

УДК 519.6, 51-76

Память и эволюция сообществ

В. М. Куклин¹, А. В. Приймак¹, В. В. Яновский^{1,2}¹Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина²Институт монокристаллов, Национальная
Академия Наук Украины, пр. Науки, 60, 61001 Харьков, Украина

Рассмотрена эволюция популяции с полным набором стратегий поведения, ограниченных только глубиной памяти. Каждое последующее поколение популяции последовательно утрачивает наиболее невыгодные стратегии поведения предыдущего поколения. Показано, что увеличение памяти в популяции эволюционно выгодно. Победители эволюционного отбора неизменно относятся к агентам с максимальной памятью. Вводится понятие сложности стратегии. Показано, что стратегии, побеждающие в естественном отборе, имеют максимальную или близкую к максимуму сложность. Агрессивность общества в процессе эволюции уменьшается.

Ключевые слова: эволюция, популяция, стратегия, сложность, кооперация.

Розглянуто еволюцію популяції з повним набором стратегій поведінки, обмежених тільки глибиною пам'яті. Кожне наступне покоління популяції послідовно втрачає найбільш невідгідні стратегії поведінки попереднього покоління. Показано, що збільшення пам'яті в популяції еволюційно вигідно. Переможці еволюційного відбору незмінно відносяться до агентів з максимальною пам'яттю. Вводиться поняття складності стратегії. Показано, що стратегії, які перемагають в природному відборі, мають максимальну або близьку до максимуму складність. Агресивність суспільства в процесі еволюції зменшується.

Ключові слова: еволюція, популяція, стратегія, складність, кооперація.

The population evolution with a complete set of behavioral strategies limited only by the depth of memory has been considered. Each successive generation of the population subsequently loses the most unfavorable behavior strategies of the previous generation. An increase in population memory has been shown to be evolutionarily beneficial. The evolutionary selection winners invariably belong to the agents with maximum memory. The concept of strategy complexity has been introduced. The strategies that win in natural selection have been shown to have a maximum or close to maximum complexity. The society aggressiveness in the process of evolution is decreasing.

Key words: evolution, population, strategy, complexity, cooperation.

1. Введение

Понимание природы возникновения кооперативного поведения в разных системах интересует исследователей уже на протяжении нескольких десятилетий. Эволюционная теория игр [1-3] обеспечивает гибкие основания и эффективные методы для изучения появления сотрудничества. Среди многих игровых моделей, которые используются для объяснения кооперативного поведения, особое место занимают игры, которые можно рассматривать как обобщение дилеммы заключенного [4-6]. Выбор матрицы выплат в этом случае определяется простым физическим соображением - кооперация всегда требует дополнительных затрат ресурсов по сравнению с отказом от кооперации.

Склонность к экономии ресурсов или усилий накладывает ограничение на свойства матрицы выплат. Так, при каждом отдельном взаимодействии индивидуальный выигрыш при отказе от кооперации превышает выигрыш при согласии на кооперацию. На каждом этапе процесса эволюции популяция отказывается от применения худших стратегий предыдущего поколения.

Эти игры служат в качестве парадигмы, которая привела к открытию механизма кооперативного поведения как в теории, так и экспериментальных наблюдениях [7]. Начиная с работы Новак и Мей [8], эволюционные игры были широко изучены в структурированных популяциях, в том числе на регулярных решетках [9-17] и сложных сетях [18-20]. В настоящее время обнаружен ряд общих, но конкретных механизмов, приводящих к кооперации в самых разнообразных системах (см. например [21]). Среди таких механизмов следует отметить: добровольное участие [22], наказания [23], сходство [24], неоднородная деятельность [25], социальное разнообразие [26, 27], динамические связи [28], асимметричное взаимодействие и граф перестановок [29], миграция [30-32], групповой фаворитизм [33], взаимозависимые связи [34]. Используя такой подход, можно выяснить появление множества разнообразных свойств у эволюционирующих популяций. Под эволюционными популяциями, следуя Дарвину, будем понимать множество объектов, которые подчиняются следующим принципам. Это 1) принцип наследственности, 2) принцип изменчивости и 3) естественного отбора.

В этой работе мы исследуем влияние памяти на процесс эволюции в простой постановке задачи Коши. Если действие объекта зависит не только от наблюдаемой ситуации, а и от предшествующих событий, то будем считать, что объект обладает памятью. В этом смысле большинство биологических объектов обладают памятью. Основной вопрос, который мы будем обсуждать в работе, это насколько выгодно для популяции увеличивать память в процессе эволюции и к каким следствиям это приводит. Важность этой характеристики определяется тем, что глубина памяти объектов популяции и определяет число всех возможных стратегий, доступных популяции. Центральным и важным элементом работы является конкуренция в исходной популяции всех возможных стратегий с ограниченной сверху памятью. Это гарантирует, что не упущена ни одна стратегия, которая может изменить ход эволюции.

Важное следствие наличия памяти это появление стратегий разной сложности. Конкуренция стратегий разной сложности ведет к изменению доминирующих стратегий популяции в процессе эволюции. Поэтому влияние сложности стратегий на эволюцию детально обсуждается в работе. Основной вопрос сводится: является ли сложность стратегий эволюционно выгодной? На интуитивном уровне ответы на эти вопросы кажутся очевидными. При моделировании взаимодействия стратегий использовалось одночастичное приближение, при котором все агенты популяции, исповедующие одну из возможных стратегий, объединялись в единый кластер. Взаимодействие осуществлялось между кластерами или стратегиями. Другими словами, взаимодействуют именно стратегии. При этом каждая стратегия взаимодействует с каждой, включая себя. Рассмотрено 3 типа популяций: популяции без памяти, популяции с глубиной памяти 1 и 2. В работе

рассмотрена задача типа Коши об эволюции сообщества с полным набором стратегий.

В каждом случае в начальной популяции присутствуют все стратегии с памятью, не превышающую указанную. Так, например, при глубине памяти 2 присутствуют все стратегии с памятью 2, 1 и 0. В результате численного моделирования показано, что увеличение памяти в популяции эволюционно выгодно. Победители эволюционного отбора неизменно относятся к агентам с максимальной памятью. Стратегии, побеждающие в естественном отборе, имеют максимальную или близкую к максимуму сложность. Попутно обнаружено, что в таких популяциях победившие стратегии относились к «добропорядочным» стратегиям, склонным к кооперации. В определенном смысле можно сказать, что кооперативное поведение в таких случаях устанавливается автоматически. Можно ожидать, что в этом и состоит универсальная тенденция эволюции. В популяциях с ограниченной сверху памятью конкуренция всех возможных стратегий в начальной популяции приводит к доминированию в ходе эволюции добропорядочных стратегий. Дальнейшее увеличение глубины памяти приводит к новой проблеме, когда число агентов популяции окажется меньше числа возможных стратегий. Следствие этого также обсуждается в заключении этой работы.

2. Взаимодействие объектов популяции

Жизнь в популяции и ее эволюция определяется характером взаимодействия объектов популяции. Наиболее простой случай это их парное взаимодействие. Например, когда каждый объект взаимодействует с каждым, включая себя. Этот вариант взаимодействия можно осуществить при относительно небольшом числе объектов. Причина этого в конечности времени жизни объекта популяции.

Действительно, на взаимодействие пары индивидов затрачивается некоторое характерное время Δt и, соответственно, на взаимодействие n индивидов друг с другом будет затрачено время $n^2 \Delta t$. При увеличении n время $n^2 \Delta t$ может превысить время жизни объекта.

Существуют другие варианты осуществления парного взаимодействия. Например, когда противник выбирается случайным образом среди всего множества стратегий, предполагая их равновероятными. Еще один общий способ, не использующий случайность, можно осуществить, используя сеть взаимодействий. В графе этой сети будут соединены взаимодействующие стратегии. Ее можно обобщить, учитывая взаимодействия удаленных вершин с некоторым весом включая вероятностный. Можно также учитывать пространственное структурирование популяций [7, 9, 13, 19, 24, 35], в этом случае в пространстве могут возникать геометрические структуры сотрудничества [8, 36]. Еще одно важное обстоятельство, которое влияет на характер взаимодействия стратегий, уже отмечалось ранее. Это конечность множества объектов, составляющих популяцию. В этом случае количество стратегий может значительно превышать количество объектов общества. Тогда взаимодействие может происходить только между частью индивидов.

