УДК 517.988 : 519.633

Метод Роте та метод двобічних наближень у чисельному аналізі задач для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь

М.В. Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки, 14, м. Харків, 61166, Україна
e-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Розглядається квазілінійне рівняння теплопровідності з першими та другими крайовими умовами. Для його чисельного аналізу пропонується використати модифікований метод Роте у комбінації з методом двобічних наближень. Для побудови двобічних наближень до додатного розв'язку задачі на кожному часовому шарі використовуються методи теорії напівупорядкованих просторів, зокрема, результати В.І. Опойцева про розв'язність операторних рівнянь з гетеротонним оператором. Робота і ефективність розробленого метода продемонстрована обчислювальним експериментом для задачі зі степеневою нелінійністю.

Ключові слова: *квазілінійне рівняння теплопровідності, додатний розв'язок, метод Роте, гетеротонний оператор, двобічні наближення.*

Рассматривается квазилинейное уравнение теплопроводности с первыми и вторыми краевыми условиями. Для его численного анализа предлагается использовать модифицированный метод Роте в комбинации с методом двусторонних приближений. Для построения двусторонних приближений к положительному решению задачи на каждом временном слое используются методы теории полуупорядоченных пространств, в частности, результаты В.И. Опойцева о разрешимости операторных уравнений с гетеротонным оператором. Работа и эффективность разработанного метода продемонстрирована вычислительным экспериментом для задачи со степенной нелинейностью.

Ключевые слова: *квазилинейное уравнение теплопроводности, положительное решение, метод Роте, гетеротонный оператор, двусторонние приближения.*

In this paper, we consider the first and the second initial-boundary problem for the one-dimensional semi-linear heat equation. Problems of this type (searching for a positive solution) often arise in the mathematical modeling of processes in chemical kinetics, combustion theory, biology, and others. Based on the modified Rothe method, the original non-stationary problem is replaced at each time layer by a nonlinear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Then, for finding a positive solution of this nonlinear boundary value problem, a method of successive approximations with a two-sided character of convergence is constructed. To construct two-sided approximations to the positive solution of the problem, methods of the theory of semi-ordered spaces are used on each time layer, in particular, the results of V.I. Opoĭcev on the solvability of operator equations with a heterotone operator are used. Using the Green's functions method of nonlinear boundary value problems for an ordinary differential equation, a transition to an equivalent Hammerstein integral equation, which is investigated as a nonlinear operator equation with a heterotone operator in the space of continuous functions that is semi-ordered by a cone of non-negative functions, is considered. Afterwards a strongly invariant cone segment and two iterative sequences, which start from the corresponding ends of a strongly invariant cone segment, are constructed. The first of these sequences monotonically increases and approximates the desired solution from below; the second one monotonically decreases and approximates the desired solution from above. The conditions for the existence of a common limit of these sequences are given, that is, the conditions for uniqueness of the solution of nonlinear boundary value problems of the Rothe method on each time layer. A posteriori estimation of the error of the approximate solution of the problem was obtained. The computational experiment for the heterotone power nonlinearity problem has been carried out.

Keywords: *quasi-linear heat equation, positive solution, Rothe method, heterotone operator, two-sided approach.*

1. Постановка задачі

Задачі математичного моделювання різноманітних фізико-хімічних явищ та процесів призводять до необхідності розв'язання початкових або початково-крайових задач для нелінійного рівняння вигляду

$$\rho(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k(u)\operatorname{grad}u)+f(\mathbf{x},t,u),\ \mathbf{x}\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^m,\ t>0. \qquad (1)$$

Наприклад, якщо рівняння (1) описує нелінійні процеси теплопровідності, то $u(\mathbf{x},t)$ – температура в точці $\mathbf{x}$ у момент часу t, ρ – щільність, c – питома тепломісткість, k – коефіцієнт теплопровідності середовища, $f(\mathbf{x},t,u)$ – функція потужності внутрішніх теплових джерел.

Дослідженню різних задач для рівняння вигляду (1) присвячено багато праць, зокрема, роботи [1 – 6]. Серед чисельних методів дослідження задач для рівняння (1) можна виділити скінченно-різницеві методи (метод сіток) та напівдискретні методи (метод прямих, або метод

Роте) [7 – 9].

