УДК 519.6

Метод екстраполяції на основі модифікованих розділених різниць

А. Я. Бомба, А. П. Сьох, Ю. В. Турбал, М. Ю. Турбал
Національний університет водного господарства та природокористування, Україна

У статті пропонується метод екстраполяції часових рядів, що ґрунтується на основі аналізу розділених різниць. Пропонується процедура модифікації відповідних різниць та знаходження такого їх порядку, для якого вдається знайти в певному розумінні найкраще прогнозне значення. Тоді значення вихідної функції у точці , що знаходиться за межами інтерполяційного інтервалу, знаходиться на основі знайденого прогнозного значення для розділених різниць за допомогою спеціальної обчислювальної процедури.

Ключові слова: *екстраполяція, прогноз, розділені різниці, інтерполяція, часові ряди*

В статье предлагается метод экстраполяции временных рядов, основанной на основе анализа разделенных разностей. Предлагается процедура модификации соответствующих разностей и нахождения такого их порядка, для которого удается найти в определенном смысле лучше прогнозное значение. Тогда значение исходной функции в точке, расположенной за пределами интерполяционного интервала, находится на основе найденного прогнозного значения для разделенных разностей с помощью специальной вычислительной процедуры.

Ключевые слова: *экстраполяция, прогноз, разделенные разности, интерполяция, временные ряды*

The paper proposes a method of time series extrapolation, based on the analysis of divided differences. The procedure of modifying corresponding differences and finding such their order, for which a better predicted value (in a certain sense) can be found, is proposed. Then the value of the original function at the point, located outside the interpolation interval, can be found on the base of the predicted value for the divided differences by using a special computational procedure.

Keywords: *extrapolation, forecast, divided differences, interpolation, time series.*

1. Вступ

Очевидно, що прогноз фізичних, економічних, екологічних чи соціальних процесів [1] має визначальне значення при їх вивченні. На сьогодні розроблено низку якісних та кількісних підходів до прогнозування. Якщо якісні методи носять суб'єктивний характер і будуються на основі думок і суджень експертів, то кількісні методи грунтуються на побудові прогнозу як функції від попередніх даних [2].

Найбільш поширеними на сьогодні методами короткострокового прогнозування часових рядів є методи естраполяції. Серед відомих методів екстраполяції можна виділити методи, що грунтуються на основі інтерполяційних многочленів (найчастіше використовується інтерполяційний многочлен Н'ютона другого виду) [5],[10], узагальнених інтерполяційних многочленів по різних системах функції Чебишева (многочлени, експоненти, тригонометричні функції та ін.) [3], методи, що грунтються на основі аналізу тренду[6], методи екстраполяції на основі сплайнів (кубічних, В-сплайнів, кривих Без'є) [4],[9], методи, що грунтуються на основі статистичних підходів.

Зауважимо, що при вивченні часових рядів за умов малих об'ємів даних та побудові прогнозів виникає низка проблем [8]. Так, наприклад, за умов відсутності додаткової інформації часто неможливо зробити висновок про детермінованість чи недетермінованість процесу, що суттєво впливає на побудову його моделі. У випадку детермінованості очевидно, що для будь-якої сукупності точок $(t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_n, x_n)$ існує безліч кривих, які через них проходять чи якось їх наближають, і тому складно стверджувати, що якась одна крива (модель) є саме тим законом, який вичерпно описує явище та дозволить ефективно спрогнозувати його поведінку у майбутньому. Гіпотеза про закон, якому відповідають точкові спостереження, є ефективною, якщо вона дозволяє прогнозувати відповідний процес з прийнятною точністю починаючи з деякого кроку спостережень. Та на практиці знайти ефективну гіпотезу вдається далеко не завжди.

Основна ідея даної статті полягає в розробці ефективної методики знаходження прогнозного значення функції на основі точкових даних без прямого використання будь-яких конкретних класів екстраполяційних фукцій. При цьому при побудові прогнозу використовується максимальна кількість інформації, яка зосереджена у розділених різницях спеціального виду.

2. Ідея та підгрунтя авторського дослідження

Нехай маємо деякі значення функції $f_1, f_2, \dots, f_n$ визначені в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідно. Необхідно оцінити значення цієї ж функції f_{n+1}, що визначене в деякій точці $x = x_{n+1} > x_n$. Таким чином, маємо задачу екстраполяції функції, що задана таблично. Для розв'язання такої задачі на практиці використовують, як правило, інтерполяційні многочлени Н'ютона другого виду за умови, коли точка x знаходиться недалеко від кінцевої точки інтервалу визначення функції.