В этой работе будем предполагать, что объект в процессе жизни не меняет стратегию и взаимодействует с каждой стратегией популяции включая себя.

Другими словами, можно сказать, что рассматривается одночастичное приближение взаимодействия стратегий - без учета числа носителей стратегии.

Для того, чтобы установить результат парного взаимодействия стратегий, определим матрицу выплат. Напомним, что дилемма заключенного двух игроков состоит в том, что каждый игрок может выбрать между сотрудничеством (1) или отказом (0). В зависимости от стратегии соперника, выбранный игрок получает a_{11} , если оба сотрудничают; a_{22} - если оба отказываются; a_{12} - если выбранный сотрудничает и противник отказывается; и a_{21} - если выбранный отказывается, а противник сотрудничает. Матричные элементы, соответствующие дилемме заключенных, ограничены неравенствами $a_{21} > a_{11} > a_{22} > a_{12}$ и $2a_{11} > a_{21} + a_{12}$. В работе мы используем значения матрицы выплат Аксельрода M_1 [37]:

	Кооперация	Отказ
Кооперация	3,3	0,5
Отказ	5,0	1,1

Таким образом, результат взаимодействия стратегий будет определяться этой матрицей. Собственно эта матрица определяет число очков эволюционных преимуществ, получаемых стратегией при взаимодействии с другой стратегией. Разумеется, взаимодействие двух объектов популяции на протяжении жизни или поколения осуществляется многократно и число взаимодействий можно рассматривать как параметр в такой игре. Эта игра соответствует итерированной дилемме заключенных [37]. Повторение ходов многократно уже позволяет использовать наказание за ход или премирование. Очевидно, что в этом случае исключительно важна память.

В этой работе, используя взаимодействие между всеми стратегиями с конечной глубиной памяти, установим прежде всего, получают ли стратегии с большей памятью эволюционное преимущество. Кроме этого интересно изучить, как влияет сложность стратегий на эволюционные преимущества стратегий. Другими словами, есть ли причина усложнения общества.

3. Эволюция стратегий

Стратегия это правило, по которому определяется ход по известным значениям ходов противника. Для их классификации используем глубину памяти. Под глубиной памяти будем понимать число предыдущих ходов, которые использует стратегия для выполнения хода.

Стратегии, которые не используют память, осуществляют ход, основываясь только на наблюдаемом ходе противника. В этом случае возможный наблюдаемый ход это 0 или 1 (0 - отказ, 1 - кооперация). Соответственно, для описания отдельной стратегии нам нужно описать определенное правило ответа на эти хода. Для того, чтобы описать все такие стратегии нужно создать все правила реакции на значения ходов противника. Если договориться о порядке записи возможных значений ходов противника, например, в

лексикографическом порядке, то для описания правил действия стратегии достаточно знать последовательность нулей и единиц. Ясно, что имена всех стратегий при отсутствии памяти это числа от 00 до 11, откуда очевидно, что таких стратегий 4 – 00, 01, 10, 11.

Стратегии с глубиной памяти 1 определяются числами от 0000 до 1111. Однако среди определенных таким образом стратегий встречаются стратегии с меньшей глубиной памяти, чем 1. Действительно, если стратегия действует одинаково при различных предыдущих ходах противника, то она фактически не использует информацию о предыдущем ходе или теряет память о предыдущем ходе. Соответственно, такие стратегии совпадают со стратегиями с нулевой глубиной памяти и не считаются стратегиями первой глубины памяти – 0000, 0101, 1010, 1111. Таким образом, между 0000 и 1111 имеется 16 чисел, и если вычтеть 4 стратегии с памятью 0, получим 12 стратегий с памятью 1.

Аналогично перечисляются все стратегии с памятью о двух ходах противника, или в общем случае с памятью о k ходах противника.

Рассмотрим понятие сложности стратегии. Сложность – это исключительно глубокое понятие, которое находит важные применения в физике и математике. В частности, понятие хаотичности тесно связано с понятием сложности (см. например [38]). Наиболее естественным выбором этой характеристики можно считать сложность по Колмогорову [39]. Существуют и другие определения сложности, которые основаны на других представлениях о сложности [40].

Используем подход к описанию сложности конечных 0,1-последовательностей, который основан на сравнительной сложности функций, в частности многочленов. В основе лежит понимание, что многочлены более высокой степени сложнее, чем более низкой степени.

Для более последовательной формулировки сложности используем, следуя [41], теорию монад. Под монадой будем понимать конечное множество Ω и отображение A этого конечного множества в себя. Другими словами, каждой точке этого конечного множества сопоставляется другая его точка. Монадам сопоставляется граф, вершины которого – конечное множество Ω , а ориентированные ребра связывают вершины в соответствии с их отображением A . Из каждой вершины x в этом графе выходит ровно одно ребро, и оно ведет в вершину Ax . В нашем случае точками являются стратегии или 0,1-последовательности конечной длины.

0,1-последовательности $x = x_1x_2\dots x_n$ можно рассматривать и как функцию, которая сопоставляет целочисленному значению i значение $x_i \in \{0,1\}$. Введение сложности функций восходит к идеям Ньютона. Для этого он предложил использовать разности функций. В нашем случае определим такое отображение $y = Ax$ разностным оператором $A: \Omega \rightarrow \Omega$, где элементы последовательности $y = y_1y_2\dots y_n$ определяются разностями $y_i = x_{i+1} - x_i$.

Таким образом, приходим к монаде стратегий. Стратегия x отображается в стратегию y . Используя отображения стратегий строится дерево стратегий, уровни которого и определяют сложность стратегий, находящихся на этих уровнях.

Более подробно правила составления стратегий и расчет их сложности описан в [42].

Смоделируем процесс эволюции стратегий с памятью. Начнем с простой задачи Коши. Принцип изменчивости учтем в простом варианте, предполагая, что в популяции реализованы все стратегии с глубиной памяти меньше или равной k . Так как в этом случае учтены все стратегии, то в процессе эволюции не будут появляться другие стратегии. Принцип наследственности будет состоять в передаче выигрышных стратегий потомкам. Принцип естественного отбора реализуем исключением или уничтожением проигрышных стратегий. Естественно, такой упрощенный вариант эволюции можно усложнить многими способами. Некоторые из них обсудим позже.

Естественный отбор реализуем следующим образом. Пусть все стратегии взаимодействуют друг с другом по круговой системе в соответствии с итерированной игрой по дилемме заключенного. Число взаимодействий двух стратегий в одном поколении выберем одинаковым для всех равным n . Собственно выбор большого числа взаимодействий между двумя стратегиями призван исключить влияние первого хода. Далее будем использовать $n = 100$. Это оптимальное значение уже достаточное для нечувствительности результатов эволюции к первому ходу, как показано в [42]. В результате такого соревнования стратегии набирают очки, в соответствии с приведенной выше матрицей выплат. После этого проигравшая стратегия, а возможно и несколько стратегий, набравших минимальное число очков, выбывают из следующего поколения. Далее очки эволюционных преимуществ обнуляются и проводится следующий круг взаимодействий между оставшимися стратегиями, соответствующий формированию стратегий нового поколения.

Остановимся теперь на способе описания поведения стратегий в процессе эволюции. С появлением памяти и увеличением ее глубины число стратегий возрастает сверх экспоненциальным образом и делает невозможным и бессмысленным слежение за поведением каждой стратегии. Мы нуждаемся в огрубленном описании сообществ. Поэтому нужно ввести коллективные переменные, которые делают возможным описание огромного числа стратегий. Учитывая, что основными характеристиками стратегий, которые рассматриваются в работе, являются память и сложность, удобно ввести соответствующие коллективные переменные. Так, введем $a_j(t)$ - число стратегий именно с памятью j на t этапе эволюции ($j = 0, \dots, k$, где k - глубина памяти стратегий общества). Эти переменные позволяют понять изменение численности стратегий с определенной памятью в процессе эволюции. Еще один набор коллективных переменных $n_i(t)$ - численность стратегий сложности i на t этапе эволюции ($i = 0, \dots, i_{max}(k)$). Эти переменные удобны для слежения за усложнением стратегий общества. Далее при сокращенном описании эволюции общества будем пользоваться этими переменными.

