

УДК 539.3

Метод дискретных особенностей в задаче определения частот и форм колебаний лопастей гидротурбин

Р. П. Москаленко¹⁾, В. В. Науменко²⁾, Е. А. Стрельникова^{1, 3)}*1) Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина**2) Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Украина**3) Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАНУ, Украина*

На основе методов теории потенциала и граничных интегральных уравнений построены математические модели для исследования свободных колебаний элементов турбомашин при взаимодействии с жидкостью. В данной статье дан анализ колебаний пластин с учетом влияния присоединенных масс жидкости. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее течение – безвихревое. Давление определяется из линеаризованного интеграла Бернулли. Для вычисления потенциала скоростей получена система сингулярных интегральных уравнений. Для ее решения применен метод дискретных особенностей.

Ключевые слова: гидротурбина, свободные колебания, присоединенные массы жидкости, гиперсингулярное уравнение, метод дискретных особенностей.

На основі методів теорії потенціалу та граничних (сингулярних та гіперсингулярних) інтегральних рівнянь побудовано математичні моделі і методи дослідження вільних коливань елементів турбомашин з при взаємодії з рідиною. В цій роботі надано аналіз коливань пластин з урахуванням приєднаних мас рідини. Припускається, що рідина ідеальна, нестислива, а її рух безвихровий. Тиск визначається з лінеаризованого інтегралу Бернуллі. Для обчислення потенціалу швидкостей отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь. Для її числової симуляції застосовано метод дискретних особливостей.

Ключові слова: гідротурбіна, вільні коливання, приєднані маси рідини, гіперсингулярне рівняння, метод дискретних особливостей.

The mathematical models for estimation of free vibrations of turbomachine elements in interaction with a fluid has been developed on the basis of the methods of potential theory as well as boundary singular and hypersingular integral equations. The analysis of plate vibrations with consideration of the effects of added liquid masses has been presented in the paper. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one and its flow is irrotational. The pressure is obtained by linearized Bernoulli integral. To evaluate a velocity potential, the system of singular boundary integral equations has been developed. The discrete singularities method has been used for its numerical solution.

Key words: hydro-turbine, free vibrations, liquid added masses, hypersingular equation, discrete singularities method.

1. Постановка задачи и основные соотношения

В работе исследованы малые колебания пластин, моделирующих лопасти гидротурбин, при взаимодействии с идеальной несжимаемой жидкостью. Изучение частот и форм собственных колебаний лопастей в жидкости является актуальной задачей при проектировании рабочих колес гидротурбин. Такие исследования необходимо проводить для предотвращения резонанса. Предлагаемые для решения этих задач методики [1,2] обычно основываются на упрощающих гипотезах (плоских сечений, совпадения форм колебаний в

вакууме и жидкости и др.). Такие подходы не могут быть приложены без дополнительных обоснований к задаче о погруженной в жидкость оболочке, моделирующей лопасть рабочего колеса, взаимодействующего с водной средой. Методики, основанные на использовании метода конечных элементов, требуют больших затрат машинного времени, что затрудняет их применение на практике. В этой связи возрастает актуальность использования в таких задачах методов граничных элементов и бессеточных методов. Отметим, что лопасть в воде представляет собой разрыв сплошности среды, что позволяет свести задачи о гидроупругих колебаниях пластин и оболочек к гиперсингулярным интегральным уравнениям. Современные возможности вычислительной техники позволяют применить этот сложнейший аппарата математической физики для решения актуальных практических задач.

1.1. Постановка задачи о гидроупругих колебаниях пластин в воде

Малые колебания пластины описываются уравнением

$$D\nabla^2\nabla^2\bar{w} + \rho_1 h \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial t^2} = P, \quad (1)$$

где P – давление жидкости на пластину; D – цилиндрическая жесткость; h – толщина; ρ_1 – плотность материала пластины, \bar{w} нормальное перемещение пластины.