Як відомо [9], інтерполяційні многочлени Н'ютона першого та другого виду, відповідно, записуються у вигляді:

$$P_1^N(x) = f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ f(x_0, x_1, \dots, x_N)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{N-1}),$$
$$P_2^N(x) = f_n + f(x_{n-1}, x_n)(x - x_n) + f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)(x - x_{n-1})(x - x_n) + \dots$$
$$+ f(x_{n-N}, \dots, x_n)(x - x_{n-N+1})\dots(x - x_n),$$

де $f(x_i, x_j) = \dfrac{f_j - f_i}{x_j - x_i}$, $i \neq j$, $f(x_i, x_j, \dots, x_k, x_l) = \dfrac{f(x_j, \dots, x_l) - f(x_i, \dots, x_k)}{x_l - x_i}$.

Нехай

$$\Delta^i f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{x_{i+j} - x_i}, \tag{1}$$
$$\Delta^0 f_i = f_i.$$

Очевидно, що $\Delta^j f_i = f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}\right)$.

Тоді многочлен Н'ютона другого виду запишеться у вигляді:

$$P_2^N(x) = f_n + \Delta^1 f_{n-1}\left(x - x_n\right) + \Delta^2 f_{n-2}\left(x - x_{n-1}\right)\left(x - x_n\right) + \ldots$$

$$+ \Delta^N f_{n-N}\left(x - x_{n-N+1}\right)\ldots\left(x - x_n\right).$$

На практиці значення відповідних многочленів обчислюють з використанням таблиці розділених різниць (див. Таб.1).

Припустимо, що для деякого рядка k таблиці виконується рівність:

$$\Delta^k f_{n-k+1} = \Delta^k f_{n-k} \tag{2}$$

Тоді з врахуванням (1) маємо: $\Delta^k f_{n-k} = \Delta^k f_{n-k+1} = \dfrac{\Delta^{k-1} f_{n-k+2} - \Delta^{k-1} f_{n-k+1}}{x - x_{n-k+1}}$

Таблиця 1 Схема обрахунку розділених різниць

					f_{n+1}	x_{n+1}
				$\Delta^1 f_n$		
			$\Delta^2 f_{n-1}$		f_n	x_n
		$\Delta^3 f_{n-2}$		$\Delta^1 f_{n-1}$		
	$\Delta^4 f_{n-3}$		$\Delta^2 f_{n-2}$		f_{n-1}	x_{n-1}
		$\Delta^3 f_{n-3}$		$\Delta^1 f_{n-2}$		
	$\Delta^4 f_{n-4}$		$\Delta^2 f_{n-3}$		f_{n-2}	x_{n-2}
$\Delta^5 f_{n-5}$		$\Delta^3 f_{n-4}$		$\Delta^1 f_{n-3}$		
…	…	…	…	…	…	…
$\Delta^5 f_1$		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^1 f_3$		
	$\Delta^4 f_1$		$\Delta^2 f_2$		f_3	x_3
		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^1 f_2$		
			$\Delta^2 f_1$		f_2	x_2
				$\Delta^1 f_1$		
					f_1	x_1

Звідси

$$\Delta^{k-1} f_{n-k+2} = \Delta^k f_{n-k+1}\left(x - x_{n-k+1}\right) + \Delta^{k-1} f_{n-k+1},$$

$$\Delta^{k-2} f_{n-k+3} = \Delta^{k-1} f_{n-k+2}\left(x - x_{n-k+2}\right) + \Delta^{k-2} f_{n-k+2} =$$

$$=\left(\Delta^k f_{n-k+1}\left(x-x_{n-k+1}\right)+\Delta^{k-1} f_{n-k+1}\right)\left(x-x_{n-k+2}\right)+\Delta^{k-2} f_{n-k+2} =$$
$$=\Delta^k f_{n-k+1}\left(x-x_{n-k+1}\right)\left(x-x_{n-k+2}\right)+\Delta^{k-1} f_{n-k+1}\left(x-x_{n-k+2}\right)+\Delta^{k-2} f_{n-k+2},$$
$$\Delta^{k-3} f_{n-k+4} =\Delta^{k-2} f_{n-k+3}\left(x-x_{n-k+3}\right)+\Delta^{k-3} f_{n-k+3} =$$
$$=\Delta^k f_{n-k+1}\left(x-x_{n-k+1}\right)\left(x-x_{n-k+2}\right)\left(x-x_{n-k+3}\right)+\Delta^{k-1} f_{n-k+1}\left(x-x_{n-k+2}\right)\left(x-x_{n-k+3}\right)+$$
$$+\Delta^{k-3} f_{n-k+3},$$
$$\ldots$$
$$f_{n+1}=\Delta^k f_{n-k+1}\left(x-x_{n-k+1}\right)\left(x-x_{n-k+2}\right)\ldots\left(x-x_n\right)+$$
$$+\Delta^{k-1} f_{n-k+1}\left(x-x_{n-k+2}\right)\ldots\left(x-x_n\right)+\ldots+f_n.$$
Звідси за умови (2)
$$f_{n+1}=\Delta^k f_{n-k}\left(x-x_{n-k+1}\right)\left(x-x_{n-k+2}\right)\ldots\left(x-x_n\right)+$$
$$+\Delta^{k-1} f_{n-k+1}\left(x-x_{n-k+2}\right)\ldots\left(x-x_n\right)+\ldots+f_n.$$