4. Мир без памяти

Начнем с обсуждения эволюции самого простого мира с глубиной памяти 0 или мира без памяти. Пусть каждая стратегия взаимодействует с другой стратегией $n = 100$ раз в рамках итерированной дилеммы заключенных. Набор очков определяется матрицей выплат, приведенной выше, и суммируется. Каждая стратегия в одной игре отвечает на первый ход выбранного противника, а в другой начинает, делая первый ход в игре с тем же противником. В тех играх, которые она начинает, есть две возможности сделать первый ход это выбрать 0 или 1. Стратегия, делающая определенный первый ход, рассматривается как отдельная стратегия. После проведения игр между всеми такими стратегиями, включая себя, стратегии распределяются по занятым местам в соответствии с набранными очками. Первое место занимает стратегия, набравшая самую большую сумму очков. Стратегия или стратегии, набравшие минимальное число очков, исключаются и не передаются следующему поколению. Оставшиеся стратегии передаются следующему поколению и снова вступают в соревнование с начальными нулевыми очками эволюционных преимуществ. Эти стратегии можно рассматривать как потомки предыдущего поколения.

В этом простом мире число стратегий достаточно малое (4 стратегии с учетом первых ходов составляют $N_0 = 8$ стратегий). Поэтому возможно проследить за всеми стратегиями. Однако и в нем будем использовать коллективные переменные, обсуждаемые выше. В этом мире все стратегии имеют 0 глубину памяти и поэтому переменные $a_0(t)$ просто отслеживают численность стратегий $a_0(t) = N_0(t)$. Ясно, что при удалении одной проигравшей стратегии на каждом этапе эволюции их число линейно падает со временем $N_0 = (1-t) + 8$. Здесь $t = 1, 2, \dots, 8$ - дискретное время эволюции. Все время эволюции занимает 8 этапов (или поколений), после которых выживает одна стратегия и наступает стационарное состояние.

Перейдем теперь к обсуждению изменения сложности стратегий общества. Это основная характеристика, по которой можно классифицировать стратегии в этом мире. Самую детальную информацию о поведении сложности несет количество стратегий соответствующей сложности на каждом этапе эволюции. В мире с нулевой памятью присутствуют стратегии сложности 0, 1 и 2. Графики изменения со временем числа стратегий определенной сложности приведены на рис.1, где $n_0(t)$ - число стратегий сложности 0 на t -ом этапе эволюции, $n_1(t)$ и $n_2(t)$ - число стратегий сложности 1 и 2 соответственно на t -ом этапе эволюции.

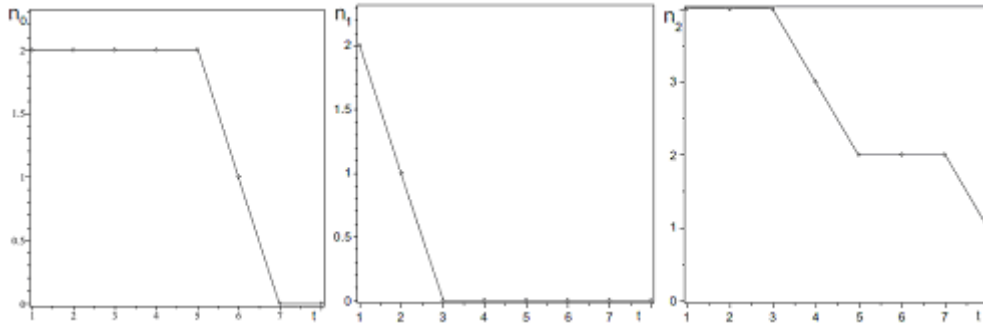


Рис.1. Слева - изменение n_0 - числа стратегий нулевой сложности. Посередине - эволюция n_1 - числа стратегий единичной сложности, справа - n_2 - сложности 2. Отметим, что точки соединены линиями только для наглядности и линии не играют никакого значения. Время дискретно

Из этих зависимостей видно, что стратегии сложности 1 исчезают уже на 3 этапе эволюции. Стратегии нулевой сложности исчезают только на 7 этапе эволюции. Собственно на этом эволюция заканчивается и остается победившая сложная стратегия со сложностью 2. В нашем случае это стратегия «око за око» [1]01. Сложность выигравшей стратегии максимальна в этом классе стратегий.

Из приведенных зависимостей рис.1 легко установить время исчезновения стратегий определенной сложности. Также можно получить среднее значение сложности всего «общества» на каждом этапе эволюции. Среднее значение сложности определяется как

$$\bar{C}(t) = \frac{0 \cdot n_0(t) + 1 \cdot n_1(t) + 2 \cdot n_2(t)}{n_0(t) + n_1(t) + n_2(t)} \equiv \frac{1 \cdot n_1(t) + 2 \cdot n_2(t)}{n_0(t) + n_1(t) + n_2(t)}.$$

Зависимость средней сложности стратегий «общества» от времени эволюции показана на рис.2.

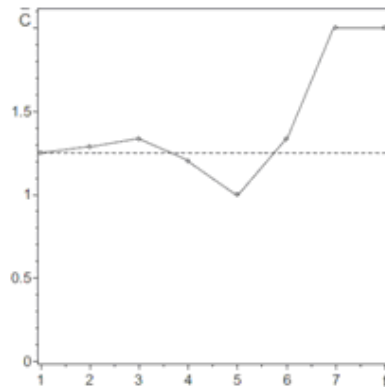


Рис.2. Изменение среднего значения сложности всего «общества» в процессе эволюции. Пунктирная линия - начальное среднее значение сложности «общества»

Средняя сложность такого общества демонстрирует достаточно нетривиальное поведение. В начале эволюции сложность стратегий немного нарастает, но затем уменьшается. После достижения некоторого минимального значения средняя сложность начинает нарастать до максимального значения. Минимум сложности общества наступает на этапе 5. Разумеется, такое поведение средней сложности следует из поведения числа стратегий разной сложности (см. рис.1).

Обсудим теперь, какие стратегии побеждают на разных этапах эволюции общества или какие стратегии доминируют в обществе. Будем следить за сложностью победивших стратегий на разных этапах эволюции. На рис.3 приведена соответствующая зависимость. Видно, что на ранних этапах эволюции (до 5 этапа включительно) побеждали только примитивные стратегии с нулевой сложностью. Заметим, это коррелирует с минимумом средней сложности общества.

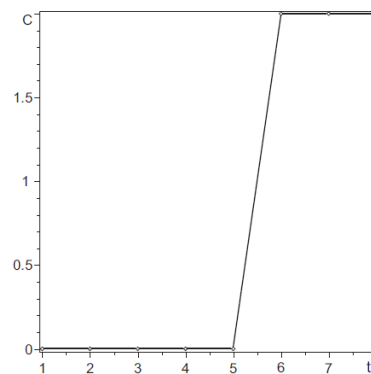


Рис.3. Сложность победившей стратегии на соответствующем этапе эволюции

Таким образом, начальный этап эволюции «общества» можно охарактеризовать как примитивный мир (до 5 этапа включительно). Стадия примитивного общества в мире без памяти длится 62.5% времени выхода в стационар. На этих этапах в «обществе» доминируют примитивные стратегии нулевой сложности (см. рис.3). Заключительные этапы соответствуют развитому «обществу», где доминируют сложные (даже самые сложные) стратегии.

Однако, следует обратить внимание, что примитивные стратегии присутствуют в обществе даже после наступления стадии развитого «общества». Последняя примитивная стратегия исчезает только на 6 этапе эволюции (это стратегия (1)00) (см. рис.1).

Рассмотрим теперь еще одну важную характеристику стратегий. Ее можно условно назвать агрессивностью стратегии. Под агрессивностью будем понимать долю отказов стратегии от кооперации. Моделирование эволюции стратегий дает изменение средней агрессивности общества, приведенное на рис.4.

Из этой зависимости можно установить, что примитивный этап развития общества характеризуется еще и ростом средней агрессивности. На этапе окончания периода примитивного общества его агрессивность максимальна.

Затем после перехода к развитому обществу наблюдается монотонное уменьшение средней агрессивности общества и при выходе в стационарное состояние средняя агрессивность нулевая.

Интересно отметить, что наиболее агрессивная стратегия также вымирает на 5 этапе эволюции, самая «порядочная» на первом этапе. Таким образом можно определить примитивную эру общества по росту агрессивности и примитивная стадия заканчивается после достижения максимальной агрессивности стратегий общества. В мире без памяти это дает эквивалентное определение примитивной эры общества. Третья возможность разумного определения примитивной стадии связана с периодом наличия в обществе самой агрессивной стратегии. Ее исчезновение знаменует переход к развитому обществу.