Розглянемо одновимірне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t,u)\,,\ x\in(0,l)\,,\ t>0 \tag{2}$$

з початковою умовою

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \tag{3}$$

і одними з двох типів крайових умов

$$u\big|_{x=0}=0\,,\ u\big|_{x=l}=0 \tag{4}$$

або

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0\,. \tag{5}$$

Рівняння (2) є частинним випадком рівняння (1) для випадку, коли нелінійність рівняння обумовлена лише функцією потужності внутрішніх джерел. За формою рівняння (2) є рівнянням типу Колмогорова-Петровського-Піскунова і зустрічається у задачах моделювання хвильових процесів у біології, теорії горіння, хімічній кінетиці тощо [6, 7, 10].

Вважатимемо, що функція $f(x,t,u)$ у (2) невід’ємна та неперервна за сукупністю змінних x, t, u, якщо $x\in(0,l)$, $t>0$, $u>0$, функція $\varphi(x)$ у (3) невід’ємна та неперервна за змінною x, якщо $x\in(0,l)$, і ставиться задача відшукання додатного при $x\in(0,l)$, $t>0$ розв’язку $u(x,t)$ відповідної задачі. У випадку крайових умов (4) вважатимемо, що $\varphi(0)=\varphi(l)=0$,а для крайових умов (5) вважатимемо, що $\varphi'(0)=\varphi'(l)=0$.

Метою даної роботи є розробка для розв’язання початково-крайових задач (2) – (4) та (2), (3), (5) нових чисельних методів, які є модифікацією метода Роте і на кожному часовому шарі є ітераційними з двобічним характером збіжності до шуканого розв’язку. Двобічні наближені методи розв’язання нелінійних операторних рівнянь, засновані на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, розроблялись у роботах [11 – 15]. Побудова двобічних наближень до розв’язків задач для нестаціонарних рівнянь не розглядалася. Отже, тема роботи є актуальною.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [11, 15], і розповсюджує їх на нестаціонарні рівняння.

2. Побудова дискретизації задачі модифікованим методом Роте

Задачі (2) – (4) та (2), (3), (5) розглядатимемо при $t\in[0,T]$. На відрізку $[0,T]$ введемо сітку з кроком τ, яка складається з точок $t_j=j\tau$, $j=0,1,2,...,M$, $M\tau=T$, і позначимо

$$u_j=u_j(x)=u(x,t_j)\,,\ j=0,1,2,...,M\,.$$

Відповідно до методу прямих (методу Роте) в рівнянні (2) диференціальний оператор $\frac{\partial u}{\partial t}$ апроксимується відношенням скінченних різниць і розв’язок задачі шукається вздовж прямих $t=\text{const}$.

Рівняння (2) з похибкою $O(\tau)$ замінимо на прямій $t=t_j$, $j=1,2,...,M$, звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{u_j-u_{j-1}}{\tau}=a^2\frac{d^2u_j}{dx^2}+f(x,t_j,u_j)\,. \tag{6}$$

Зауважимо, що на відміну від оригінального методу Роте [9] у модифікованій схемі (6) нелінійність апроксимується на поточному, а не на попередньому часову шарі.

На нульовому часовому шарі відповідно початковій умові (3) покладемо

$$u_0(x)=\varphi(x)\,. \tag{7}$$

Рівняння (6) розглядаються при $x\in(0,l)$. Використовуючи крайові умови (4) або (5) вихідної задачі поставимо для кожного з рівнянь (6) першу або другу крайову задачу відповідно, доповнивши крайовими умовами

$$u_j(0)=0\,,\ u_j(l)=0\,,$$

або

$$u'_j(0)=0\,,\ u'_j(l)=0\,,$$

Тоді розв'язання початково-крайових задач (2) – (4) та (2), (3), (5) зводиться до розв'язання послідовності нелінійних крайових задач

$$-\frac{d^2u_j}{dx^2}+\frac{1}{a^2\tau}u_j=\frac{1}{a^2\tau}u_{j-1}+\frac{1}{a^2}f(x,t_j,u_j)\,,\ x\in(0,l)\,, \tag{8}$$

$$u_j(0)=0\,,\ u_j(l)=0\,, \tag{9}$$

або

$$u'_j(0)=0\,,\ u'_j(l)=0\,. \tag{10}$$

Збіжність метода Роте при $\tau\to 0$ доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (2) [4, 9].