Таким чином, при виконанні умови (2) прогнозне значення функції f_{n+1} в деякій точці $x=x_{n+1}$ визначається як значення многочлена Н'ютона другого виду (формула інтерполювання назад) степеня k.

Очевидно, що умова (2) є досить грубим припущенням стостовно поведінки функції, заданої κ-тим рядком таблиці розділених різниць. Тому прогноз на основі інтерполяційної формули Н'ютона матиме значну похибку екстраполяції. Основна ідея методу, що пропонується, полягає у побудові вдосконаленої процедури знаходження значення $\Delta^k f_{n-k+1}$ на основі κ-того рядка таблиці (відмінної від співвідношення (2)) а також визначенні такого параметра к, для якого похибка відповідної апроксимації для тестових функцій була б мінімальною.

4. Суть та обґрунтування методу

Визначимо середини відповідних відрізків $x_i^c=\left(x_i+x_{i+1}\right)/2$. Введемо поняття модифікованих скінченних різниць наступним чином:

$$\Delta^1 f_i=\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}, i=\overline{1,n-1},$$

$$\Delta^2 f_i=\frac{\Delta^1 f_{i+1}-\Delta^1 f_i}{x_{i+1}^c-x_i^c}, i=\overline{1,n-2},$$

$$\Delta^3 f_i=\frac{\Delta^2 f_{i+1}-\Delta^2 f_i}{x_{i+2}-x_{i+1}}, i=\overline{1,n-3},$$

В загальному випадку маємо співвідношення:

$$\Delta^j f_i = \begin{cases} \dfrac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1} - x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}}, \; j = 2k+1, \\ \dfrac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{x^c_{i+\frac{j}{2}} - x^c_{i+\frac{j}{2}-1}}, \; j = 2k, \end{cases} \tag{3}$$

$j = \overline{1, n-1}, i = \overline{1, n-j}.$

Нехай $r_i^j = \begin{cases} x^c_{i+\frac{j}{2}}, \; j = 2k, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, \; j = 2k+1, \end{cases}$ $l_i^j = \begin{cases} x^c_{i+\frac{j}{2}-1}, \; j = 2k, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}, \; j = 2k+1. \end{cases}$

Тоді

$$\Delta^j f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{r_i^j - l_i^j}. \tag{4}$$

Очевидно, що різниці (2) краще апроксимують похідні функції та відрізняються від класичних, які розглядаються при побудові інтерполяційних многочленів Н'ютона.

Зауважимо, що у випадку знаходження наступного значення для будь-якого ряду k таблиці скінченних різниць $\Delta^k f_{n-k+1}$, легко можна збудувати прогнозне значення функції у точці x_{n+1} (див. рис.1) за наступною обчислювальною процедурою:

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+2} = \Delta^{j-1} f_{n-j+1} + \Delta^j f_{n-j+1}\left(r^j_{n-j+1} - l^j_{n-j+1}\right), \; j = \overline{k,1} \tag{5}$$

Проінтерполюємо значення функції у проміжних точках $x_i^c, i = \overline{1, n-1}$, визначивши значення функції $f_i^c, i = \overline{1, n-1}$ та знайдемо відповідні скінченні різниці:

$$\Delta^j f_i^c = \begin{cases} \dfrac{\Delta^{j-1} f^c_{i+1} - \Delta^{j-1} f^c_i}{x^c_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1} - x^c_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}}, \; j = 2k+1, \\ \dfrac{\Delta^{j-1} f^c_{i+1} - \Delta^{j-1} f^c_i}{x_{i+\frac{j}{2}+1} - x_{i+\frac{j}{2}}}, \; j = 2k, \end{cases} \tag{6}$$

$j = \overline{1, n-2}, i = \overline{1, n-j}.$

Ввівши величини $\hat{r}_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}+1}, & j = 2k, \\ x^c_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, & j = 2k+1, \end{cases}$ $\hat{l}_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}}, & j = 2k, \\ x^c_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}, & j = 2k+1, \end{cases}$

з (6) отримуємо:

$$\Delta^j f_i^c = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{\hat{r}_i^j - \hat{l}_i^j}.$$