Наконец перейдем к обсуждению набора стратегиями очков эволюционных преимуществ на разных этапах эволюции. Эта характеристика дает возможность сравнивать набор очков стратегиями на разных этапах эволюции. В качестве такой характеристики можно использовать число очков, набранных на одном ходе стратегии в среднем на определенном этапе эволюции. Зависимость от времени такой величины показана на рис.4. Легко заметить, что с ростом агрессивности среднее число очков, которое набирает стратегия уменьшается. Чем выше агрессивность, тем меньше количество набранных очков. На стадии развитого общества получаемое число очков начинает монотонно нарастать, достигая максимума на стационарной стадии. Сравнивая зависимости на рис.4 легко заметить корреляцию между поведением этих характеристик при эволюции.

В мире с нулевой памятью видна корреляция в поведении средней агрессивности и среднего заработка на ход. Можно предположить, что связь между этими характеристиками определяется соотношением

$$\bar{A}(t) = \sqrt{\lambda \cdot (\bar{P}_{max} - \bar{P}(t))} - a. \quad (1)$$

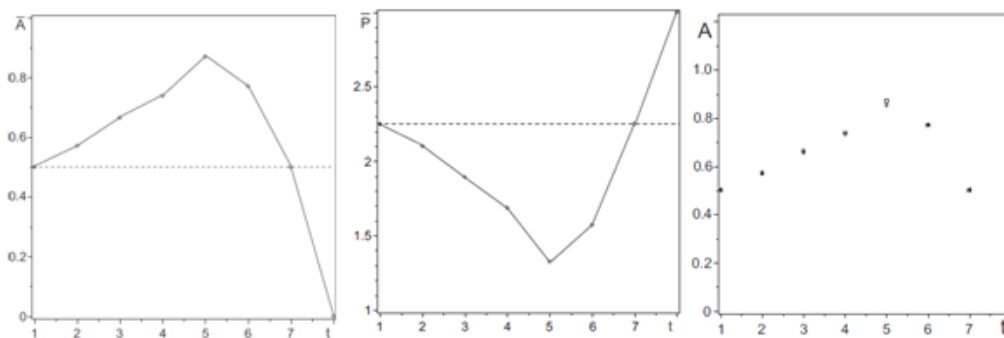


Рис.4. Слева изменение средней агрессивности «общества» со временем (пунктирная линия – начальное среднее значение агрессивности, это 0.5). В центре изменение среднего числа заработанных очков эволюционных преимуществ стратегией за один ход на каждом этапе эволюции. Справа сравнение средней агрессивности, полученной численным моделированием (квадратики), с соотношением (1) (крестики). Отличие заметно только в максимуме, в остальных наблюдается наложение точек

На рис. 4 приведено сравнение средней агрессивности, полученной численным моделированием, с эмпирической закономерностью, приведенной выше. Масштабный коэффициент выбран из соображений равенства этих характеристик на первом этапе эволюции $\lambda = 5.3/8$ и $a = 0.2$. Несмотря на небольшое отклонение в области максимума, графики демонстрируют хорошее согласие в поведении со временем этих характеристик.

Такая связь (1) устанавливает, что уменьшение количества очков на ход приводит к увеличению агрессивности общества. Естественно, можно переписать соотношение (1), разрешив его относительно $\bar{P}(t)$. Тогда можно утверждать, что увеличение агрессивности приводит к уменьшению среднего количества очков на ход стратегии согласно $\bar{P}(t) = \bar{P}_{max} - \frac{(\bar{A}(t) + a)^2}{\lambda}$. Таким образом, количество очков на ход стратегии квадратичным образом зависит от агрессивности.

5. Мир с глубиной памяти 1

Перейдем к миру с глубиной памяти 1. В этом мире число всех стратегий возрастает и становится равным 104. Ясно, что слежение за каждой стратегией хотя еще и возможно, но становится мало содержательным. Столь детальная информация скорее запутывает, чем помогает разобраться в закономерностях поведения стратегий. Поэтому с увеличением глубины памяти и, соответственно, количества стратегий становится исключительно важным коллективный способ описания стратегий. В мире с глубиной памяти 1 стратегии отличаются по сложности (0, 1, 2, 3, 4) и еще по глубине памяти (0,1). Эти характеристики позволяют классифицировать все стратегии на группы по этим свойствам. Таким образом, в этом мире кроме характеристик числа стратегий определенной сложностью (n_0, n_1, n_2, n_3 и n_4) можно ввести другие характеристики - число стратегий определенной глубины памяти. Далее введем a_0 -число стратегий с глубиной памяти 0 и a_1 -число стратегий с глубиной памяти 1. Это очень важные коллективные переменные, позволяющие описывать свойства большого числа разных стратегий. В процессе эволюции эти числа меняются и дают сокращенное описание поведения стратегий. Время эволюции в этом мире равно 100. В стационаре остаются 4 стратегии.

Начнем с обсуждения изменения памяти при эволюции. Наиболее полную информацию об этом процессе можно извлечь, наблюдая за поведением $a_0(t)$ и $a_1(t)$. Разумеется некоторые закономерности связаны с экспоненциальным отличием числа стратегий разной глубины памяти. Так, начальное число стратегий 0-ой глубины памяти - 8, а глубины 1 - уже 96. Поэтому дискретность изменения числа стратегий нулевой памяти так заметна на рис.5. Поведение $a_1(t)$, хотя и выглядит, как линейная функция, имеет важные отличия от нее. Кроме этого, такое значительное отличие их численности делает неинформативным сравнение их поведения на одном графике. Для сравнения их поведения нужно использовать другие характеристики.

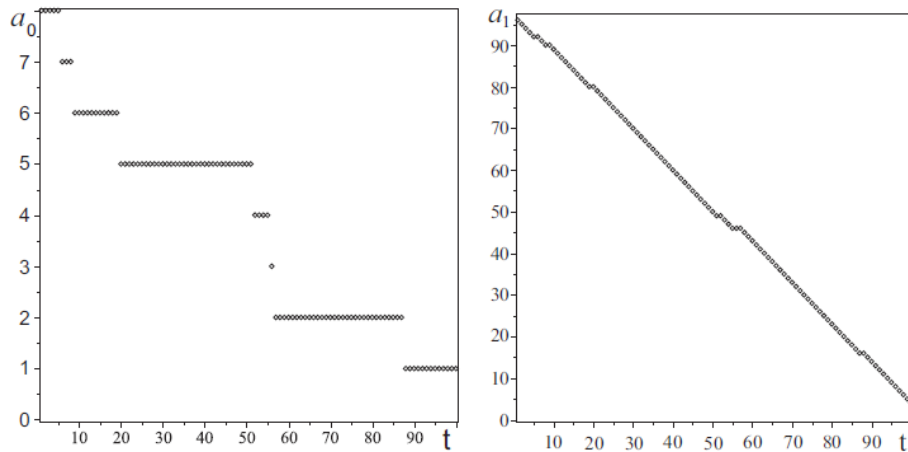


Рис.5. Слева зависимость числа стратегий с нулевой глубиной памяти, справа с глубиной 1 от времени

Из рис.5 видно, что стратегии с нулевой глубиной памяти присутствуют в этом мире на протяжении всего времени эволюции.

Функции $a_0(t)$ и $a_1(t)$ позволяют вычислять среднюю глубину памяти общества, которая определяется как $\bar{M} = \frac{0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1}{a_0 + a_1} \equiv \frac{a_1}{a_0 + a_1}$. Результат усреднения приведен на рис.6.

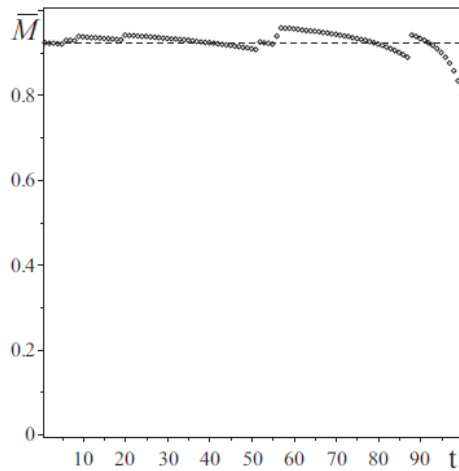


Рис.6. Изменение средней памяти общества

Исходя из рис.6 можно заметить, что в процессе эволюции средняя глубина памяти общества меняется незначительно. Причина этого связана с малым количеством стратегий с нулевой памятью и с присутствием стратегий с большей глубиной памяти даже при выходе в стационарное состояние. На рис.7

приведены значения глубины памяти победивших стратегий на соответствующих этапах эволюции. Легко заметить, что на начальном периоде доминирующие стратегии имеют максимальную глубину памяти. При этом могут возникать периоды, когда доминирующая стратегия имеет малую глубину памяти. Однако существенного влияния на среднюю память общества это не оказывает. Это следствие относительной малочисленности стратегий с малой памятью даже на этих этапах.