Скорость набегающего потока принимается равной нулю. Движение жидкости изучается в трехмерной постановке методами теории потенциала. Предполагается, что жидкость идеальная; свободные вихри не образуются и не сходят с несущей поверхности. В таком случае существует потенциал скоростей, удовлетворяющий всюду вне пластины гармоническому уравнению, а на лицевых поверхностях пластины S_{\pm} – условию непротекания.

При потенциальном течении возмущенная скорость жидкости представляется в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \text{grad}\Phi(x, y, z, t), \quad (2)$$

где $\Phi(x, y, z, t)$ – потенциал скоростей, индуцированных малыми свободными колебаниями пластины.

Для определения давления жидкости на смоченные поверхности служит интеграл Коши-Лагранжа, который в случае покоящейся жидкости может быть записан в следующем виде:

$$P = -\rho_2 \left[\frac{\partial\Phi^+(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^-(x, y, z, t)}{\partial t} \right], \quad (3)$$

где ρ_2 – плотность жидкости.

Для нахождения давления на пластину со стороны жидкости необходимо определить функцию $\Phi(x, y, z, t)$, решая уравнение Лапласа при следующем граничном условии

$$(\text{grad}\Phi \cdot \mathbf{n})_s = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}, \quad (4)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к пластине, а правая часть уравнения представляет собой скорость нормального перемещения деформируемой пластинки.

Таким образом, требуется определить функции $\bar{w}(x, y, t)$, $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (1) – (3), условиям непротекания (4), закрепления пластины и затухания возмущенной скорости жидкости на бесконечности.

Рассмотрим задачу о малых гармонических колебаниях упругой лопасти в потоке. Представим искомые функции в виде $\bar{w}(x, y, t) = e^{i\Omega t} w(x, y)$, $\Phi(x, y, z, t) = e^{i\Omega t} \varphi(x, y, z)$, где Ω – частота, а w – собственная форма колебаний пластины в жидкости. Пусть S – поверхность, ограничивающая погруженную в жидкость пластину. Представим функцию $\varphi(x, y, z)$ в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\Gamma(\xi)$, $\xi \in S$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi. \quad (5)$$

Известно, что $\varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$, т.е. перепад давления пропорционален плотности потенциала Γ .

Вычисляя нормальную производную потенциала двойного слоя (5) и подставляя полученное выражение в граничные условия (4), приходим к гиперсингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi = i\Omega w. \quad (6)$$

Как и в [3], представим неизвестное перемещение в виде $w = \sum_{k=1}^N c_k w_k$, где w_k представляют собой формы колебаний пластины в вакууме. Пусть функции $\Gamma_k(\xi)$ являются решениями гиперсингулярного уравнения (6) с правыми частями w_k . Полагая $\Gamma_k(\mathbf{x}) = H(w_k)$, где H – обратный оператор к интегральному оператору в (6), приходим к проблеме собственных значений

$$c_j \Omega_j^2 = \Omega^2 \sum_{k=1}^N c_k \left[\delta_{kj} + (H(w_k) \cdot w_j) \right]. \quad (7)$$

Определив решение (7), вычисляем частоты Ω колебаний в жидкости, а, зная коэффициенты c_k , находим формы колебаний пластины в жидкости. Построенную в (7) матрицу $P_{kj} = (H(w_k) \cdot w_j)$ называют матрицей присоединенных масс жидкости. Для определения матрицы присоединенных масс используем метод дискретных особенностей [3].

2. Численное определение элементов матрицы присоединенных масс жидкости

Для решения гиперсингулярного уравнения (6) применен метод дискретных особенностей (МДО) [3]. Область интегрирования разбивалась на конечное число четырехугольных подобластей NS, в каждой из которых неизвестная плотность заменялась постоянной величиной.

Пусть область интегрирования S представляет собой плоский прямоугольник $S = \{-b, b\} \times [-1, 1]$.