Розглянемо співвідношення виду:

$$\tilde{\Delta}^2 f_{n-2}^c = \frac{\left(\dfrac{f_n - f_{n-1}^c}{x_n - x_{n-1}^c} - \dfrac{f_{n-1}^c - f_{n-1}}{x_{n-1}^c - x_{n-1}}\right)}{\dfrac{(x_n - x_{n-1})}{2}},$$

…

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \left(\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c\right)}{(r_i - c_i)(r_i - l_i)} - \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{(c_i - l_i)(r_i - l_i)}\right)2$$

де $i = \overline{2, n-1}$,

$$r_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}+1}, i = 2k, \\ x^c_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, i = 2k+1, \end{cases} \quad c_i = \begin{cases} x^c_{n-\frac{i}{2}}, i = 2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, i = 2k+1, \end{cases} \quad l_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}, i = 2k, \\ x^c_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}, i = 2k+1, \end{cases}$$

$$ll_i = \begin{cases} x^c_{n-\frac{i}{2}-1}, i = 2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}, i = 2k+1. \end{cases}$$

Нехай має місце рівність:

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \Delta^i f_{n-i}^c \qquad (7)$$

Очевидно, що при виконанніспіввідношення (7) можна збудувати процедуру знаходження невідомого значення функції у точці x_n^c аналогічну до (4).

Відповідні співвідношення мають вигляд :

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+1}^c = \Delta^{j-1} f_{n-j}^c + \Delta^j f_{n-j}^c \left(\hat{r}_{n-j}^j - \hat{l}_{n-j}^j\right), \qquad (8)$$

$$j = \overline{i,1}.$$

Знайдемо необхідні та достатні умови для виконання співвідношення (7). Нехай виконується (7).

Маємо:

$$\Delta^j f_i^c = \begin{cases} \dfrac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{x^c_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1} - x^c_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}}, \ j = 2k+1, \\ \dfrac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{x_{i+\frac{j}{2}+1} - x_{i+\frac{j}{2}}}, \ j = 2k, \end{cases}$$

$$\Delta^i f_{n-i}^c = \begin{cases} \dfrac{\Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c}{x^c_{n-i+\left[\frac{i}{2}\right]+1} - x^c_{n-i+\left[\frac{i}{2}\right]}}, i = 2k+1, \\ \dfrac{\Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c}{x_{n-i+\frac{i}{2}+1} - x_{n-i+\frac{i}{2}}}, i = 2k, \end{cases} = \frac{\Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c}{r_i - l_i}.$$

Таблиця 2 Схема обрахунку модифікованих скінченних різниць

					f_n^c	x_n^c
					f_n	x_n
			$\tilde{\Delta}^2 f_{n-2}^c$	$\Delta^1 f_{n-1}$	f_{n-1}^c	x_{n-1}^c
		$\tilde{\Delta}^3 f_{n-3}^c$	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\Delta^1 f_{n-2}^c$	f_{n-1}	x_{n-1}
	$\tilde{\Delta}^4 f_{n-4}^c$	$\Delta^3 f_{n-3}$	$\Delta^2 f_{n-3}^c$	$\Delta^1 f_{n-2}$	f_{n-2}^c	x_{n-2}^c
$\tilde{\Delta}^5 f_{n-5}^c$	$\Delta^4 f_{n-4}$	$\Delta^3 f_{n-4}^c$	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^1 f_{n-3}^c$	f_{n-2}	x_{n-2}
…	…	…	…	…	…	…
$\Delta^5 f_1$	$\Delta^4 f_1^c$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^2 f_2^c$	$\Delta^1 f_3$	f_3^c	x_3^c
	$\Delta^4 f_1$	$\Delta^3 f_1^c$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^1 f_2^c$	f_3	x_3
		$\Delta^3 f_1$	$\Delta^2 f_1^c$	$\Delta^1 f_2$	f_2^c	x_2^c
			$\Delta^2 f_1$	$\Delta^1 f_1^c$	f_2	x_2
				$\Delta^1 f_1$	f_1^c	x_1^c
					f_1	x_1

Отже, умова (7) запишеться у вигляді:

$$\frac{\left(\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}}{r_i - c_i} - \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{c_i - l_i}\right)2}{r_i - l_i} = \frac{\Delta^{i-1} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-1} f^c_{n-i}}{r_i - l_i}.$$

або

$$\left(\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}}{r_i - c_i} - \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{c_i - l_i}\right)2 = \Delta^{i-1} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-1} f^c_{n-i} \qquad (9)$$