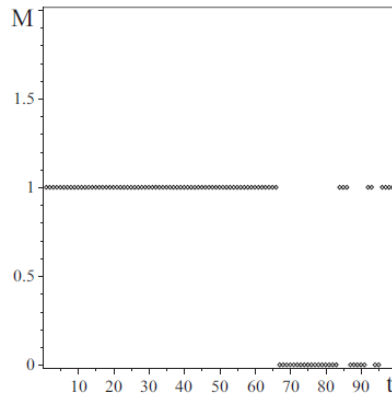


Рис.7. Глубина памяти победивших стратегий на соответствующих этапах

Перейдем к анализу поведения сложности общества. Наиболее детальную информацию о сложности общества несут функции $n_0(t)$, $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ и $n_4(t)$. Эти характеристики приведены на рис.8. Обратим внимание на начальную стадию, на которой присутствуют самые примитивные стратегии $n_0(t)$. Этот период занимает 55 этапов эволюции и заканчивается после исчезновения самой агрессивной стратегии 0000. В отличие от стратегий с 0-ой памятью в этом мире примитивные стратегии не доминируют на этом периоде. Однако они присутствуют в обществе в полном составе. Поэтому примитивный период развития общества с памятью не характеризуется доминированием самых примитивных стратегий, а определяется их наличием. Примитивный период занимает 55% времени выхода на стационарное состояние. Заметим, что относительная длительность примитивного периода уменьшилась с увеличением или точнее, с появлением памяти.

Самыми первыми исчезают из общества стратегии со сложностью 1 (см. рис.8 - зависимость $n_1(t)$), к которым относится и самая добропорядочная стратегия 1111, которая исчезает уже на 5 этапе. Можно только удивиться, что она исчезла не на первом этапе эволюции.

Интересно отметить, что усредненная скорость исчезновения стратегий самая большая у самых сложных стратегий. Чем выше сложность, тем больше средняя скорость исчезновения соответствующих стратегий. Несмотря на это выживают сложные стратегии.

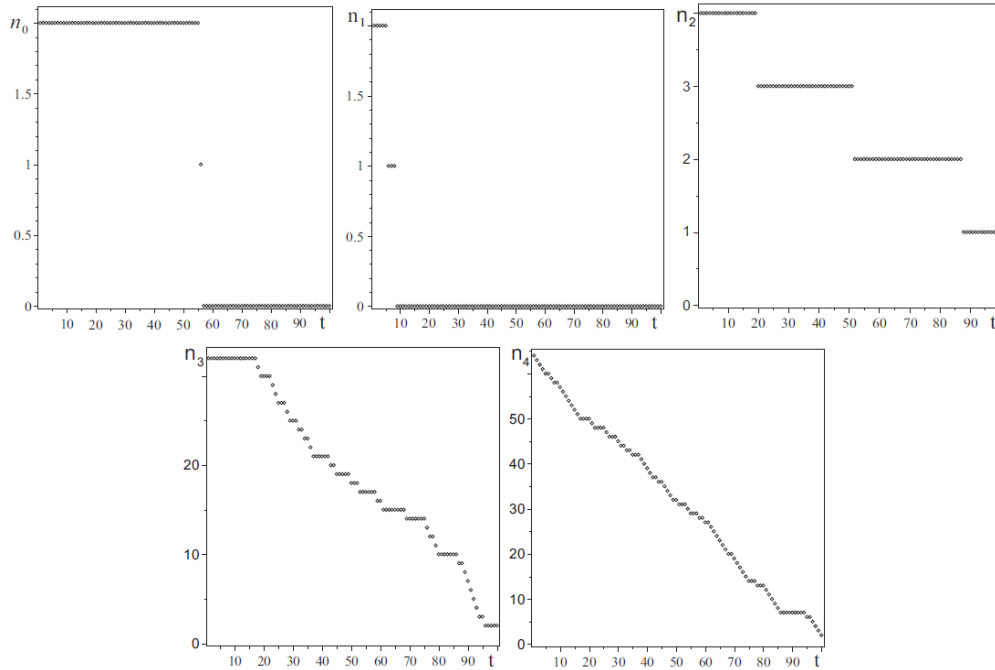


Рис.8. Количество стратегий соответствующей сложности на этапах эволюции

Это хорошо заметно по изменению средней сложности стратегий общества в процессе эволюции (см. рис.9). Видно, что средняя сложность меняется незначительно.

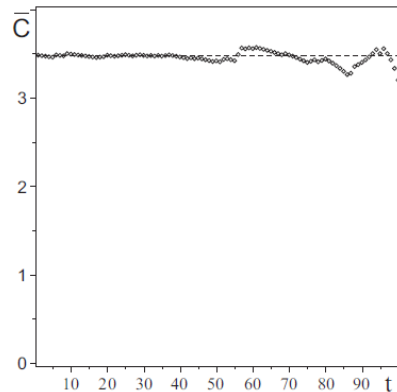


Рис.9. Изменение средней сложности стратегий общества со временем эволюции

Кроме этого можно заметить, что в мире с глубиной памяти 1 на всех этапах эволюции доминировали сложные стратегии. Это хорошо видно из рис.10, на котором отмечена сложность победивших стратегий на каждом этапе эволюции общества. Хорошо видно, что самые сложные стратегии захватывают первенство с начала эволюции и сохраняют его или, точнее, разделяя его со стратегиями, близкими по сложности к максимальной.

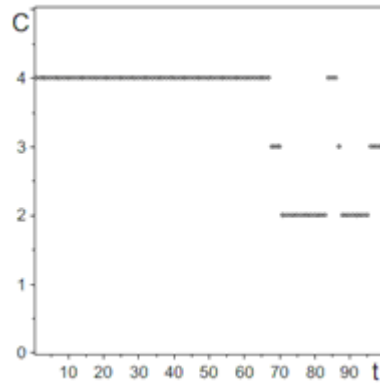


Рис.10. Сложность победивших стратегий на разных этапах эволюции

Рассмотрим теперь, как меняется агрессивность стратегий в процессе эволюции. На рис.11 приведено изменение средней агрессивности общества. Легко заметить, что как и в предыдущем мире средняя агрессивность на начальных временах нарастает. Затем агрессивность уменьшается, достигая минимума при выходе в стационарное состояние. Качественно такое поведение напоминает поведение агрессивности и при отсутствии памяти. Отличие состоит в сдвиге максимума при наличии памяти в относительно более ранние времена эволюции. Так, положение максимума с глубиной памяти 1 достигается на временах, составляющих 37% времени эволюции, а при отсутствии памяти - на временах 62.5% времени эволюции. Таким образом, если определять примитивный период по достижению средней агрессивности максимума, то стадия примитивного общества заканчивается на 37, 38 этапах. Стадия примитивного общества при глубине памяти 1 существенно укорачивается и составляет 37%-38% времени эволюции.