Предположим, что функция $\Theta(\xi)$ имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера всюду внутри S. Пусть $x \notin S$, $x \neq l$. Тогда нормальную производную потенциала двойного слоя можно представить в виде

$$I(\mathbf{x}) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \iint_S \Theta(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{N}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dS_\xi = \int_{-b-l}^b \int_{-l}^l \Theta(\xi) \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x_3^2}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2, \text{ где}$$

$$r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + x_3^2}.$$

Интеграл в правой части (3.47) существует в обычном смысле при $x \notin S$ ($x_3 \neq 0$).

Пусть $\Theta(\xi) = \Theta_0$, $\Theta_0 = \text{const}$ на S, $x \notin S$. Тогда из (3.47) получим

$$I(\mathbf{x}) = \Theta_0 \int_{-b-l}^b \int_{-l}^l \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x_3^2}{r^5} \right] d\xi_1 d\xi_2.$$

Вычисляя этот интеграл аналитически и переходя к пределу при $x_3 \rightarrow 0$, приходим к следующей формуле:

$$I(\mathbf{x}) = \Theta_0 L(\mathbf{x}), \text{ где } L(\mathbf{x}) = \left[-\frac{\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_1 - l)^2}}{(x_1 - b)(x_2 - l)} + \frac{\sqrt{(x_1 - b)^2 + (x_1 + l)^2}}{(x_1 - b)(x_2 + l)} + \frac{\sqrt{(x_1 + b)^2 + (x_1 - l)^2}}{(x_1 + b)(x_2 - l)} - \frac{\sqrt{(x_1 + b)^2 + (x_1 + l)^2}}{(x_1 + b)(x_2 + l)} \right].$$

При вычислении конечной части по Адамару для интегралов в (6) по четырехугольнику, произвольно ориентированному в пространстве, использованы формулы:

$$J_i(\mathbf{x}) = \frac{([\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i] \cdot \mathbf{n})}{|[\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i]|^2} \left[\frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{r_i} \right];$$

$$r_k = |\mathbf{r}_k|; \mathbf{r}_k = (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0);$$

$$\mathbf{l}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i);$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3).$$

Применена модификация метода дискретных особенностей, касающаяся выбора контрольной точки. В [4] показано, что точность метода граничных элементов и его сходимость зависят от выбора контрольных точек.

Анализируя величины, вычисляемые по формуле (8) устанавливаем, что на границах элементов отклик обращается в минус бесконечность, однако внутри каждого элемента имеется точка, в которой отклик имеет конечный максимум.

На рис. 1 показаны линии уровня функций-откликов, определенных формулой (8), для треугольного и четырехугольного элементов.

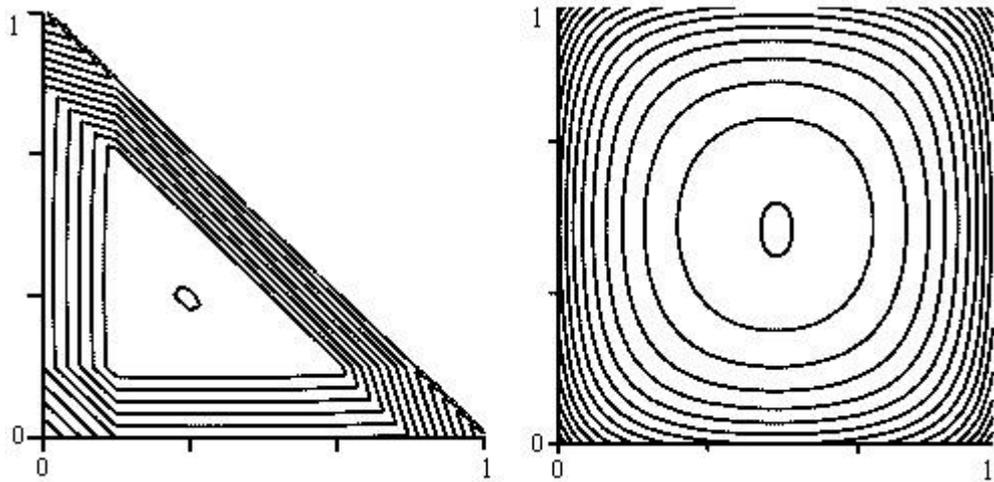


Рис. 1. Линии уровня функций-откликов от постоянной плотности

Проведенный численный анализ позволяет сделать вывод о том, что отклики для постоянной плотности имеют конечный максимум в центрах тяжести граничных элементов.

