

УДК 539.3

## Дослідження поведінки узагальнених переміщень, отриманих із використанням теорії $\{m,n\}$ -апроксимації

І.П. Боков, Н.С. Бондаренко, О.О. Стрельнікова

Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків,  
61046, Україна  
e-mail: estrel@ipmach.kharkov.ua

Розглядається зосереджений силовий вплив на трансверсально-ізотропну пластину. Тривимірні рівняння теорії пружності зведені до двовимірних рівнянь за допомогою розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра. Обрана теорія  $\{m,n\}$ -апроксимації є найбільш придатною для отримання двовимірних рівнянь теорії пружності, оскільки вона не базується на жодних гіпотезах. Для розв'язання поставленої задачі використаний метод фундаментальних розв'язків. Досліджено поведінку переміщень, отриманих на базі узагальненої теорії  $\{m,n\}$ -апроксимації, в залежності від пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу.

**Ключові слова:** теорія  $\{m,n\}$ -апроксимації, трансверсально-ізотропна пластина, зосереджений силовий вплив, узагальнені переміщення.

A concentrated force action on a transversely-isotropic plate is considered. Three-dimensional equations of the elasticity theory are reduced to the two-dimensional ones by expanding unknown functions into Fourier series of Legendre polynomials. The chosen  $\{m,n\}$ -approximation theory is the most suitable for obtaining two-dimensional equations of the elasticity theory, because it is not based on any hypotheses. Also, this approach allows us to consider not only thin plates, but plates of medium and large thickness. The accuracy of the obtained solutions depends on the number of terms that are retained in the expansions of the given and unknown functions. The equations obtained by using this approach take into account all the components of the stress tensor, including the transverse shear and normal stresses. Since the classical theory of Kirchhoff-Love doesn't take into account these stresses, the study on the basis of refined theories of stress-strain state of transversely isotropic plates under the action of concentrated force effects is an important scientific and technical problem. The fundamental solution of the equations is obtained by using two-dimensional Fourier integral transform and inverse treatment techniques, built with the help of a special G-function. This method allows reducing the system of differential equations for statics of flat plates and shells to the system of algebraic equations. Then the inverse Fourier transform restores the fundamental solution. The numerical studies that demonstrate behavior of displacements based on the refined  $\{m,n\}$ -approximation theory, depending on the elastic constants of transversely isotropic material have been carried out. The analysis of the stress-strain state of plates on the basis of the generalized theory of  $\{m,n\}$ -approximation is considered. The results play a decisive role in the study of boundary value problems in the mechanics of thin-walled elements of constructions, including those under the influence of concentrated and local diverse forces.

**Keywords:** theory of  $\{m,n\}$ -approximation, transversely-isotropic plate, concentrated force action, generalized displacements.

Рассматривается сосредоточенное силовое воздействие на трансверсально-изотропную пластину. Трехмерные уравнения теории упругости сведены к двумерным уравнениям с помощью разложения искоемых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра. Выбранная теория  $\{m,n\}$ -аппроксимации является наиболее подходящей для получения двумерных уравнений теории упругости, поскольку она не основана на каких-либо гипотезах. Для решения поставленной задачи использован метод фундаментальных решений. Исследовано поведение перемещений, полученных на базе уточненной теории  $\{m,n\}$ -аппроксимации, в зависимости от упругих постоянных трансверсально-изотропного материала.

**Ключевые слова:** теория  $\{m,n\}$ -аппроксимации, трансверсально-изотропная пластина, сосредоточенное силовое воздействие, обобщенные перемещения.

### 1 Вступ

В машинобудуванні, аерокосмічній техніці, суднобудуванні тощо широко використовуються тонкостінні елементи конструкцій. Удосконалення існуючих конструкцій, зростаюче використання нових матеріалів, які мають різку анізотропію пружних властивостей, вимагає застосування уточнених теорій для описання процесу їх деформування в умовах як статичного, так і динамічного навантаження. Особливого значення набувають дослідження пружно-деформованого стану конструкцій за дії зосередженого силового навантаження. Основна особливість сучасного етапу розвитку механіки пластинкових та оболонкових конструкцій полягає в переході від класичних теорій до узагальнених, які мають високу точність і універсальність.

Таким чином дослідження поведінки переміщень, отриманих за допомогою узагальненої теорії  $\{m,n\}$ -апроксимації, має велике наукове і практичне значення.

Одним із способів отримання двовимірних рівнянь є застосування розвинених шуканих функцій у ряди за поперечною координатою [1-4]. Це, зокрема, степеневі ряди і розвинення за

системами ортогональних поліномів. Виведення двовимірних рівнянь на основі розвинення шуканих функцій у степеневі ряди дає можливість одержати більш точні результати, однак розв'язання в цьому випадку стає складнішим. Це призводить до того, що в цих розвиненнях можливе врахування тільки кількох перших членів.

Використання узагальнених теорій наведено у роботах [5-10]. У публікаціях [5-7] на базі двовимірних узагальнених теорій авторами запропоновані постановки і методи розв'язання задач, проведені чисельні дослідження і подальший аналіз отриманих результатів.