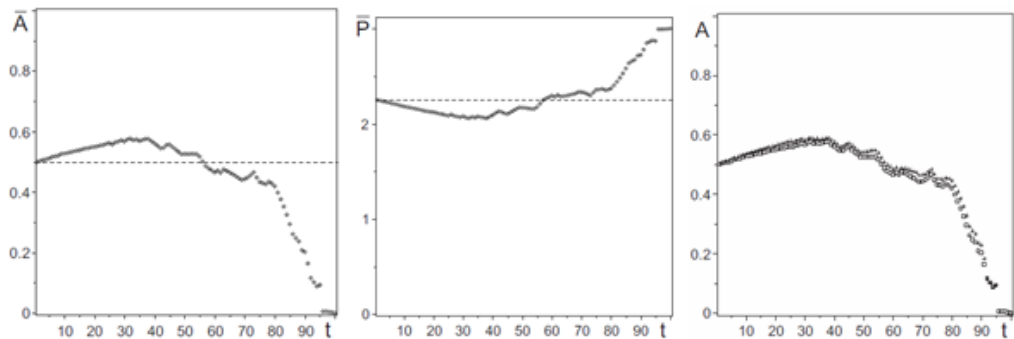


Рис.11. Слева изменение со временем средней агрессивности социума с глубиной памяти 1. В центре средний заработок на ход на каждом этапе эволюции. Пунктиром слева и в центре показаны средние значения общества, в котором присутствуют все стратегии с глубиной памяти 1 и ниже. Справа сравнение средней агрессивности (квадратики) с закономерностью (1), построенной по зависимости выплат за ход (крестики)

Рассмотрим теперь, как меняется набор очков эволюционного преимущества. На рис.11 показано количество очков, в среднем приходящихся на один ход на каждом этапе эволюции. Как и в мире с нулевой памятью видна корреляция в поведении средней агрессивности и среднего заработка на ход. Если предположить, что связь между этими характеристиками определяется соотношением (1), то можно осуществить сравнение средней агрессивности, полученной прямым моделированием (см. рис.11), с агрессивностью полученной по средним выплатам на ход. Масштабный фактор λ выбран $\lambda = 5.3/8$ и $a = 0.2$ так, чтобы значение на первом этапе этих зависимостей совпадало.

Такое сравнение показано на рис.11. Легко заметить высокую схожесть полученных функций. Разумеется, закономерность получена эмпирически и механизм такой связи не вполне ясен. Однако, хорошее согласие между такими же функциями наблюдается и при нулевой памяти. Другими словами, эти характеристики не являются независимыми, а одна из них зависит от другой.

6. Мир с глубиной памяти 2

Перейдем теперь к анализу закономерностей в мире с глубиной памяти 2. Матрица выплат и число ходов двух стратегий остается прежние. Естественно, что число всех возможных стратегий (с учетом начальных ходов) в этом мире увеличивается и равно 30824. Для существенного сокращения численных ресурсов и времени эволюции будем удалять на каждом этапе проигравшую стратегию (одну из 256) независимо от первых ходов. Тогда длительность эволюции занимает 256 этапов. В терминах коллективных переменных для анализа поведения стратегий с разной глубиной памяти все стратегии разделим на 3 группы по глубине памяти $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ и будем следить за изменением численности этих групп со временем (рис.12).

Как и следовало ожидать, дискретность изменения проявляется наиболее заметно для групп с небольшой глубиной памяти 0,1 и почти незаметна для $a_2(t)$. Причина этого в относительно небольшой численности стратегий с малой глубиной памяти.

Характерная особенность, которая хорошо заметна из рис.12, это присутствие стратегий с малой глубиной памяти на протяжении почти всего времени эволюции, несмотря на свою малочисленность. Так, стратегии с нулевой глубиной памяти исчезают на 236 этапе, а с глубиной памяти 1 на 249 этапе, что занимает 92% и 97% времени эволюции соответственно. Начиная с 249 этапа в эволюции участвуют только стратегии с максимальной глубиной памяти. Таким образом, и в этом мире память является эволюционно выгодной. Следует ожидать, что с увеличением глубины памяти эта тенденция будет проявляться, начиная с более ранних этапов эволюции.

Используя функции $a_i(t)$, рассмотрим, как меняется средняя память общества в процессе эволюции (см. рис.13)
$$\bar{M} = \frac{0 \cdot a_0(t) + 1 \cdot a_1(t) + 2 \cdot a_2(t)}{a_0(t) + a_1(t) + a_2(t)}.$$

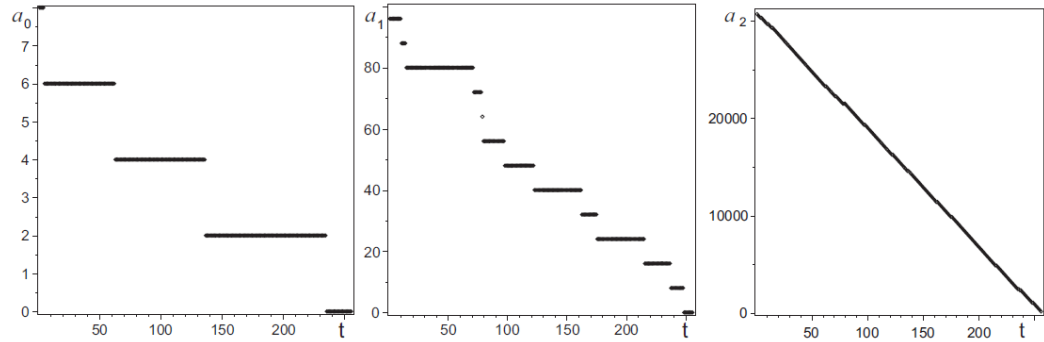


Рис.12. Изменение числа стратегий с определенной глубиной памяти в мире с глубиной памяти 2

Легко заметить, что средняя глубина памяти общества практически не меняется и близка к максимальной. На последних этапах можно заметить незначительное возрастание средней глубины памяти. Это связано с исчезновением на последних этапах стратегий с малой глубиной памяти и достижением максимального значения.

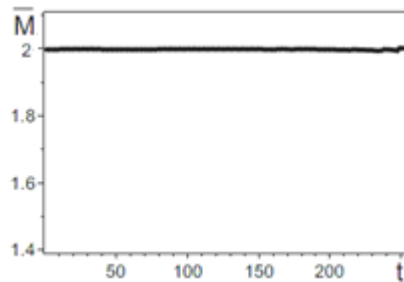


Рис.13. Изменение средней глубины памяти общества при эволюции

Доминирование стратегий с большой глубиной памяти наблюдается в этом мире на всех этапах эволюции (см. рис.14). Отсутствует эра доминирования стратегий с нулевой глубиной памяти.

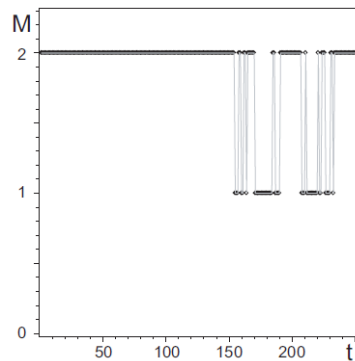


Рис.14. Глубина памяти победившей стратегии на каждом этапе эволюции

Перейдем к поведению сложности стратегий со временем. Разумеется, как и в предыдущих случаях, используем коллективные переменные $n_i(t)$. Результаты численного моделирования показаны на рис.15. Эти зависимости показывают, что примитивные стратегии малой сложности исчезают из общества на ранних этапах эволюции. Так, первыми исчезают стратегии сложности 1 - на 4 этапе (на этом этапе исчезает и самая «порядочная» стратегия), стратегии 0-ой сложности исчезают на 136 этапе (последней исчезает самая агрессивная стратегия), стратегии сложности 2 - на 235, сложности 3 - на 215, сложности 4 - на 248, сложности 5 - на 216 этапе. На заключительном этапе соревнуются только сложные стратегии. Стационар формируют только самые сложные стратегии.