Нехай $i = 2k$. Тоді

$$\Delta^{i-1} f^c_{n-i+1} = \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}}{x^c_{n-i+\left[\frac{i-1}{2}\right]+2} - x^c_{n-i+\left[\frac{i-1}{2}\right]+1}} = \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}+1} - x^c_{n-\frac{i}{2}}},$$

$$\Delta^{i-1} f^c_{n-i} = \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}}{x^c_{n-i+\left[\frac{i-1}{2}\right]+1} - x^c_{n-i+\left[\frac{i-1}{2}\right]}} = \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}}.$$

Співвідношення (9) запишеться у вигляді:

$$2\left(\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}\right)}{r_i - c_i} - \frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i - l_i}\right) =$$

$$= \Delta^{i-1} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-1} f^c_{n-i} = \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}+1} - x^c_{n-\frac{i}{2}}} - \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}}.$$

Розглянемо праву частину останньої рівності. Маємо послідовність очевидних співвідношень:

$$\frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}+1} - x^c_{n-\frac{i}{2}}} - \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}} =$$

$$= \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+2} + \Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}+1} - x^c_{n-\frac{i}{2}}} -$$

$$- \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1} + \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}} =$$

$$
=\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}\,\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}+
$$

$$
+\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}\,\frac{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}-\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}\,\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}-
$$

$$
-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}\,\frac{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}=\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}\,\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}-
$$

$$
-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}\,\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}+\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}\,\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}+
$$

$$
+\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}\,\frac{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}-\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}\,\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}+
$$

$$
+\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}\,\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}\,\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}-
$$

$$
-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}\,\frac{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}=
$$

$$
=\left(\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}\right)\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}+
$$

$$+\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}-\left(\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}\right)\times$$

$$\times\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}=$$

$$=2\left(\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}-\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}\right).$$

Звідси

$$\left(\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}\right)\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}+$$

$$+\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}-\left(\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}\right)\times$$

$$\times\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}-1}}-\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}+$$

$$+\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}=2\left(\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}-\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}}-x_{n-\frac{i}{2}}}\right),$$

$$\left(\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}-\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}\right)\frac{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^{c}_{n-\frac{i}{2}+1}-x^{c}_{n-\frac{i}{2}}}+$$

$$+\left(\frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x_{n-\frac{i}{2}}} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}}{x_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}}\right)\frac{x_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}} =$$

$$=\left(\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x^c_{n-\frac{i}{2}}} - \frac{\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x_{n-\frac{i}{2}}}\right).$$

Отримали лінійну комбінацію, яка доводить, що точки $\left(x^c_{n-\frac{i}{2}}, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i}\right)$, $\left(x_{n-\frac{i}{2}}, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i-1}\right)$, $\left(x_{n-\frac{i}{2}+1}, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i+1}\right)$ лежать на одній прямій за умов:

$$\frac{x^c_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}+1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}+1} - x^c_{n-\frac{i}{2}}} = \frac{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x_{n-\frac{i}{2}}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}} \text{ або } \frac{x_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}}{x^c_{n-\frac{i}{2}} - x^c_{n-\frac{i}{2}-1}} = \frac{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x^c_{n-\frac{i}{2}}}{x^c_{n-\frac{i}{2}+1} - x^c_{n-\frac{i}{2}}}.$$

Таким чином, отримали необхідну умову для виконання (7). Легко показати, що отримана умова є і достатньою, розглянувши наведене вище доведення у зворотньому порядку. Аналогічно розглядаємо випадок $i = 2k + 1$.

В загальному випадку можемо сформулювати твердження:

Твердження 1. Для виконанняумови (7) необхідно і достатньо, щоб точки $\left(c_i, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i}\right)$, $\left(l_i, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i-1}\right)$, $\left(r_i, \widetilde{\Delta}^i f^c_{n-i+1}\right)$ лежали на одній прямій.

Очевидно, що остання умова виконуватиметься (з точністю, яка відповідає точності наближення другої похідної скінченними різницями виду (6)), якщо на інтервалі $\left[l_i, r_i\right]$ крива, що проходить через відповідні точки, являтиме собою кубічний многочлен.

Нехай при деякому значенні i виконується умова:

$$\frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i - l_i} = \frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}\right)}{c_i - ll_i}. \qquad (10)$$

Покажемо, що точки $\left(c_i, \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1}\right)$, $\left(l_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)$, $\left(ll_i, \Delta^{i-2} f^c_{n-i}\right)$ лежать на одній прямій. Дійсно, з умови (10) маємо:

$$\Delta^{i-2} f_{n-i+1} = \Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \frac{\left(c_i - l_i\right)\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}\right)}{c_i - ll_i} =$$

$$= \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}\left(c_i - ll_i\right) + \left(c_i - l_i\right)\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}\right)}{c_i - ll_i} =$$

$$=\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}(l_i-ll_i)+(c_i-l_i)\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{c_i-ll_i}=\frac{\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}(l_i-ll_i)}{c_i-ll_i}+\frac{(c_i-l_i)\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}}{c_i-ll_i};$$

Тоді $\frac{c_i(l_i-ll_i)}{c_i-ll_i}+\frac{ll_i(c_i-l_i)}{c_i-ll_i}=l_i$.