Публікації [8-10] присвячені побудові і дослідженню фундаментальних розв'язків, отриманих за допомогою узагальненої теорії  $\{m,n\}$ -апроксимації.

## 2 Постановка задачі

Розглянемо трансверсально-ізотропну пластину товщини  $2h$  у прямокутній декартовій системі координат  $x, y, z$ . На пластину діє зосереджена сила, прикладена на початку координат.

У випадку  $\{1,0\}$ -апроксимації компоненти вектора переміщень і тензора напружень мають таке подання [1]:

$$\begin{aligned} u_x &= uP_0(z) + \gamma_x h P_1(z), & u_y &= vP_0(z) + \gamma_y h P_1(z), & u_z &= w_0 P_0(z), \\ \sigma_x &= \frac{N_x}{2h} P_0(z) + \frac{3M_x}{2h^2} P_1(z) \quad (x \rightarrow y), & \tau_{xy} &= \frac{S}{2h} P_0(z) + \frac{3H}{2h^2} P_1(z), \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_x}{2h} \{P_0(z) - P_2(z)\} \quad (x \rightarrow y), & \sigma_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де  $u, v, w_0$  – аналоги переміщень точок серединної поверхні пластини;  $\gamma_x, \gamma_y$  – аналоги кутів повороту нормалі;  $N_x, N_y, S$  – аналоги мембранних зусиль;  $M_x, M_y, H$  – аналоги згинного і крутного моментів;  $Q_x, Q_y$  – аналоги перерізуючих сил;  $P_k(z)$  – поліноми Лежандра.

Компоненти вектора об'ємної сили представляються таким чином [1]

$$F_x = \frac{q_x}{2h} P_0(z) + \frac{3m_x}{2h^2} P_1(z) \quad (x \rightarrow y), \quad F_z = \frac{q_z}{2h} P_0(z). \quad (2.2)$$

Рівняння статки у випадку  $\{1,0\}$ -апроксимації для трансверсально-ізотропних пластин, записані у безрозмірній системі координат ( $x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$ ), містять [1]:

– рівняння закону Гука

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), & N_2 &= B_0 \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), & S &= \frac{1-\nu}{2} B_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \\ H &= \frac{1-\nu}{2} D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right), & M_1 &= D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right), & M_2 &= D_0 \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right), \\ Q_j &= \Lambda_0 \left( \gamma_j + \frac{\partial w_0}{\partial x_j} \right) \quad (j=1,2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

де

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}, \quad \Lambda_0 = \frac{5}{3} \frac{1}{E/G'},$$

$E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона у площині ізотропії;  $G'$  – модуль зсуву у площинах, перпендикулярних до площини ізотропії;  $E/G'$  – параметр зсувної піддатливості;

– рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} + q_1 &= 0, & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial x_1} + q_2 &= 0, & \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 + m_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_2 + m_2 &= 0, & \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де  $m_i = m_i^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $q_j = q_j^* \delta(x_1, x_2)$  ( $i = 1, 2; j = \overline{1, 3}$ );  $m_i^*$ ,  $q_j^*$  – сталі;  $\delta(x_1, x_2)$  – двовимірний дельта-функція Дірака [11].

Зауважимо, що система рівнянь, що описує безмоментний пружний стан у випадку  $\{1, 0\}$ -апроксимації (перші три рівняння (2.3), перші два рівняння (2.4)), аналогічна системі рівнянь, яка описує плоский пружний стан ізотропних пластин на базі класичної теорії [12].

У випадку  $\{1, 2\}$ -апроксимації подання компонент вектора переміщень  $u_x$ ,  $u_y$ , тензора напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  і компонент вектора об'ємної сили  $F_x$ ,  $F_y$  має такий же вигляд, як і у випадку  $\{1, 0\}$ -апроксимації (формули (2.1), (2.2)), а інші компоненти визначаються так [1]:

$$\begin{aligned} u_z &= w_0 P_0(z) + w_1 P_1(z) + w_2 P_2(z), & F_z &= \frac{q_{z0}}{2h} P_0(z) + \frac{3q_{z1}}{2h} P_1(z) + \frac{5q_{z2}}{2h} P_2(z), \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_{x0}}{2h} \{P_0(z) - P_4(z)\} + \frac{3Q_{x1}}{2h} \{P_1(z) - P_3(z)\} + \frac{5Q_{x2}}{2h} \{P_2(z) - P_4(z)\} & (x \rightarrow y), \\ \sigma_z &= \frac{R_0}{2h} \{P_0(z) - P_2(z)\} + \frac{3R_1}{2h} \{P_1(z) - P_3(z)\}, \end{aligned}$$

де  $w_i$  ( $i = \overline{0, 2}$ ) – узагальнені переміщення пластини, з яких  $w_0$  – аналог переміщення точок серединної поверхні;  $Q_{ij}$  ( $i = x, y; j = \overline{0, 2}$ ),  $R_j$  ( $j = 0, 1$ ) – узагальнені зусилля, з яких  $Q_{x0}$ ,  $Q_{y0}$  – аналоги перерізуючих сил.