Элементы матрицы присоединенных масс находились по формуле

$$P_{ik} = \iint_S \Gamma_i(x) w_k(x) dS, \quad D^z = \|d_{ij}^z\|, \quad \text{где } \Gamma_i(x) \text{ — амплитудные значения}$$

давления, индуцированного собственной формой $w_k(x)$.

3. Численный анализ частот и форм свободных гидроупругих колебаний консольных пластин

В качестве тестовой задачи рассматривались колебания квадратной пластины со стороной a и толщиной h (геометрические параметры и механические свойства взяты из работы [4]). Изучались колебания в воздухе и с учетом присоединенных масс жидкости.

В таблице 1 приведены значения частот колебаний этой пластин в воздухе и в воде и проведено сравнение с теоретическими и экспериментальными данными из работы [4].

Рассматривался безразмерный частотный параметр, вычисляемый по формуле

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D}}.$$

Таблица 1. Безразмерный частотный параметр для квадратной пластинки

n	В воздухе			В воде		
	Эксперимент [4]	Теория [4]	МК [3]	Эксперимент [4]	Теория [4]	МДО
1	3.43	3.49	3.49	1.475	1.59	1.434
2	8.32	8.55	8.547	4.5	4.7	4.24
3	20.55	21.36	21.33	10.05	10.7	10.00
4	27.15	-	27.81	-	-	13.70
5	30.75	31.10	31.34	17.0	18.74	16.43

Результаты показывают, что метод дискретных особенностей может быть успешно применен для решения задач о гидроупругих колебаниях лопастей в воде.

На рис. 2 показаны две первые формы колебаний консольной прямоугольной пластинки в воде. Отметим, что в данной задаче формы колебаний в жидкости и воздухе практически совпадают.

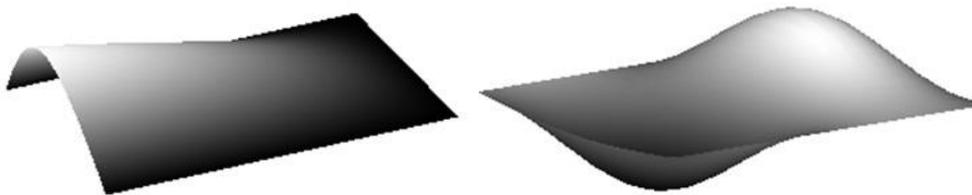


Рис. 2. Формы колебаний прямоугольной пластины в жидкости

Результаты, приведенные в табл.2, характеризуют изменение частот колебаний в зависимости от угла φ раствора секториальной пластины (см. рис.2). Здесь же приведены значения коэффициента снижения частоты k .

Таблиця 2. Частоти свободних колибаний секторіальної консольної пластинки.

номер частоты	$\varphi = 30^\circ$			$\varphi = 60^\circ$			$\varphi = 90^\circ$		
	в воздухе	в воде	$k, \%$	в воздухе	в воде	$k, \%$	в воздухе	в воде	$k, \%$
1	370,0	236,2	36,2	384,3	224,2	41,7	389,5	190,4	48,7
2	699,1	71,90	18,2	460,6	339,0	26,4	413,8	280,6	31,5
3	1620,4	1386,1	14,4	742,30	614,6	17,2	530,20	407,0	23,2
4	1858,3	1666,0	11,2	1230,3	1858,3	14,4	747,30	628,2	16,0
5	2218,2	2026,0	9,7	1693,2	2218,2	10,2	1058,3	950,3	10,2

Рассмотрена также секторіальная (рис.3) пластина ($R_1 = 0.115$ м, $R_2 = 0.230$ м, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$), толщина изменяется вдоль радиуса по линейному закону, $\nu = 0.3$, $h(R_1) = 0.006$ м, $h(R_2) = 0.002$ м); $E = 2.1 \times 10^6$ н/м², $\rho_1 = 7900$ кг/м³.