При виконанні (10) має місце рівність:

$$\frac{\left(\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i-l_i}-\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{c_i-ll_i}=0\,.$$

Останній результат випливає з наступного співвідношення:

$$\frac{\left(\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i-l_i}-\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{c_i-ll_i}=$$

$$=\frac{\left(\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{c_i-ll_i}-\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{c_i-ll_i}=$$

$$=\frac{\left(\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}+\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{c_i-ll_i}-$$

$$-\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{c_i-ll_i}=$$

$$=\frac{\left(\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i-l_i}\frac{c_i-l_i}{c_i-ll_i}+\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{l_i-ll_i}\frac{l_i-ll_i}{c_i-ll_i}-$$

$$-\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{l_i-ll_i}=$$

$$=\frac{\left(\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i-l_i}\frac{c_i-l_i}{c_i-ll_i}+\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{l_i-ll_i}\frac{l_i-c_i}{c_i-ll_i}=$$

$$=\left(\frac{\left(\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i-l_i}-\frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}-\Delta^{i-2} f^{c}_{n-i}\right)}{l_i-ll_i}\right)\frac{c_i-l_i}{c_i-ll_i}.$$

Зауважимо, що у випадку коли функція має точку, де змінюється її випуклість, то її найкраще апроксимувати многочленом 3 степені саме на інтервалі, що містить цю точку . Дійсно, в точці зміни випуклості друга похідна є 0 для обох функцій, значення їх співпадають. Якщо провести кубічну криву через точки, абсциси яких ll_i, l_i, c_i, r_i при виконанні умови (9) (в точці l_i - зміна випуклості) то, очевидно, що її відхилення від реального значення функції буде мінімальним у порівнянні з кубічною інтерполяцією на інших інтервалах. Адже в цьому випадку мінімальним є відхилення других похідних а, отже, і кривизни вихідної функції та кубічної інтерполяції, що забезпечить мінімум відхилення самих значень функкій при їх співпаданні у вузлах інтерполяції. Таким чином, довільну функцію найкраще інтерполювати кубічним многочленом в області, яку можна ідентифікувати, зокрема, за допомогою умови (10).

Отже, можемо запропонувати наступний алгоритм екстраполяції:

1. Будується таблиця скінченних різниць виду (1).
2. Проводиться інтерполяція функції в середніх точках , таблиця скінченних різниць доповнюється середніми значеннями (6).
3. Знаходяться такі значення i^* , для яких
$$i^* = \arg\min_i \left| \frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i - l_i} - \frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}\right)}{c_i - ll_i} \right|$$
4. Обраховується значення $\tilde{\Delta}^{i^*} f^c_{n-i^*}$.
5. Знаходиться прогнозне значення функції за формулами :

$$\Delta^{j-1} f^c_{n-j+1} = \Delta^{j-1} f^c_{n-j} + \Delta^j f^c_{n-j}\left(\hat{r}^j_{n-j} - \hat{l}^j_{n-j}\right), \qquad (11)$$
$$j = \overline{i^*,1}.$$

3 Чисельні результати

Розглянемо приклади застосувань описаного вище методу. Нехай маємо функцію $f(x) = x^6 \sin(x)$, визначену в точках 1, 1.5, 2, 2.5, 3,…,11. Графік функції наведено на Рис.2, фрагмент таблиці розділених різниць (6) - на Рис.1. У першому рядку таблиці - значення аргументу, далі – значення функції та відповідні скінченні різниці. Оптимальне значення i^*, для якого виконується умова (8) – це значення $i^* = 9$, $i^* - 2 = 7$ - значення індекса відповідної скінченної різниці , якій відповідає 9-тий рядок таблиці. При цьому
$$\frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f^c_{n-i}\right)}{c_i - ll_i} = 610713{,}879, \quad \frac{\left(\Delta^{i-2} f^c_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}\right)}{c_i - l_i} = 611585{,}256.$$

Відповідне значення скінченної різниці $\tilde{\Delta}^{i^*} f^c_{n-i^*} =$ -703068,269. При цьому з використанням процедури (10) отримали прогнозне значення функції в точці 11.5, яке рівне -2017907,745, точне значення -2024974,077. Таким чином, відносна похибка становить 0,00350181.