Система рівнянь для трансверсально-ізотропних пластин на базі теорії  $\{1, 2\}$ -апроксимації, записана у безрозмірній системі координат, містить [1]  
– рівняння закону Гука

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \lambda_0 R_0, & N_2 &= B_0 \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \lambda_0 R_0, \\ S &= \frac{1-\nu}{2} B_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), & H &= \frac{1-\nu}{2} D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right), \\ M_1 &= D_0 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right) + \lambda_0 R_1, & M_2 &= D_0 \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right) + \lambda_0 R_1, \\ Q_{j0} &= \Lambda_0 \left[ \gamma_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( w_0 - \frac{w_2}{14} \right) \right], & Q_{j1} &= \Lambda'_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_j}, \\ Q_{j2} &= -\frac{\Lambda_0}{14} \left[ \gamma_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (w_0 - 2w_2) \right] & (j = 1, 2), \\ R_0 &= \Omega'_0 \left[ w_1 + \lambda_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right], & R_1 &= \Omega_0 \left[ w_2 + \frac{\lambda_0}{3} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

де

$$\begin{aligned} \Lambda'_0 &= \frac{3}{4} \Lambda_0 = \frac{7}{5} \frac{1}{E/G'}, & \lambda_0 &= \frac{\nu'}{1-\nu} E^*, \\ \Omega'_0 &= \frac{25}{21} \Omega_0 = \frac{5}{3} \frac{(1-\nu)/E^*}{1-\nu-2(\nu')^2 E^*}, & E^* &= \frac{E}{E'}, \end{aligned}$$

$E'$ ,  $\nu'$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона для напрямку, перпендикулярного до площини ізотропії;

– рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} + q_1 &= 0, & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial x_1} + q_2 &= 0, & \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} + m_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} - Q_{20} + m_2 &= 0, & \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} + q_4 &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_2} - R_0 + q_3 = 0, \quad \frac{\partial Q_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} - 3R_1 + q_5 = 0, \quad (2.6)$$

де  $m_i = m_i^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $q_j = q_j^* \delta(x_1, x_2)$  ( $i = 1, 2; j = \overline{1, 5}$ );  $m_i^*$ ,  $q_j^*$  – сталі.

Моменти у співвідношеннях (2.3)-(2.6) визначені з точністю до величини  $Eh^2$ , а узагальнені зусилля – до  $Eh$ .

### 3 Узагальнені переміщення для трансверсально-ізотропної пластини

Отримаємо узагальнені переміщення для кожної апроксимації. Розв'язання будемо проводити за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є [13] та методики обертання, що ґрунтується на використанні спеціальної  $G$ -функції [14].

#### 3.1 {1,0}-апроксимація

Підставимо співвідношення закону Гука (2.3) в рівняння рівноваги (2.4) і застосуємо перетворення Фур'є до отриманої системи:

$$\begin{aligned} \left( D_0 \xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} D_0 \xi_2^2 + \Lambda_0 \right) \tilde{\gamma}_1 + \frac{1+\nu}{2} D_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{\gamma}_2 - \Lambda_0 i \xi_1 \tilde{w}_0 &= \frac{m_1^*}{2\pi}, \\ \frac{1+\nu}{2} D_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{\gamma}_1 + \left( D_0 \xi_2^2 + \frac{1-\nu}{2} D_0 \xi_1^2 + \Lambda_0 \right) \tilde{\gamma}_2 - \Lambda_0 i \xi_2 \tilde{w}_0 &= \frac{m_2^*}{2\pi}, \\ \Lambda_0 i \xi_1 \tilde{\gamma}_1 + \Lambda_0 i \xi_2 \tilde{\gamma}_2 + \Lambda_0 p^2 \tilde{w}_0 &= \frac{q_3^*}{2\pi}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де  $p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ ;  $(\xi_1, \xi_2)$  – координати точки у просторі трансформант.

Після розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.1) отримаємо трансформанти узагальнених переміщень

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{m_1^*}{D_0} \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) + 3(1+\nu) m_1^* \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1, a) + \frac{q_3^*}{D_0} \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_2^*}{D_0} \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) - 3(1+\nu) m_2^* \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a) \right], \\ \tilde{\gamma}_2 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{m_2^*}{D_0} \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1) + 3(1+\nu) m_2^* \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, a) + \frac{q_3^*}{D_0} \tilde{\Phi}_3(\xi_2, \xi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1^*}{D_0} \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) - 3(1+\nu) m_1^* \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a) \right], \\ \tilde{w}_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{m_1^*}{D_0} \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) - \frac{m_2^*}{D_0} \tilde{\Phi}_3(\xi_2, \xi_1) + \frac{q_3^*}{D_0} \tilde{\Phi}_6(\xi_1, \xi_2) + \frac{q_3^*}{\Lambda_0} \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1^2}{p^4}, & \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, c) &= \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2 + c^2)}, & \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i \xi_1}{p^4}, \\ \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1 \xi_2}{p^4}, & \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, c) &= \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2 + c^2)}, & \tilde{\Phi}_6(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{p^4}, \\ \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{p^2}; & a^2 &= 3(1+\nu) \Lambda_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Застосовуючи зворотне перетворення Фур'є до співвідношень (3.2) та (3.3) отримаємо оригінали узагальнених переміщень

