УДК 539.3

Интегральные уравнения в задаче об изгибе трансверсально-изотропной пластины с разрезом

И. П. Боков, Е. А. Стрельникова

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина

Рассматривается бесконечная трансверсально-изотропная пластина с разрезом, которая находится в равновесии под действием приложенных на бесконечности усилий, а также сосредоточенных сил и изгибающих моментов, действующих в окрестности разреза. С использованием фундаментальных решений для трансверсально-изотропных пластин получены интегральные представления для изгибающих моментов. Использован численный метод решения интегральных уравнений. Вычислены значения нагрузок вблизи разреза, которые позволят исследовать характер поведения хрупких тел с концентраторами напряжений в зависимости от упругих постоянных материалов и действующих сил.

Ключевые слова: *трансверсально-изотропные пластины, интегральные уравнения, фундаментальные решения, концентраторы напряжений, изгибающие моменты.*

Розглядається нескінченна трансверсально-ізотропна пластина з розрізом, яка знаходиться в рівновазі під дією зусиль, що прикладені до границь пластини на нескінченності та зосереджених сил і згинальних моментів, що діють в околі розрізу. З використанням фундаментальних розв’язків для трансверсально-ізотропних пластин отримано інтегральні зображення згинальних моментів. Використано чисельний метод розв’язання інтегральних рівнянь. Обчислені значення навантажень поблизу розрізу, які дозволять досліджувати характер поведінки крихких тіл з концентраторами напружень у залежності від пружних сталих матеріалів і діючих сил.

Ключові слова: *трансверсально-ізотропні пластини, інтегральні рівняння, фундаментальні рішення, концентратори напружень, згинальні моменти.*

An infinite transversely isotropic plate with a slit being in equilibrium under forces applied to the plate boundaries in infinity as well as concentrated forces and bending moments applied near the split is under consideration. By using the fundamental solutions for the transversely isotropic plate, the integral representations for bending moments were obtained. The numerical method for solving integral equations has been applied. The load values near the split have been calculated. That will allow us to analyze the behavior of brittle solids according to the elastic constants of materials and effective forces.

Key words: *transversely isotropic plates, integral equations, fundamental solutions, stress concentrators, bending moments.*

Введение

Проектирование, создание и эксплуатация элементов конструкций в современных условиях требуют разработки достоверных методов оценки их работоспособности. Известно, что в структуре реального конструкционного материала имеются (или возникают в процессе его деформирования) различного рода микродефекты. Эти дефекты являются концентраторами напряжений. Развитие дефектов под действием внешней нагрузки может привести к частичному или полному разрушению конструкции.

При исследовании предельного равновесия тел, содержащих дефекты типа трещин, требуется определить критическое значение внешней нагрузки, при достижении которой трещина начинает распространяться. В элементах конструкций, работающих при определенных внешних нагрузках и определенных режимах их изменения, наличие устойчивых трещин не опасно.

Вопрос продления времени эксплуатации элементов с дефектами такого рода является важной проблемой, как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Одной из важнейших составляющих механики разрушения упругих тел является математическая теория трещин. Эта теория хорошо разработана, и ее основы и этапы развития изложены в следующих монографиях и обзорах: [1, 2]. Физическим аспектам возникновения и распространения трещин посвящена работа [3].

Учитывая актуальность проблемы устойчивости пластин с дефектами, аналитическим и экспериментальным её исследованиям внимание уделялось неоднократно [4 - 6].

Одним из методов исследования концентрации напряжения в телах с трещинами является метод интегральных уравнений, основанный на теории потенциала. Использование этого метода предполагает наличие фундаментальных решений для рассматриваемой задачи.

Разработке методов построения фундаментальных решений (решений, соответствующих сосредоточенным воздействиям) уравнений теории упругих тонких пластин и оболочек посвящено большое количество публикаций. Постановки задач, методы их решения и ряд конкретных результатов содержатся в монографиях и научных статьях В. М. Даревского [7] и других. Фундаментальные решения уравнений статики для изотропных и трансверсально-изотропных пластин, используя уточненную теорию, были получены в статьях И. П. Бокова, Е. А. Стрельниковой [8, 9].

Из проведенного анализа следует, что имеющиеся фундаментальные решения, построенные по уточненной теории, относятся к бесконечным изотропным и трансверсально-изотропным пластинам.

1. Постановка задачи

Рассматривается бесконечная трансверсально-изотропная пластина толщиной $2h$ со сквозной прямолинейной трещиной длинной $2l$. Пластина находится в равновесии под действием усилий, приложенных к границам пластины и на бесконечности, сосредоточенных сил $P^{(i)}$ и моментов $M^{(i)}$ в точках с координатами $(x_j; y_j)(i=1,...,N)$ декартовой системы координат $Oxy\tilde{z}$, начало которой находится в геометрическом центре трещины, плоскость xOy совпадает с серединной плоскостью пластины, а ось Ox направлена вдоль трещины.