7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	
77293,81635	166943,8435	259354,3	301149,0278	219016,7	-55242,97922	-544021,1109	-1178876,453	-1771543,65	-2017907,745
150719,7327	182060,5119	134205,2	-40337,6683	-356392	-763037,7708	-1123633,474	-1227522,539	-839031,292	
91730,28601	-16514,5484	-222398	-490597,191	-722700	-767241,4668	-464484,7686	284602,1818		
-131480,362	-314128,466	-474083	-500301,922	-276644	258215,3339	1051843,649			
-317475,309	-342602,281	-186173	197438,3672	758517,3	1328487,924				
-143322,651	131301,8524	540040,6	944690,7125	1131050					
377570,6711	683363,2992	813388,9	591008,909						
610713,879	435818,189	-92354,4							
-64772,1786	-703068,269								
-1140076,81									

Рис.1 Фрагмент таблиці розділених різниць

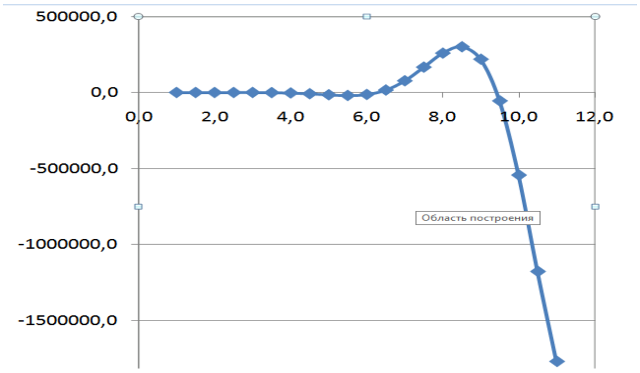

Рис.2 Графік функції $x^6 \sin(x)$

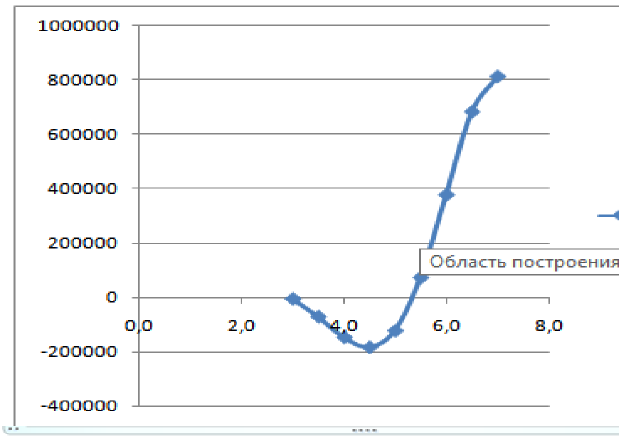

Рис 3 Графік $\widetilde{\Delta}^{i^*} f^c_{n-i^*}$

6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5
-13036,4	16224,1	77293,8	166943,8	259354,3	301149,0	219016,7	-55243,0	-544021,1	-1183977,5
35753,9	90330,2	150719,7	182060,5	134205,2	-40337,7	-356392,0	-763037,8	-1128734,5	
88383,4	114965,8	91730,3	-16514,5	-222398,2	-490597,2	-722700,1	-772342,5		
67799,3	3346,8	-131480,4	-314128,5	-474082,6	-500301,9	-281745,3			
-71206,5	-199279,6	-317475,3	-342602,3	-186173,5	192337,3				
-215972,1	-246268,8	-143322,7	131301,9	534939,6					
-123019,7	72649,4	377570,7	678262,2						
256948,2	500590,4	605612,8							
476262,2	348664,6								
-21040,3									

Рис.4 Фрагмент таблиці розділених різниць

Розглянемо цю ж саму функцію та знайдемо її прогнозне значення в точці 10.5. Фрагмент таблиці розділених різниць наведений на рис.4. Оптимальні значення $i^* = 7$, $\widetilde{\Delta}^{i^*} f^c_{n-i^*} = 5349396$. Прогнозне значення рівне -1183977,5, відповідне точне значення -1178876,5, відносна похибка становить 0,0043. Аналіз відносних похибок показує, що запропонований метод дає суттєво кращі результати екстраполяції у порівнянні з аналогом многочлена Н'ютона найкращого степеня. Зауважимо, що оптимальна заміна скінченної різниці модифікованою відбувається тоді, коли скінченні різниці меншого на 2 порядку ведуть себе наприкінці інтервалу їх визначення аналогічно, як на рис. 6. – чотири останні точки потрапляють в область зміни випуклості функції.