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{m_1^*}{D_0} \Phi_1(x_1, x_2) + 3(1+\nu)m_1^* \Phi_2(x_2, x_1, a) + \frac{q_3^*}{D_0} \Phi_3(x_1, x_2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_2^*}{D_0} \Phi_4(x_1, x_2) - 3(1+\nu)m_2^* \Phi_5(x_1, x_2, a) \right], \\
\gamma_2 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{m_2^*}{D_0} \Phi_1(x_2, x_1) + 3(1+\nu)m_2^* \Phi_2(x_1, x_2, a) + \frac{q_3^*}{D_0} \Phi_3(x_2, x_1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_1^*}{D_0} \Phi_4(x_1, x_2) - 3(1+\nu)m_1^* \Phi_5(x_1, x_2, a) \right], \\
w_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{m_1^*}{D_0} \Phi_3(x_1, x_2) - \frac{m_2^*}{D_0} \Phi_3(x_2, x_1) + \frac{q_3^*}{D_0} \Phi_6(x_1, x_2) + \frac{q_3^*}{\Lambda_0} \Phi_7(x_1, x_2) \right], \quad (3.4)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - \frac{1}{4} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \\
\Phi_2(x_1, x_2, c) &= \frac{1}{2} \left[ G_{0,0} \left( c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1} \left( c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right], \\
\Phi_3(x_1, x_2) &= \frac{x_1}{4} \left( 1 - 2 \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} \right), \quad \Phi_4(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\
\Phi_5(x_1, x_2, c) &= \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1} \left( c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), \quad \Phi_6(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \left( \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - 1 \right), \\
\Phi_7(x_1, x_2) &= -\ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2}.
\end{aligned}$$

### 3.2 {1,2}-апроксимація

При підстановці виразів (2.5) у (2.6) із застосуванням перетворення Фур'є отримаємо

$$\begin{aligned}
\left( A_1 \xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} D_0 \xi_2^2 + \Lambda_0 \right) \tilde{\gamma}_1 + A_2 \xi_1 \xi_2 \tilde{\gamma}_2 - \Lambda_0 i \xi_1 \tilde{w}_0 + A_3 i \xi_1 \tilde{w}_2 &= \frac{m_1^*}{2\pi}, \\
A_2 \xi_1 \xi_2 \tilde{\gamma}_1 + \left( \frac{1-\nu}{2} D_0 \xi_1^2 + A_1 \xi_2^2 + \Lambda_0 \right) \tilde{\gamma}_2 - \Lambda_0 i \xi_2 \tilde{w}_0 + A_3 i \xi_2 \tilde{w}_2 &= \frac{m_2^*}{2\pi}, \\
\left( A \xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} B_0 \xi_2^2 \right) \tilde{u} + A_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{v} + \lambda_0 \Omega'_0 i \xi_1 \tilde{w}_1 &= \frac{q_1^*}{2\pi}, \\
A_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{u} + \left( \frac{1-\nu}{2} B_0 \xi_1^2 + A \xi_2^2 \right) \tilde{v} + \lambda_0 \Omega'_0 i \xi_2 \tilde{w}_1 &= \frac{q_2^*}{2\pi}, \\
-\lambda_0 \Omega'_0 i (\xi_1 \tilde{u} + \xi_2 \tilde{v}) + (\Omega'_0 + \Lambda'_0 p^2) \tilde{w}_1 &= \frac{q_3^*}{2\pi}, \\
\Lambda_0 i (\xi_1 \tilde{\gamma}_1 + \xi_2 \tilde{\gamma}_2) + \Lambda_0 p^2 \tilde{w}_0 - \frac{1}{14} \Lambda_0 p^2 \tilde{w}_2 &= \frac{q_4^*}{2\pi}, \\
-A_3 i (\xi_1 \tilde{\gamma}_1 + \xi_2 \tilde{\gamma}_2) - \frac{1}{14} \Lambda_0 p^2 \tilde{w}_0 + \left( 3\Omega_0 + \frac{1}{7} \Lambda_0 p^2 \right) \tilde{w}_2 &= \frac{q_5^*}{2\pi}, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

де  $A = B_0 + \lambda_0^2 \Omega'_0$ ,  $A_0 = A + \frac{\nu-1}{2} B_0$ ,  $A_1 = D_0 + \frac{1}{3} \lambda_0^2 \Omega_0$ ,  $A_2 = A_1 + \frac{\nu-1}{2} D_0$ ,  $A_3 = \lambda_0 \Omega_0 + \frac{1}{14} \Lambda_0$ .