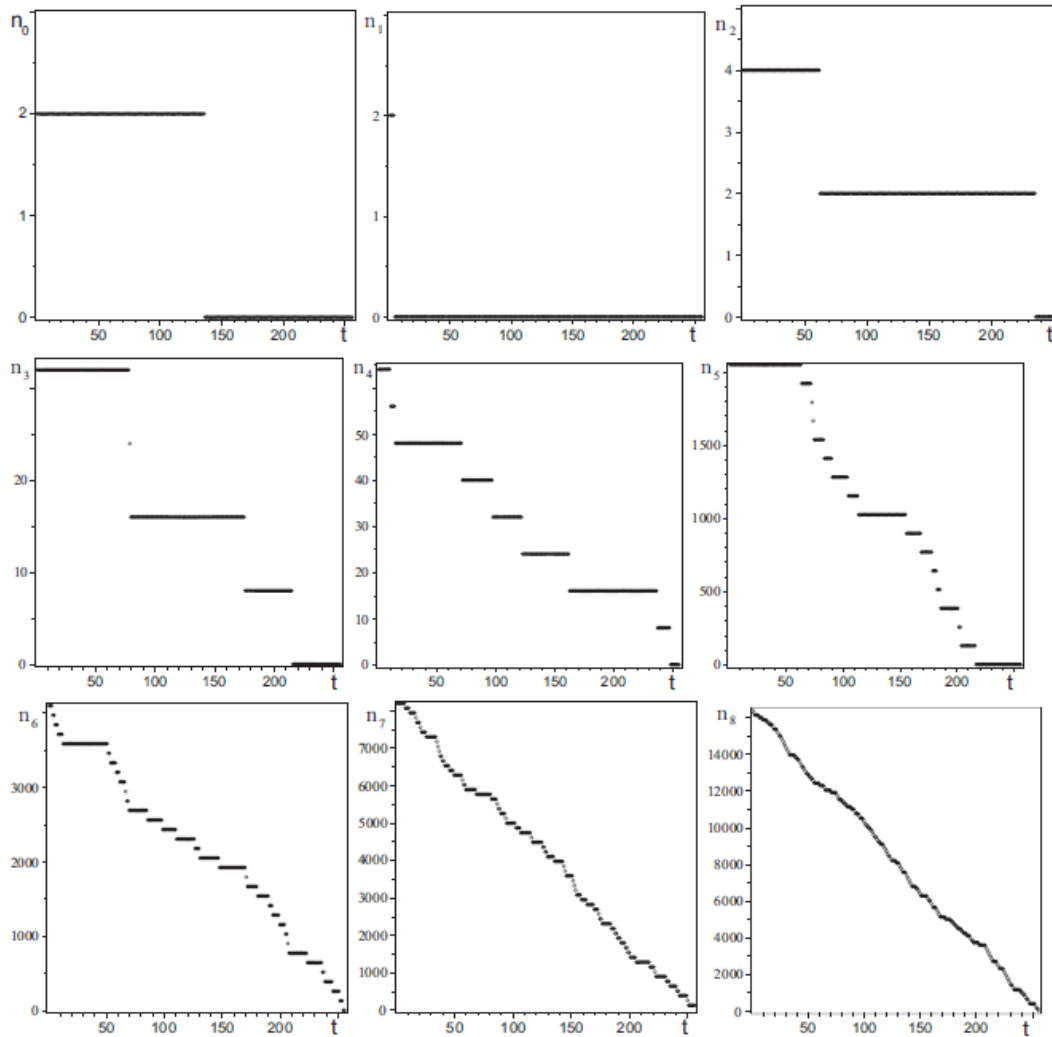


Рис.15. Изменение числа стратегий определенной сложности в мире с глубиной памяти 2

В мире с памятью сложность стратегий является выгодным при эволюции свойством. Можно сказать, что эволюция поддерживает и одобряет сложность стратегий.

Для демонстрации этого можно привести изменение средней сложности стратегий всего общества в процессе эволюции (см. рис.16). Видно, что средняя сложность стратегий мало меняется в процессе эволюции и небольшие ее осцилляции на заключительных этапах эволюции связаны с уменьшением числа стратегий общества. В этом случае исчезновение даже одной стратегии влияет на среднее значение. Можно предположить, что среднее значение сложности стратегий сохраняется при эволюции общества и с большей глубиной памяти.

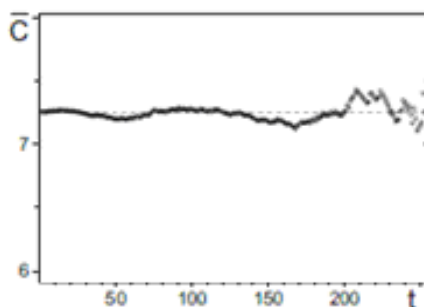


Рис.16. Поведення середньої складності стратегій суспільства

В мире с глубиной памяти 2 сложные стратегии доминируют на всех этапах эволюции. Это хорошо видно из рис.17, на котором показана сложность победившей стратегии на каждом этапе эволюции. Легко заметить, что стратегии малой сложности отсутствуют среди победителей на всех этапах эволюции. Другими словами, примитивный период развития общества, когда доминируют примитивные стратегии, в этом мире отсутствует. Поэтому можно выделить примитивный период по наличию примитивных стратегий, а не по их доминированию. Более естественный способ выделения примитивного периода можно осуществить по возрастанию агрессивности в обществе и достижения максимального значения.

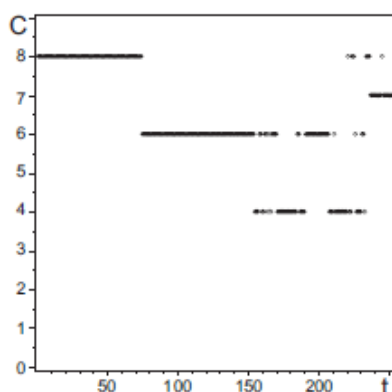


Рис.17. Складність стратегії переможця на кожному етапі еволюції

На рис. 18 приведена средняя агрессивность общества на каждом этапе эволюции. Видна характерная зависимость средней агрессивности со временем. Начальный примитивный этап развития можно выделить по росту агрессивности стратегий до максимума. Этот этап в мире с глубиной памяти 2 длится до $53 \div 57$ этапов, и еще один близкий по значению агрессивности достигается на $115 \div 118$ этапах. Обратим внимание, что в силу дискретности и не гладкости данных, максимальное значение трудно идентифицировать. Присутствует широкое плато в данных. Поэтому будем ориентироваться на период, за который достигается значение агрессивности исходного общества, что занимает примерно 188 этапов. Предполагая симметричность максимума, оценим характерное время примитивной стадии как $188 / 2 = 94$. Этот период занимает 37% времени эволюции. Обратим внимание, что он заканчивается до исчезновения самой агрессивной стратегии. Причина возникновения широкого плато в окрестности максимума возможно связана со стремлением максимального значения агрессивности к 0.5 при увеличении глубины памяти.

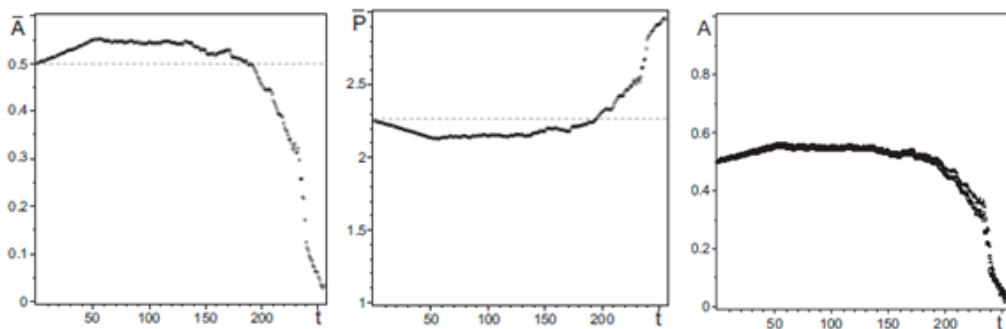


Рис.18. Слева средняя агрессивность стратегий на каждом этапе эволюции. В центре число очков в среднем на один ход одной стратегии. Справа средняя агрессивность (квадратики) и агрессивность построенная по уравнению (1) (крестики)

Общая тенденция уменьшения очков с увеличением агрессивности сохраняется и в этом мире (см. рис.18). Характер изменения имеет типичный для всех миров вид. Отличия сводятся к относительному положению минимума получаемых очков эволюционного преимущества. Также заметна корреляция между агрессивностью и количеством очков на ход. С ростом памяти выполнимость универсальной связи (1) улучшается. Интересно отметить, что $\bar{P}_{max} = 3$ во всех мирах, как и коэффициент $\lambda = 5.3/8$ и $a = 0.2$.

7. Выводы

Прежде всего отметим, что для рассматриваемой задачи Коши, память и, как ее следствие, сложность дают эволюционные преимущества. Вымирают стратегии с малой памятью и малой сложностью. Средняя память и сложность общества при фиксированной глубине памяти стратегий мало меняется при эволюции и близки к максимальным значениям. По-видимому, это основная причина усложнения и возникновения разнообразия при эволюции. Кроме этого, выжившие стратегии в стационаре обладают нулевой агрессивностью по

отношению друг к другу. В определенном смысле можно сказать, что память и есть универсальный механизм возникновения кооперации в сообществе.

Во всех рассмотренных мирах можно выделить примитивный период, на котором агрессивность стратегий в обществе нарастает. С увеличением глубины памяти относительная длительность этого периода уменьшается. Так, в мире без памяти примитивный период занимает 62.5% времени эволюции (до выхода в стационар), в мире с памятью 1 - $37 \div 38\%$, а в мире с памятью 2 - 37% возможно и меньше. Примитивные стратегии существуют в обществе и после окончания примитивного периода.