3. Побудова двобічних наближень для функцій $u_j(x)$

Для аналізу задач (8), (9) і (8), (10) та побудови двобічних наближень до їх додатних розв'язків використаємо методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [12, 14].

Нехай $C[0,l]$ – банахів простір неперервних на $[0,l]$ функцій з нормою $\|u\|=\max\limits_{x\in[0,\,l]}|u(x)|$.

Виділимо у $C[0,l]$ конус

$$\mathrm{K}_+=\{u\in C[0,l]: u(x)\ge 0,\ x\in[0,l]\}$$

невід'ємних функцій. Конус K_+ у $C[0,l]$ є нормальним (і навіть гострим) [12, 14].

За допомогою конуса K_+ у просторі $C[0,l]$ введемо напівупорядкованість за правилом: для $u,v\in C[0,l]$ $u\le v$, якщо $v-u\in \mathrm{K}_+$, тобто

$$u\le v\text{, якщо } u(x)\le v(x) \text{ для всіх } x\in[0,l]\,.$$

Від задач (8), (9) і (8), (10) перейдемо до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна

$$u_j(x)=\int_0^l G(x,s)\left[\frac{1}{a^2\tau}u_{j-1}(s)+\frac{1}{a^2}f(s,t_j,u_j(s))\right]ds\,,$$

або

$$u_j(x)=\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)f(s,t_j,u_j(s))ds \tag{11}$$

де $\varphi_j(x)=\dfrac{1}{a^2\tau}\displaystyle\int_0^l G(x,s)u_{j-1}(s)ds$, $G(x,s)$ – функція Гріна відповідної крайової задачі для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{1}{a^2\tau}$ на відрізку $[0,l]$. Зауважимо, що $\varphi_j(x)\ge 0$, якщо $x\in[0,l]$, оскільки $u_{j-1}(x)\ge 0$, якщо $x\in[0,l]$.

Для перших крайових умов (9) функція Гріна має вигляд

$$G(x,s)=\begin{cases} a\sqrt{\tau}\,\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{x}{a\sqrt{\tau}}\operatorname{sh}\dfrac{l-s}{a\sqrt{\tau}}}{\operatorname{sh}\dfrac{l}{a\sqrt{\tau}}}, & 0\le x\le s,\\[3ex] a\sqrt{\tau}\,\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{s}{a\sqrt{\tau}}\operatorname{sh}\dfrac{l-x}{a\sqrt{\tau}}}{\operatorname{sh}\dfrac{l}{a\sqrt{\tau}}}, & s<x\le l,\end{cases} \tag{12}$$

а для других крайових умов (10) – вигляд

$$G(x,\, s) = \begin{cases} a\sqrt{\tau}\dfrac{\mathrm{ch}\dfrac{x}{a\sqrt{\tau}}\,\mathrm{ch}\dfrac{l-s}{a\sqrt{\tau}}}{\mathrm{sh}\dfrac{l}{a\sqrt{\tau}}}, & 0 \le x \le s, \\ a\sqrt{\tau}\dfrac{\mathrm{ch}\dfrac{s}{a\sqrt{\tau}}\,\mathrm{ch}\dfrac{l-x}{a\sqrt{\tau}}}{\mathrm{sh}\dfrac{l}{a\sqrt{\tau}}}, & s < x \le l. \end{cases} \tag{13}$$

Розв'язком (узагальненим) задачі (8), (9) чи (8), (10) називатимемо функцію $u_j^* \in C[0,\, l]$, яка є неперервним додатним розв'язком інтегрального рівняння (11).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T, який діє у $C[0,\, l]$ за правилом, що визначається правою частиною рівняння (11):

$$T(u) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,\, s)\, f(s,\, t_j,\, u(s))ds\,. \tag{14}$$

Оскільки $f(x,\, t,\, u) \ge 0$, якщо $x \in (0,\, l)$, $t > 0$, $u > 0$, $\varphi_j(x) \ge 0$, якщо $x \in [0,\, l]$, та $G(x,\, s) \ge 0$, $x,\, s \in [0,\, l]$, то оператор T є додатним, тобто залишає інваріантним конус K_+ : $T(\mathrm{K}_+) \subset \mathrm{K}_+$.