Система (3.5) розпадається на дві незалежні системи, перша з яких описує безмоментний пружний стан, а друга – стан згину. Розв'язки цих систем мають такий вигляд:

а) для безмоментного пружного стану

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_2^* \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2, a_0) + \right. \\ &+ q_2^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, a_0) - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_1^* (1+\nu) \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1) - \\ &\quad \left. - q_2^* (1+\nu) \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) \right], \\ \tilde{v} &= \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_2^* \frac{1}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1, a_0) + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, a_0) + \right. \\ &+ q_2^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_8(\xi_2, \xi_1, a_0) - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_0) - q_1^* (1+\nu) \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) + \\ &\quad \left. + q_2^* (1+\nu) \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) \right], \\ \tilde{w}_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_0) + q_2^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_0) + \right. \\ &\quad \left. + q_3^* \frac{1}{\Lambda'_0} \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, a_0) \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2, c) &= \frac{\xi_1^2}{p^4(p^2 + c^2)}, \quad \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, c) = \frac{\xi_1 \xi_2}{p^4(p^2 + c^2)}, \\ \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, c) &= \frac{i \xi_1}{p^2(p^2 + c^2)}, \quad \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, c) = \frac{1}{p^2 + c^2}; \quad a_0^2 = \frac{B_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0}; \end{aligned} \quad (3.7)$$

б) для стану згину

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 &= \frac{1}{2\pi D_0} \left[ m_1^* a_1^2 \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* a_1^2 \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_1) + \right. \\ &+ q_4^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_1^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a_1) + \\ &\quad \left. + q_4^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{12}(\xi_1, \xi_2) - m_1^* \frac{2}{\nu-1} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1, b_1) + m_2^* \frac{2}{\nu-1} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, b_1) \right], \\ \tilde{\gamma}_2 &= \frac{1}{2\pi D_0} \left[ m_1^* a_1^2 \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* a_1^2 \tilde{\Phi}_8(\xi_2, \xi_1, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_1) + \right. \\ &+ q_4^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_1) + m_1^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* \frac{D_0}{A_1} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1, a_1) + \\ &\quad \left. + q_4^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{12}(\xi_2, \xi_1) + m_1^* \frac{2}{\nu-1} \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2, b_1) - m_2^* \frac{2}{\nu-1} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2, b_1) \right], \\ \tilde{w}_0 &= \frac{1}{2\pi D_0} \left[ m_1^* \left( \frac{\lambda_0 a_1^2}{42} - \frac{D_0}{A_1} \right) \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* \left( \frac{\lambda_0 a_1^2}{42} - \frac{D_0}{A_1} \right) \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_1) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_1^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{12}(\xi_1, \xi_2) - m_2^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{12}(\xi_2, \xi_1) + q_4^* \frac{D_0}{\Lambda_0} \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, a_1) + \\
& + q_4^* \left( \frac{D_0}{A_1} + \frac{D_0 a_1^2}{\Lambda_0} - \frac{\lambda_0 a_1^2}{42} \right) \tilde{\Phi}_{13}(\xi_1, \xi_2) + q_4^* a_1^2 \tilde{\Phi}_{14}(\xi_1, \xi_2) + \\
& + q_5^* \frac{a_1^2}{42} \left( \frac{\lambda_0^2}{3} + \frac{D_0}{\Omega_0} \right) \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \tilde{\Phi}_{13}(\xi_1, \xi_2) \Big], \\
\tilde{w}_2 = & \frac{\lambda_0 a_1^2}{6\pi D_0} \left[ m_1^* \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2, a_1) + m_2^* \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1, a_1) - q_4^* \tilde{\Phi}_{13}(\xi_1, \xi_2) + \right. \\
& \left. + q_5^* \frac{A_1}{\lambda_0 \Omega_0} \tilde{\Phi}_{11}(\xi_1, \xi_2, a_1) \right], \tag{3.8}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_{12}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1}{p^4(p^2 + a_1^2)}, \quad \tilde{\Phi}_{13}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{p^2(p^2 + a_1^2)}, \\
\tilde{\Phi}_{14}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{p^4(p^2 + a_1^2)}; \quad a_1^2 = \frac{196D_0\Omega_0}{9A_1\Lambda_0}, \quad b_1^2 = \frac{2\Lambda_0}{D_0(1-\nu)}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Для знаходження оригіналів узагальнених переміщень застосуємо зворотнє перетворення Фур'є до виразів (3.6) – (3.9), отримаємо

а) безмоментний пружний стан

$$\begin{aligned}
u = & \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{1}{A} \Phi_2(x_1, x_2, a_0) + q_2^* \frac{1}{A} \Phi_5(x_1, x_2, a_0) + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_8(x_1, x_2, a_0) + \right. \\
& + q_2^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_9(x_1, x_2, a_0) - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_{10}(x_1, x_2, a_0) + q_1^* (1+\nu) \Phi_1(x_2, x_1) - \\
& \left. - q_2^* (1+\nu) \Phi_4(x_1, x_2) \right], \\
v = & \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{1}{A} \Phi_5(x_1, x_2, a_0) + q_2^* \frac{1}{A} \Phi_2(x_2, x_1, a_0) + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_9(x_1, x_2, a_0) + \right. \\
& + q_2^* \frac{\Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_8(x_2, x_1, a_0) - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_{10}(x_2, x_1, a_0) - q_1^* (1+\nu) \Phi_4(x_1, x_2) + \\
& \left. + q_2^* (1+\nu) \Phi_1(x_1, x_2) \right], \\
w_1 = & \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_{10}(x_1, x_2, a_0) + q_2^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A\Lambda'_0} \Phi_{10}(x_2, x_1, a_0) + \right. \\
& \left. + q_3^* \frac{1}{\Lambda'_0} \Phi_{11}(x_1, x_2, a_0) \right], \tag{3.10}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\Phi_8(x_1, x_2, c) = & -\frac{1}{2c^2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - \frac{1}{2c^2} G_{0,0} \left( c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) - \\
& - \frac{x_1^2 - x_2^2}{8} G_{2,0} \left( c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\Phi_9(x_1, x_2, c) = -\frac{x_1 x_2}{4} G_{2,0} \left( c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), \quad \Phi_{10}(x_1, x_2, c) = -\frac{x_1}{2} G_{1,0} \left( c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

$$\Phi_{11}(x_1, x_2, c) = G_{0,0} \left( c \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right);$$

