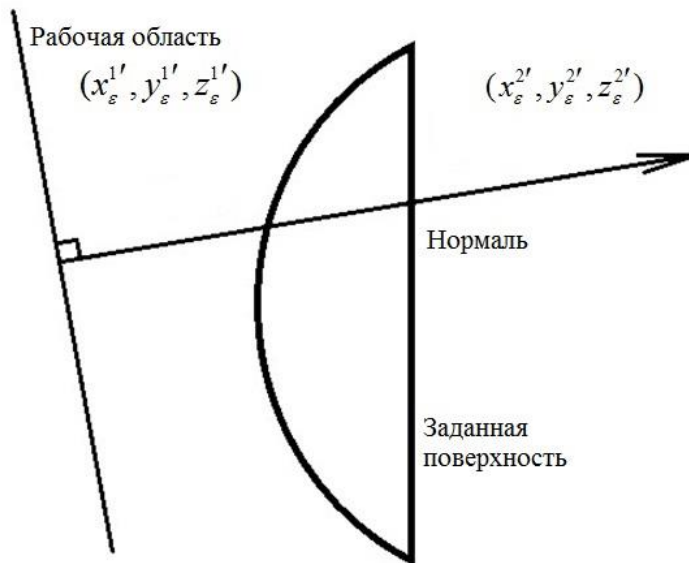


Рис.4. Точки пересечения нормали и поверхности

Таким образом, вместо рассмотрения секториальной пластинки с линейно меняющейся толщиной рассматриваем пластинку, координаты точек которой и значения толщин построены по заданному алгоритму.

На рисунке 2 показана сетка граничных элементов, построенная по предложенному алгоритму. Была построена сетка из 96 граничных элементов. Увеличение их количества вдвое привело к изменению результатов лишь в четвертом знаке.

В табл.1 приведены результаты расчетов и эксперимента. Экспериментальные данные получены в лаборатории водяных турбин Ленинградского металлического завода [7].



<i>Таблица 1. Сравнение расчетных и экспериментальных данных</i>					
Частоты колебаний, Гц					
Номер частоты	в вакууме		в воде		
	Эксперимент	Расчет (инженерный метод)	Эксперимент	Расчет (инженерный метод)	Расчет (предложенный метод)
Иювская ГЭС					
1	380	425	220	231	223
2	542	540	340	358	350
3	869	754	567	580	575
4	110 7	1132	711	770	720
Нижне-Туломская ГЭС					
1	85,6	82,0	46,2	43,0	47,2
2	112	112	70,4	72	73

Приведенные результаты свидетельствуют о хорошем согласовании теоретических и экспериментальных данных. Как в расчетных, так и в экспериментальных данных прослеживается практическое совпадение форм колебаний в вакууме и в воде. Данные, полученные путем замены реальной лопасти секториальной пластинкой, отличаются от полученных по разработанному методу приблизительно на 6-10%. Разработанная методика позволяет получить лучшее согласование с экспериментальными данными.

### 5. Выводы

В работе обоснован и усовершенствован метод расчета частот и форм колебаний слабоизогнутой лопасти, основанный на замене пространственного элемента конструкции плоским. Разработан метод построения рабочей области для проведения численного интегрирования в задачах о свободных колебаниях элементов конструкции при взаимодействии с жидкостью с использованием метода граничных элементов. Предложенная методика позволяет рассматривать изогнутые поверхности обтекания, что расширяет класс задач гидроупругого взаимодействия элементов конструкции. Преимуществом рассматриваемого подхода является возможность применения решения, ориентированного на плоские элементы, для конструкций, элементы которой имеют сложную пространственную форму. В дальнейшем предполагается получить численные значения частот и форм колебаний оболочечных тонкостенных элементов энергетического оборудования при взаимодействии со средой, а так же при наличии дефектов. Отметим, что применение метода не ограничивается задачами гидроупругого взаимодействия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Ю.С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин. □ Киев: Наук. думка, 1988. □ 214 с.
2. Avramov K.V., Strel'nikova E.A.. Chaotic oscillations of plates interacting on both sides with a fluid flow. //International applied mechanics, 2015, V.50, N3, pp.303-309.
3. Kumar, V. & Ganesan, N., Dynamic analysis of conical shells conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, **310(1-2)**, pp. 38–57, 2008
4. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid // Intern. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 4. – P. 421– 448
5. Amabili M., Païdoussis M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // Applied Mechanics Review. – 2003. – 56(4). – pp. 349-381.
6. Емельянов Т., Науменко А., Стрельникова Е., Шелудько Г.. Собственные колебания пластин в сжимаемой жидкости. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління, 201, вып.16, С.132-140.
7. Науменко В.В., Сацук В.Г., Явиц С.Н. Определение частот и форм свободных колебаний упругих пластин типа лопастей гидротурбин в идеальной несжимаемой жидкости //Пробл. машиностроения.–1989.– Вып.31. – С. 20–23.
8. Рвачёв В. Л., Курпа Л. В., Склепус Н. Г., Учишвили Л. А. «Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы». — Киев: Наук. думка, 1973.
9. Стрельникова Е.А., Ржевская И.Е., Ганчин Е.В. Прочность, динамика и ресурс лопасти рабочего колеса поворотной-лопастной гидротурбины. *Авиационно-космическая техника и технология*, 2009, вып.9, С.91-94.
10. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике. Труды ИСА РАН, 2006, том 28, Сю 48-56.