Сосредоточенные силы $P^{(i)}$ полагаются перпендикулярными к основам пластины, а вектор момента $M^{(i)}$ имеет две составляющие - $M_x^{(i)}$ и $M_y^{(i)}$.

Граничные условия трещины имеют вид:

$$M_x^+ - M_x^- = 0,\ M_y^+ - M_y^- = 0, \qquad (|x|<l) \tag{1.1}$$

$$M_x^+ = M_x^- = p_1(x),\ M_y^+ = M_y^- = p_2(x), \qquad (|x|<l)$$

где знаками «+» и «-» здесь и в остальных случаях обозначены граничные значения функции при $y \to \pm 0$. Для определения $p_i(x)$ $(i = 1,2)$, предположим, что в точке с координатами (0; 1) приложен сосредоточенный момент единичной интенсивности. Для трещин с $l = 1$, приведем значения этих функций

$$p_1(x) = \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1-\nu}{4} \frac{x^2-1}{x^2+1}, \tag{1.2}$$

$$p_2(x) = \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2+1}}{2} - \frac{1-\nu}{4} \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

где ν - коэффициент Пуассона; $C = \ln\gamma = 0{,}5772..$ - константа Эйлера.

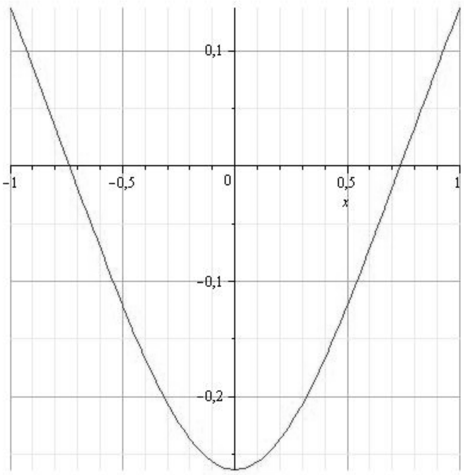

Рис. 1 Функция $p_1(x)$

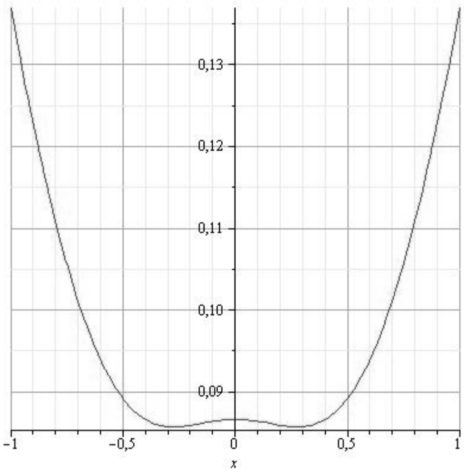

Рис. 2 Функция $p_2(x)$

На рис. 1 и 2 представлены графики функций (1.2), представляющие собой выражения для изгибающих сил на контуре трещины.

2. Вывод интегральных уравнений

Рассмотрим ранее полученные выражения для изгибающих моментов [9]. Положим $m_1^* = m_2^* = 0$

$$M_x = \frac{1}{2} q_3^* (1+\nu) \ln \frac{\gamma\sqrt{x^2+y^2}}{2} + \frac{1}{4} q_3^* (1-\nu) \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \tag{2.1}$$

$$M_y = \frac{1}{2} q_3^* (1+\nu) \ln \frac{\gamma\sqrt{x^2+y^2}}{2} + \frac{1}{4} q_3^* (1-\nu) \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}.$$

Для построения интегрального представления предположим, что сосредоточенная сила действует на отрезке $[-l; l]$. В каждой точке этого отрезка величины q_3^* являются функциями $w_x(\xi)$ и $w_y(\xi)$ $(\xi \in [-l; l])$ для M_x, M_y соответственно. Данные функции нам неизвестны.