б) стан згину

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \frac{1}{2\pi D_0} \left[ m_1^* a_1^2 \Phi_8(x_1, x_2, a_1) + m_2^* a_1^2 \Phi_9(x_1, x_2, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \Phi_{10}(x_1, x_2, a_1) + \right. \\ & + q_4^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_{10}(x_1, x_2, a_1) + m_1^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_2(x_1, x_2, a_1) + m_2^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_5(x_1, x_2, a_1) + \\ & \left. + q_4^* a_1^2 \Phi_{12}(x_1, x_2) - m_1^* \frac{2}{\nu-1} \Phi_2(x_2, x_1, b_1) + m_2^* \frac{2}{\nu-1} \Phi_5(x_1, x_2, b_1) \right], \\ \gamma_2 = & \frac{1}{2\pi D_0} \left[ m_1^* a_1^2 \Phi_9(x_1, x_2, a_1) + m_2^* a_1^2 \Phi_8(x_2, x_1, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \Phi_{10}(x_2, x_1, a_1) + \right. \\ & + q_4^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_{10}(x_2, x_1, a_1) + m_1^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_5(x_1, x_2, a_1) + m_2^* \frac{D_0}{A_1} \Phi_2(x_2, x_1, a_1) + \\ & \left. + q_4^* a_1^2 \Phi_{12}(x_2, x_1) + m_1^* \frac{2}{\nu-1} \Phi_5(x_1, x_2, b_1) - m_2^* \frac{2}{\nu-1} \Phi_2(x_1, x_2, b_1) \right], \\ w_0 = & \frac{1}{2\pi D_0} \left[ m_1^* \left( \frac{\lambda_0 a_1^2}{42} - \frac{D_0}{A_1} \right) \Phi_{10}(x_1, x_2, a_1) + m_2^* \left( \frac{\lambda_0 a_1^2}{42} - \frac{D_0}{A_1} \right) \Phi_{10}(x_2, x_1, a_1) - \right. \\ & - m_1^* a_1^2 \Phi_{12}(x_1, x_2) - m_2^* a_1^2 \Phi_{12}(x_2, x_1) + q_4^* \frac{D_0}{\Lambda_0} \Phi_{11}(x_1, x_2, a_1) + \\ & + q_4^* \left( \frac{D_0}{A_1} + \frac{D_0 a_1^2}{\Lambda_0} - \frac{\lambda_0 a_1^2}{42} \right) \Phi_{13}(x_1, x_2) + q_4^* a_1^2 \Phi_{14}(x_1, x_2) + \\ & \left. + q_5^* \frac{a_1^2}{42} \left( \frac{\lambda_0^2}{3} + \frac{D_0}{\Omega_0} \right) \Phi_{11}(x_1, x_2, a_1) - q_5^* \frac{\lambda_0 a_1^2}{3} \Phi_{13}(x_1, x_2) \right], \\ w_2 = & \frac{\lambda_0 a_1^2}{6\pi D_0} \left[ m_1^* \Phi_{10}(x_1, x_2, a_1) + m_2^* \Phi_{10}(x_2, x_1, a_1) - q_4^* \Phi_{13}(x_1, x_2) + \right. \\ & \left. + q_5^* \frac{A_1}{\lambda_0 \Omega_0} \Phi_{11}(x_1, x_2, a_1) \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

де

$$\Phi_{12}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{4a_1^2} \left[ 1 - 2 \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + 2G_{1,0} \left( a_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right],$$

$$\Phi_{13}(x_1, x_2) = -\frac{1}{a_1^2} \left[ \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + G_{0,0} \left( a_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right],$$



$$\Phi_{14}(x_1, x_2) = \frac{1}{a_1^4} \left[ \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} + \frac{a_1^2 (x_1^2 + x_2^2)}{4} \left( \ln \frac{\gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} - 1 \right) + G_{0,0} \left( a_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right].$$

#### 4 Аналіз отриманих результатів

Для дослідження поведінки узагальнених переміщень зафіксовано такі значення коефіцієнтів:  $m_1^* = m_2^* = q_1^* = q_2^* = q_3^* = q_4^* = q_5^* = 1$ .

Чисельні дослідження проведені для трансверсально-ізотропної пластини ( $E^* = 5$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,07$ ). Графіки демонструють поведінку узагальнених переміщень для таких значень параметра зсувної піддатливості  $E/G'$ : 2,6; 40; 80; 120. Крива 1 відповідає значенню 2,6, а криві 2, 3 і 4 – значенням 40, 80 і 120 відповідно. На всіх рисунках чорні криві відображають узагальнені переміщення, отримані із використанням теорії {1,0}-апроксимації, а сірі – із використанням теорії {1,2}-апроксимації.