Время существования самой агрессивной стратегии в обществе с увеличением глубины памяти тоже сокращается. Так, при глубине памяти 0 оно занимает 62.5% времени эволюции, в мире с памятью 1 - 55%, а в мире с памятью 2 - 53%. Можно заметить корреляцию с длительностью примитивного периода. В принципе, можно использовать другое определение примитивного периода, например, по существованию в нем самой агрессивной стратегии.

Во всех мирах зависимость средней агрессивности от времени имеет характерный колоколообразный вид. Отличия состоят в положении максимума и его величине. Так, с увеличением глубины памяти максимум смещается к началу эволюции, а его величина падает, что затрудняет нахождение его положения. Поэтому с увеличением глубины памяти его ширина возрастает. Агрессивность в процессе эволюции после примитивного периода убывает и стремится к минимальному значению. Стационар формируют стратегии с нулевой агрессивностью по отношению к друг другу.

Существует универсальная связь (1) между агрессивностью общества и количеством получаемых стратегией очков эволюционных преимуществ в среднем за ход в обществе.

Разумеется, в дальнейшем мы рассмотрим влияние двух важных факторов, которые в постановке задачи Коши отсутствовали. Прежде всего, это влияние источников новых стратегий на разных этапах эволюции и изменение числа носителей стратегий. Изменение числа носителей стратегий можно осуществить без существенного увеличения вычислительных ресурсов используя пересчет одночастичного приближения. Эти факторы существенны для характера эволюции. Более серьезная проблема состоит в огромных вычислительных сложностях при увеличении глубины памяти. Даже небольшое увеличение в связи со сверхэкспоненциальным ростом числа стратегий является мощным ограничением. Преодоление этого требует недоступных вычислительных мощностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weibull J. W. Evolutionary game theory. – MIT press, 1997.
2. Nowak M. A. Evolutionary dynamics. – Harvard University Press, 2006.
3. Claussen J. C. Discrete stochastic processes, replicator and Fokker-Planck equations of coevolutionary dynamics in finite and infinite populations //arXiv preprint arXiv:0803.2443. – 2008.
4. Traulsen A., Claussen J. C., Hauert C. Coevolutionary dynamics: from finite to infinite populations //Physical review letters. – 2005. – Т. 95. – №. 23. –

- C. 238701.
5. Nowak M. A., May R. M. The spatial dilemmas of evolution //International Journal of bifurcation and chaos. – 1993. – Т. 3. – №. 01. – С. 35-78.
 6. Nowak M., Sigmund K. A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in the Prisoner's Dilemma game //Nature. – 1993. – Т. 364. – №. 6432. – С. 56-58.
 7. Brandt H., Hauert C., Sigmund K. Punishment and reputation in spatial public goods games //Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences. – 2003. – Т. 270. – №. 1519. – С. 1099-1104.
 8. Nowak M. A., May R. M. Evolutionary games and spatial chaos //Nature. – 1992. – Т. 359. – №. 6398. – С. 826-829.
 9. Szabó G., Hauert C. Phase transitions and volunteering in spatial public goods games //Physical review letters. – 2002. – Т. 89. – №. 11. – С. 118101.
 10. Perc M. Chaos promotes cooperation in the spatial prisoner's dilemma game //EPL (Europhysics Letters). – 2006. – Т. 75. – №. 6. – С. 841.
 11. Perc M., Szolnoki A., Szabó G. Restricted connections among distinguished players support cooperation //Physical Review E. – 2008. – Т. 78. – №. 6. – С. 066101.
 12. Baek S. K. et al. Intelligent tit-for-tat in the iterated prisoner's dilemma game //Physical Review E. – 2008. – Т. 78. – №. 1. – С. 011125.
 13. Szolnoki A., Perc M. Reward and cooperation in the spatial public goods game //EPL (Europhysics Letters). – 2010. – Т. 92. – №. 3. – С. 38003.
 14. Szolnoki A., Perc M. Impact of critical mass on the evolution of cooperation in spatial public goods games //Physical Review E. – 2010. – Т. 81. – №. 5. – С. 057101.
 15. Szolnoki A., Perc M. Group-size effects on the evolution of cooperation in the spatial public goods game //Physical Review E. – 2011. – Т. 84. – №. 4. – С. 047102.
 16. Liu Y. et al. Aspiration-based learning promotes cooperation in spatial prisoner's dilemma games //EPL (Europhysics Letters). – 2011. – Т. 94. – №. 6. – С. 60002.
 17. Szolnoki A., Perc M. Conditional strategies and the evolution of cooperation in spatial public goods games //Physical Review E. – 2012. – Т. 85. – №. 2. – С. 026104.
 18. Szabó G., Fath G. Evolutionary games on graphs //Physics reports. – 2007. – Т. 446. – №. 4. – С. 97-216.
 19. Ohtsuki H. et al. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks //Nature. – 2006. – Т. 441. – №. 7092. – С. 502-505.
 20. Santos F. C., Pacheco J. M. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation //Physical Review Letters. – 2005. – Т. 95. – №. 9. – С. 098104.
 21. Nowak M., Highfield R. Supercooperators: Altruism, evolution, and why we need each other to succeed. – Simon and Schuster, 2011.
 22. Szabó G., Hauert C. Evolutionary prisoner's dilemma games with voluntary participation //Physical Review E. – 2002. – Т. 66. – №. 6. – С. 062903.
 23. Hauert C. et al. Via freedom to coercion: the emergence of costly punishment //science. – 2007. – Т. 316. – №. 5833. – С. 1905-1907.

24. Traulsen A., Claussen J. C. Similarity-based cooperation and spatial segregation //Physical Review E. – 2004. – Т. 70. – №. 4. – С. 046128.
25. Szolnoki A., Szabó G. Cooperation enhanced by inhomogeneous activity of teaching for evolutionary Prisoner's Dilemma games //EPL (Europhysics Letters). – 2007. – Т. 77. – №. 3. – С. 30004.
26. Perc M., Szolnoki A. Social diversity and promotion of cooperation in the spatial prisoner's dilemma game //Physical Review E. – 2008. – Т. 77. – №. 1. – С. 011904.
27. Yang H. X. et al. Diversity-optimized cooperation on complex networks //Physical Review E. – 2009. – Т. 79. – №. 5. – С. 056107.
28. Pacheco J. M., Traulsen A., Nowak M. A. Coevolution of strategy and structure in complex networks with dynamical linking //Physical review letters. – 2006. – Т. 97. – №. 25. – С. 258103.
29. Ohtsuki H., Nowak M. A., Pacheco J. M. Breaking the symmetry between interaction and replacement in evolutionary dynamics on graphs //Physical review letters. – 2007. – Т. 98. – №. 10. – С. 108106.
30. Meloni S. et al. Effects of mobility in a population of prisoner's dilemma players //Physical Review E. – 2009. – Т. 79. – №. 6. – С. 067101.
31. Jiang L. L. et al. Role of adaptive migration in promoting cooperation in spatial games //Physical Review E. – 2010. – Т. 81. – №. 3. – С. 036108.
32. Fu F., Nowak M. A. Global migration can lead to stronger spatial selection than local migration //Jour. of stat. physics. – 2013. – Т. 151. – №. 3-4. – С. 637-653.
33. Fu F. et al. Evolution of in-group favoritism //Scientific reports. – 2012. – Т. 2. – С. 460.
34. Wang Z., Szolnoki A., Perc M. Optimal interdependence between networks for the evolution of cooperation //Scientific reports. – 2013. – Т. 3.
35. Lieberman E., Hauert C., Nowak M. A. Evolutionary dynamics on graphs //Nature. – 2005. – Т. 433. – №. 7023. – С. 312-316.
36. Hauert C., Doebeli M. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game //Nature. – 2004. – Т. 428. – №. 6983. – С. 643-646.
37. Axelrod R. The evolution of cooperation. – 1984.
38. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия " количество информации". – 2015.
39. Колмогоров А. Н. К логическим основам теории информации и теории вероятностей //Проблемы передачи информации. – 1969. – Т. 5. – №. 3. – С. 3-7.
40. Lloyd S. Measures of complexity: a nonexhaustive list //IEEE Control Systems Magazine. – 2001. – Т. 21. – №. 4. – С. 7-8.
41. Арнольд В. Экспериментальное наблюдение математических фактов. – Litres, 2017.
42. В.М.Куклин, А.В.Приймак, В.В.Яновский. Влияние памяти на эволюцию популяций, Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» т.29, с.41-66, 2016.