Запишем интегральные представления для изгибающих моментов M_x, M_y при $x = x - \xi$, $y = y - \eta$ ($x = \xi$, $y = \eta$ - особая точка). Учитывая, что $\eta = 0$, так как трещина расположена вдоль оси Ox, получим

$$M_x = \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_x(\xi)\ln\frac{\gamma\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}{2}d\xi + \frac{1-\nu}{4}\int_{-l}^{l} w_x(\xi)\frac{(x-\xi)^2-y^2}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi, \qquad (2.2)$$

$$M_y = \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_y(\xi)\ln\frac{\gamma\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}{2}d\xi + \frac{1-\nu}{4}\int_{-l}^{l} w_y(\xi)\frac{y^2-(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi.$$

Рассмотрим выражения (2.2) при $y \to 0$

$$M_x = \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_x(\xi)\ln\frac{\gamma}{2}|x-\xi|d\xi + \frac{1-\nu}{4}\int_{-l}^{l} w_x(\xi)d\xi, \qquad (2.3)$$

$$M_y = \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_y(\xi)\ln\frac{\gamma}{2}|x-\xi|d\xi - \frac{1-\nu}{4}\int_{-l}^{l} w_y(\xi)d\xi.$$

В задачах теории трещин требуется, чтобы было выполнено соотношение $\int_{-l}^{l} w(\xi)d\xi = 0$ - условие однозначности смещений. Перепишем выражения (2.3), учитывая это условие

$$M_x = \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_x(\xi)\ln\frac{\gamma}{2}|x-\xi|d\xi, \qquad (2.4)$$

$$M_y = \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_y(\xi)\ln\frac{\gamma}{2}|x-\xi|d\xi.$$

Запишем (2.4) учитывая, что $\ln\frac{\gamma}{2}|x-\xi| = \ln\frac{\gamma}{2} + \ln|x-\xi|$. Получим

$$M_x = \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_x(\xi)\ln\frac{\gamma}{2}|x-\xi|d\xi = \frac{1+\nu}{2}\ln\frac{\gamma}{2}\int_{-l}^{l} w_x(\xi)d\xi + \qquad (2.5)$$

$$+\frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_x(\xi)\ln|x-\xi|d\xi,$$

$$M_y = \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_y(\xi)\ln\frac{\gamma}{2}|x-\xi|d\xi = \frac{1+\nu}{2}\ln\frac{\gamma}{2}\int_{-l}^{l} w_y(\xi)d\xi + \frac{1+\nu}{2}\int_{-l}^{l} w_y(\xi)\ln|x-\xi|d\xi.$$

Учитывая условие однозначности смещений, запишем интегральные уравнения для M_x, M_y

$$M_x = \int_{-l}^{l} w_x(\xi)\ln|x-\xi|d\xi = \frac{2}{1+\nu}p_1(x), \qquad (2.6)$$

$$M_y = \int_{-l}^{l} w_y(\xi)\ln|x-\xi|d\xi = \frac{2}{1+\nu}p_2(x).$$

Аналитического решения для полученных уравнений с данными правыми частями не существует, поэтому необходимо использовать численный метод.

3. Метод численного решения

Продифференцируем уравнения (2.6) по переменной x. Получим сингулярные уравнения с ядрами типа Коши

$$M_x^{'} = \int_{-l}^{l} \frac{w_x(\xi)}{x-\xi} d\xi = \frac{2}{1+\nu} p_1^{'}(x), \tag{3.1}$$

$$M_y^{'} = \int_{-l}^{l} \frac{w_y(\xi)}{x-\xi} d\xi = \frac{2}{1+\nu} p_2^{'}(x).$$

Рассмотрим выражения (3.1) при $l=1$. Сделаем замену неизвестных функций

$$w_x(\xi) = \frac{w_{x0}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad w_y(\xi) = \frac{w_{y0}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{3.2}$$

Для сведения системы интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений воспользуемся многочленами Чебышева I и II рода [10] и квадратурной формулой Корнейчука-Старка [11]

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \qquad U_{n-1}(t) = \frac{\sin(n \arccos t)}{\sin(\arccos t)}. \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w_{u0}(x_k)}{n} \frac{1}{x_k - x_{0k}} = p_i(x), \qquad (u = x, y), \qquad (i = 1,2). \tag{3.4}$$

Запишем систему алгебраических уравнений из n-1 уравнений с n – неизвестными. Вид системы следующий $Av = p$, где

$$v = \begin{Bmatrix} v(t_1^n) \\ v(t_2^n) \\ \vdots \\ v(t_n^n) \end{Bmatrix}, \qquad p = \begin{Bmatrix} p(t_{01}^n) \\ p(t_{02}^n) \\ \vdots \\ p(t_{0(n-1)}^n) \end{Bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$a_{kj} = h_{mk},$$

где $h_{mk} = \dfrac{1}{(x_k - x_{0m})n}$, $\quad x_k = \cos\dfrac{\pi(2k-1)}{2n}$, $\quad x_{0m} = \cos\dfrac{\pi m}{n}$, $\quad (k = 1,\ldots,n)$, $(m = 1,\ldots,n-1)$, n - степень многочлена Чебышева.