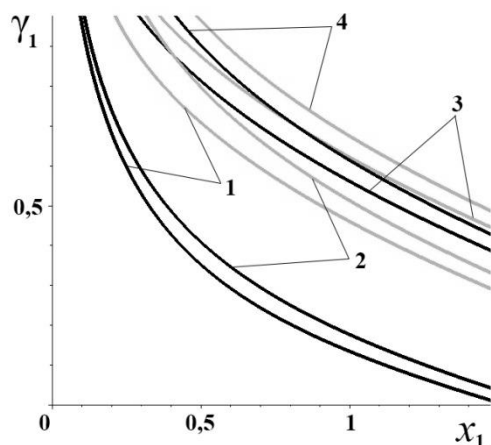


Рис.1. Узагальнене переміщення  $\gamma_1$

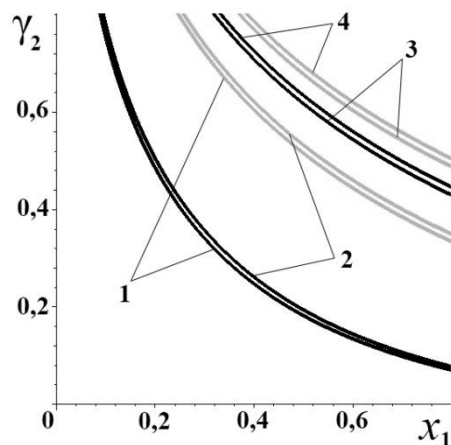


Рис.2. Узагальнене переміщення  $\gamma_2$

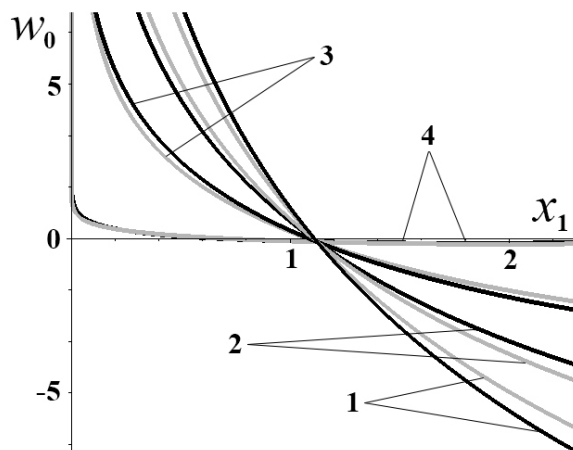


Рис.3. Узагальнене переміщення  $w_0$

Дані, представлені на рис. 1–3, свідчать про те, що узагальнені переміщення  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  та  $w_0$  при збільшенні значення параметра зсувної піддатливості  $E/G'$  зростають. Також графіки дозволили оцінити характер уточнення, внесеного утриманням більшої кількості членів рядів Фур'є за поліномами Лежандра. Значення узагальнених переміщень  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$ , отриманих із використанням теорії {1,2}-апроксимації, на 62 % більше ніж значення переміщень, отриманих

за допомогою рівнянь  $\{1,0\}$ -апроксимації, при значеннях параметра зсувної піддатливості  $E/G'$ , що дорівнюють 2,6; 40. Але при  $E/G' = 80$  і  $E/G' = 120$   $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  відрізняються незначно. Узагальнене переміщення  $w_0$ , отримане на базі  $\{1,0\}$ - та  $\{1,2\}$ -апроксимації, не має значної відмінності при всіх розглянутих значеннях параметра зсувної піддатливості  $E/G'$ .

## 5 Висновки

Розглянуто задачу про дію на трансверсально-ізотропну пластину зосередженого силового навантаження. Для розв'язання даної задачі використано теорію  $\{m,n\}$ -апроксимації, яка для отримання двовимірних рівнянь теорії пружності використовує метод розвинення функцій у ряди Фур'є за поліномами Лежандра, а також метод фундаментальних розв'язків.

Оригінали узагальнених переміщень знайдено за допомогою перетворення Фур'є та методики обертання спеціальної  $G$ -функції. Проаналізовано вплив пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу на узагальнені переміщення.