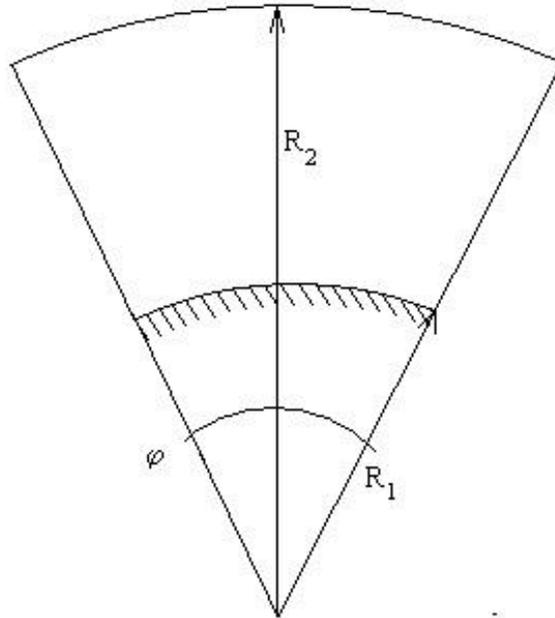


Рис.3. Секторіальная консольная пластина

На рис. 4 показаны две первые формы колебаний консольной секторіальной пластинки в воде. Отметим, что и в данной задаче формы колебаний в жидкости и воздухе практически совпадают.

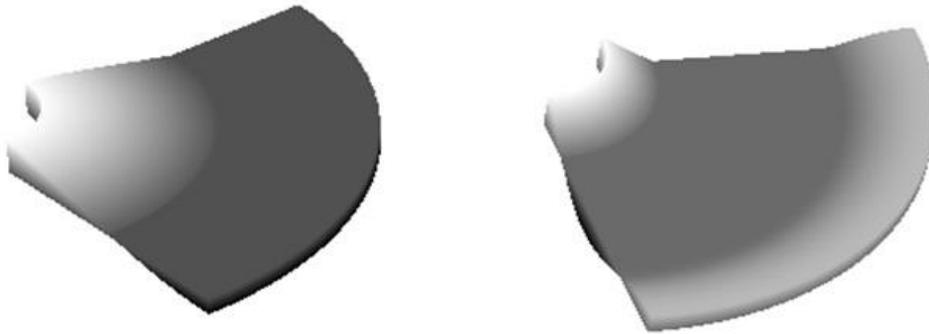


Рис. 4. Формы колебаний секториальной пластины в жидкости

Приведенные расчеты являются тестовыми и служат обоснованием для дальнейшего изучения колебаний в воде реальных лопастей.

4. Выводы

Исследованы малые колебания пластин, моделирующих лопасти гидротурбин в воде. Применен метод заданных форм для определения форм упругих колебаний в жидкости через формы колебаний в вакууме.

Анализ численных результатов показывает, что частоты колебаний в воде и вакууме отличаются существенно; причем разница в частотах уменьшается с ростом номера частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмаков В.Н. К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью.—Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978 г.—С.157-162.
2. Gehrler A, Schmidl R, Sadnik D. Kaplan turbine runner optimization by numerical flow simulation (CFD) and an evolutionary algorithm. Proceedings of 23rd IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Japan, 2006.
3. Ганчин Е.В., Ржевская И.Е., Стрельникова Е.А. Прочность, динамика и ресурс лопастей рабочего колеса поворотной-лопастной гидротурбины Двигатели и энергоустановки аэрокосмических летательных аппаратов, т 66 №9, С. 91-94, 2009.
4. Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе. Доп. НАН України №3, с. 27-31. 2001.
5. Muthuveerappan, G.; Ganesan, N.; Veluswami, M.A.. Vibration of square cantilever plate immersed in water. Journal of Sound and Vibration, Volume 61, Issue 3, p. 467-470, 1978