Очевидно, що у випадку нерівномірної сітки отримати виконання умови (10) вдасться далеко не завжди. Але тут принциповим є той факт, що у області зміни випуклості функцію доцільно апроксимувати кубічним многочленом, причому відповідна область знаходиться наприкінці інтервалу визначення функції, заданої скінченними різницями відповідного порядку. В такому випадку крок 3 алгоритму можна змінити, наприклад, так: знаходиться значення i^* таке, для якого точка $(\mathrm{ll_i} + \mathrm{l_i})/2$ мінімально відхиляється від точки зміни випуклості функції, що визначається скінченними різницями порядку $\mathrm{i} - 2$ (відповідну функцію за скінченними різницями можна визначити, наприклад, як кубічний сплайн.). Зауважимо, що область зміни випуклості наприкінці інтервалу визначення відповідних різниць виникає тоді, коли функція, що задана скінченними різницями на одиницю меншого порядку, має на відповідному інтервалі локальний екстремум. Якщо такої ситуації в таблиці скінченних різниць немає, то отримаємо точність екстраполяції , що співпадає з точністю естраполяції на основі многочленів Н'ютона другого виду. Зауважимо також, що крок сітки має бути таким, щоб хоча б чотири точки потрапляли у область, де функція має локальний екстремум або змінює свою випуклість.

Таблиця 3 Порівняння точності екстраполяції для різних методів

Степінь	Метод модифікованих різниць		Обернена інтерполяційна формула Н'ютона	
	Прогнозне значення	Відносна похибка	Прогнозне значення	Відносна похибка
9	-852308,1	0,2770	-827646,1	0,2979
8	-1056370,1	0,1039	-812423,4	0,3108
7	-1289000,1	0,0934	-845657,5	0,2827
6	-1484668,7	0,2593	-866348,2	0,2651
5	-1587615,1	0,3467	-874351,3	0,2583
4	-1562487,8	0,3254	-861504,3	0,2692
3	-1402534,1	0,1897	-823699,5	0,3013
2	-1134334,9	0,0378	-772984,9	0,3443
1	-818280,9	0,3059	-818280,9	0,3059

4. Висновки

Таким чином, в роботі запропоновано новий метод екстраполяції даних, який використовує властивість найкращого кубічного наближення функцій, що задані рядками таблиці скінчених різниць в областях зміни випуклості. Чисельні результати показують суттєві переваги запропонованого методу у порівнянні з відомими підходами до екстраполяції, що грунтуються, зокрема, на використанні многочленів Н'ютона другого виду. Метод є особливо ефективним у випадках, коли вихідна функція, яка задана точковими даними чи функції, що визначаються розділеними різницями довільного порядку, мають області зміни випуклості. Зокрема, для наведеного тестового прикладу метод має відносну похибку, яка в десятки разів менша, зокрема, з похибками методів екстраполяції на основі многочленів Н'ютона. Запропонована методика має загальний характер та може бути використана для екстраполяції часових рядів у довільних галузях досліджень, зокрема, при побудові короткострокових прогнозів рядів економічної динаміки. Ідея методу може бути поширена і на просторовий випадок, коли необхідно екстраполювати відповідні поверхні. В такому випадку необхідно будувати "піраміди" скінченних різниць.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів / І.М.Ляшенко, М.В.Коробова, А.М.Столяр. - Тернопіль, 2006. - 300 с.
2. Chatfield C. Time-series Forecasting/ C.Chatfield – Chapman & Hall – 2001.– 265 p.
3. Бомба А. Я. Методы анализа данных и прогнозирование траекторий уединенных волн / А. Я. Бомба, Ю. В. Турбал // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 5. – С. 34–43.
4. Костинский А.С. О принципах экстраполяции геофизических данных. /А.С.Костинский// Доповіді Національної академії наук України .–2014.– №2.–С.111-117.
5. Levi J. C. A Comparative Study of Extrapolation Methods for Creep Data at Small Strains/ J. C. Levi, I. I. Barody –London : Her Majesty's Stationery Office– 1969.– 29 p.
6. Armstrong J. S. Extrapolation for Time-Series and Cross-Sectional Data. / J. S. Armstrong –2001.– Retrieved from http://repository.upenn.edu /marketing_papers/148 .
7. Hyndman R. J. Minimum sample size requirements for seasonal forecasting models/ R. J. Hyndman, A. V. Kostenko //FORESIGHT– Issue 6, 2007.
8. Fine T. Extrapolation When Very Little is Known about the Source/ Terrence Fine– School of Electrical Engineering, CorneU University, Ithaca, New York– 1969
9. А.В. Шалагинов Кубическая сплайн экстраполяция временных рядов»/ А.В. Шалагинов –УНК "ИПСА" НТУУ "КПИ", Киев, Украина– 2011.
10. Е. А. Волков Замечания к приближению функций многочленами/ Е. А. Волков //Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1967.– том 7, номер 6.–С.1374– 1375

Надійшла у першій редакції 28.04.2017, в останній - 20.05.2017.