Дополняем полученную систему условиями однозначности смещений

$$\int_{-1}^{1} \frac{w_{x0}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{w_{y0}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0. \tag{3.6}$$

Численное решение интегральных уравнений было найдено с помощью предложенного метода при $\nu = 0{,}28$. На рис. 3 и 4 представлены графики решений этих уравнений.

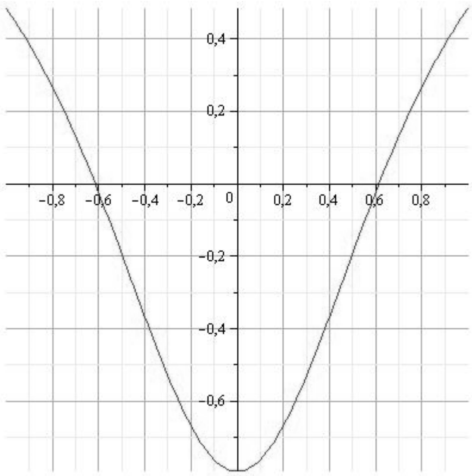

Рис. 3 Функция $w_x(x)$

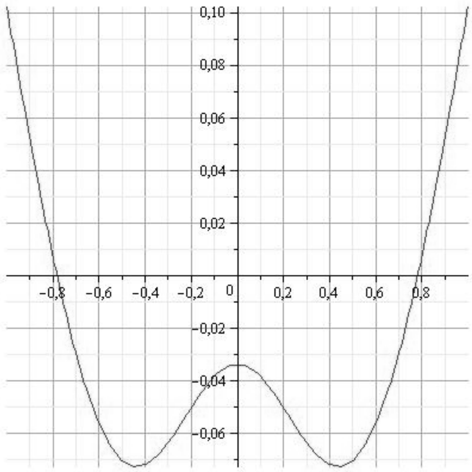

Рис. 4 Функция $w_y(x)$

Проверка алгоритма была произведена для правой части $p_1(x) = p_2(x) = x$. Численное и аналитическое решения приведены в табл. 1

Таблица 1. Данные проверки алгоритма

Численное решение	Аналитическое решение
0,9876883209	0,9876883410
0,8910065122	0,8910065278
0,7071067781	0,7071067907
0,4539905066	0,4539905165
0,1564344845	0,1564344889
-0,1564344357	-0,1564344359
-0,4539904641	-0,4539904687
-0,7071067485	-0,7071067528
-0,8910065069	-0,8910065035
-0,9876884475	-0,9876883326

Корректность использованного метода подтверждается точностью 10^{-7}, полученной для численного решения приведенного в табл. 1.

Заключение

Рассмотрена бесконечная трансверсально-изотропная пластина с разрезом, которая находится в равновесии под действием усилий, приложенных к границам пластины и на бесконечности, сосредоточенных сил и изгибающих моментов. Получены интегральные представления для изгибающих моментов. Вычислены значения нагрузок вблизи разреза, которые позволят исследовать характер поведения хрупких тел и условия их разрушения в зависимости от упругих постоянных различных материалов и действующих сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин / А. Е. Андрейкив – К. : Наук. думка,1982.- 346 с.
2. Бережницкий Л. Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. / Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук – К. : Наук. думка,1983. - 288 с.
3. Броек Д. Основы механики разрушения / Д. Броек - М.: Высшая школа, 1980. -368 с.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. / Г. Н. Савин Киев: – К. : Наук. думка,1968.-888с.
5. Михайлов Б. К. Исследование устойчивости прямоугольных пластин с прямоугольными отверстиями при продольном сжатии / Б. К. Михайлов, В. Г Москалева // Металлические конструкции: межвуз. темат. сб. тр. / Ленингр. инж.-строит. ин-т. – Л., 1983. С. 14–21.
6. Грачева Е. А. Устойчивость судовых пластин с трещинами / Е. А. Грачева // Механика разрушения и надежности судовых конструкций. – Горький, 1987. С. 23–29.
7. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) / В. М. Даревский // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 927 – 933.
8. Боков И. П. Построение фундаментального решения уравнений статики изотропных пластин средней толщины / И. П. Боков, Е. А. Стрельникова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Vol. 4, № 76. –С. 27–34.
9. Bokov I. P. Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates. / I. P. Bokov, E. A. Strelnikova // International Journal of Innovative Research in Engineering & Management. – 2015. – Vol. 2, Issue-6. –P. 56–62.
10. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю. В. Гандель – Харьков: ХНУ, 2001.- 92 с.
11. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. − 444 с.

Надійшла у першій редакції 10.03.2017, в останній - 21.03.2017.