У перспективі можливо вивчати пружно-деформований стан пластин на базі узагальненої теорії  $\{m,n\}$ -апроксимації для випадків утримання більшої кількості членів розвинення шуканих функцій у напрямках, нормальних до площини ізотропії.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – К. : Наук. думка, 1982. – 296 с.
2. Smetankina N. V. A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment / N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, S. Yu. Sotrikhin, V. G. Yareschenko // J. of Applied Mechanics. – 2008. – P. 051004-1–051004-9.
3. Chen W. A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories / W. Chen, Z. Wu. // Recent patents on mechanical engineering. – 2008. – P. 29–44.
4. Максимчук О. В. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. / О. В. Максимчук, Р. М. Махніцький, Н. М. Щербина. – Львів : Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, 2005. – 352 с.
5. Ugrimov S. V. Layered orthotropic plates. Generalized theory / S. V. Ugrimov, A. N. Shupikov // Composite structures. – 2015. – P. 224–235.
6. Угримов С. В. Моделювання напружено-деформованого стану шаруватих ортотропних пластин на пружній основі / С. В. Угримов, Ю. М. Тормосов, В. А. Куценко, І. В. Лебединец // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2014. – Вып. 71, № 5/7. – С. 4–9.
7. Сметанкіна Н. В. Математичне моделювання процесу нестационарного деформування багат шарового оскління при розподілених та локалізованих силових навантаженнях / Н. В. Сметанкіна, О. М. Шупіков, С. В. Угримов. // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2016. – С. 408–413.
8. Bokov I. Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates / I. Bokov, N. Bondarenko, E. Strelnikova // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – 2/7 (86). – P. 4–12.
9. Боков И. П. Построение фундаментального решения уравнений статики  $\{1,2\}$ -аппроксимации безмоментного напряженного состояния для трансверсально-изотропных пластин / И. П. Боков, Н. С. Бондаренко, Е. А. Стрельникова // Scientific Journal «ScienceRise». – 2016. – № 7/2 (24). – С. 41–48.
10. Bokov I. P. Investigation of stress-strain state of transversely isotropic plates under bending using equation of statics  $\{1,2\}$ -approximation / I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, E. A. Strelnikova // Scientific Journal «EUREKA: Physics and Engineering». – 2016. – Vol. 5 (5). – P. 58–66.
11. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
12. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории тонких упругих оболочек: дис. доктора физ.-мат. наук: 01.02.04 / Шевченко Владимир Павлович. – Казань, 1982. – 332 с.

13. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955.– 668 с.
14. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебн. пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.

#### REFERENCES

1. B. L. Pelekh and V. A. Lazko, *Laminated anisotropic plates and shells with stress concentrators*. Kyiv, K.: Science thought, 1982.
2. N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, S. Yu. Sotrikhin, and V. G. Yareschenko, “A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment,” *J. of Applied Mechanics*, pp. 1-9, Jul. 2008.
3. W. Chen and Z. Wu, “A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories,” *Recent patents on mechanical engineering*, pp. 29-44, Aug. 2008.
4. O. V. Maksymchuk, R. M. Mazhitsky, and N. M. Shcherbyna, *Mathematical modeling and methods of calculation of thin-walled composite structures*. Lviv, L.: Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics them. Y. S. Pidstryhach, 2005.
5. S. V. Ugrimov and A. N. Shupikov, “Layered orthotropic plates. Generalized theory,” *Composite structures*, pp. 224-235, Oct. 2015.
6. S. V. Ugrimov, Yu. M. Tormosov, V. A. Kutsenko, and I. V. Lebedinets, “Modeling of the stress-strain state of layered orthotropic plates on an elastic basis,” *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 71, № 5/7, pp. 4-9, Jul. 2014.
7. N. V. Smetankina, O. M. Shupikov, and S. V. Ugrimov, “Mathematical modeling of the process of non-stationary deformation of multilayer oscillations in distributed and localized power loads,” *Bulletin of the Kherson National Technical University*, pp. 408-413, Sep. 2016.
8. I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, and E. A. Strelnikova, “Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates,” *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 2/7 (86), pp. 4-12, Apr. 2017.
9. I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, and E. A. Strelnikova, “Construction of the fundamental solution of statics equations {1,2} -approximation of the momentless stress state for transversally isotropic plates,” *Scientific Journal «ScienceRise»*, № 7/2 (24), pp. 41-48, Aug. 2016.
10. I. P. Bokov, N. S. Bondarenko, and E. A. Strelnikova, “Investigation of stress-strain state of transversely isotropic plates under bending using equation of statics {1,2}-approximation,” *Scientific Journal «EUREKA: Physics and Engineering»*, vol. 5 (5), pp. 58-66, Sep. 2016.
11. V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow, M.: Science, 1976.
12. V. P. Shevchenko, “Methods of Fundamental Solutions in the Theory of Thin Elastic Shells,” Phys.-Mat.D. dissertation, Mech. Deform. Sol., Kazan, 1982.
13. I. Sneddon, *Fourier Transformations*. Moscow, M.: Foreign Literature Publishing House, 1955.
14. V. K. Khizhnyak and V. P. Shevchenko, *Mixed problems in the theory of plates and shells: textbook. manual*. Donetsk, D.: DonSU, 1980.

**Боків Ігор Петрович** – аспірант; Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046; e-mail: [igr.bokov@gmail.com](mailto:igr.bokov@gmail.com); ORCID: 0000000291384120.

**Бондаренко Наталія Сергіївна** – кандидат фізико-математичних наук; e-mail: [bondarenko.natalya.sergeevna@gmail.com](mailto:bondarenko.natalya.sergeevna@gmail.com); ORCID: 0000000152545545.

**Стрельнікова Олена Олександрівна** – доктор технічних наук; Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046; e-mail: [estrel@ipmach.kharkov.ua](mailto:estrel@ipmach.kharkov.ua); ORCID: 0000000307077214.