Припустимо, що функція $f(x,t,u)$ дозволяє діагональне подання $f(x,\, t,\, u) = \hat{f}(x,\, t,\, u,\, u)$, де неперервна за сукупністю змінних x, t, v, w функція $\hat{f}(x,\, t,\, v,\, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in [0,\, l]$. Тоді оператор T вигляду (14) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w) = \varphi_j(x) + \frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,\, s)\, \hat{f}(s,\, t_j,\, v(s),\, w(s))ds\,. \tag{15}$$

Оператори T і $\hat{T}$, очевидно, є цілком неперервними.

Позначимо $u_0(x) = \int_0^l G(x,s)ds$. Для перших крайових умов (9)

$$u_0(x) = \frac{2a^2\tau}{\mathrm{ch}\dfrac{l}{2a\sqrt{\tau}}}\,\mathrm{sh}\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\,\mathrm{sh}\frac{l-x}{2a\sqrt{\tau}}\,,$$

а для других крайових умов (10)

$$u_0(x) = a^2\tau\,.$$

Оскільки кожна з функцій Гріна (13), (14) задовольняє нерівності

$$u_0(x)\psi_1(s) \le G(x,s) \le u_0(x)\psi_2(s)\,,$$

де невід'ємні функції $\psi_1,\, \psi_2 \in C[0,\, l]$ відмінні від тотожного нуля, то

$$\gamma_1 u_0 \le T(u) \le \gamma_2 u_0\,,$$

де

$$\gamma_1 = \int_0^l \psi_1(s)\left[\frac{1}{a^2\tau}u_{j-1}(s) + \frac{1}{a^2}\, f(s,\, t_j,\, u(s))\right]ds\,,$$

$$\gamma_2 = \int_0^l \psi_2(s)\left[\frac{1}{a^2\tau}u_{j-1}(s) + \frac{1}{a^2}\, f(s,\, t_j,\, u(s))\right]ds\,,$$

а отже, оператор (14) є u_0-додатним.

У конусі K_+ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0,\, w_0 >$ умовами

$$\hat{T}(v_0,\, w_0) \ge v_0\,,\ \hat{T}(w_0,\, v_0) \le w_0\,,$$

тобто

$$\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)\hat{f}(s,t_j,v_0(s),w_0(s))ds \ge v_0(x) \text{ для всіх } x\in[0,l],$$

$$\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)\hat{f}(s,t_j,w_0(s),v_0(s))ds \le w_0(x) \text{ для всіх } x\in[0,l].$$

З огляду на u_0 -додатність оператора T кінці сильно інваріантного конусного відрізка можна шукати у вигляді $<v_0, w_0>=<\alpha u_0(x), \beta u_0(x)>$, $0\le\alpha<\beta$. Тоді для визначення α і β ми отримуємо систему нерівностей

$$\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)\hat{f}(s,t_j,\alpha u_0(s),\beta u_0(s))ds \ge \alpha u_0(x) \text{ для всіх } x\in[0,l], \quad (16)$$

$$\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)\hat{f}(s,t_j,\beta u_0(s),\alpha u_0(s))ds \le \beta u_0(x) \text{ для всіх } x\in[0,l]. \quad (17)$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)}=\hat{T}(v^{(k)},w^{(k)}),\quad w^{(k+1)}=\hat{T}(w^{(k)},v^{(k)}),\ k=0,1,2,\dots,$$
$$v^{(0)}=v_0,\ w^{(0)}=w_0,$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x)=\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)\hat{f}(s,t_j,v^{(k)}(s),w^{(k)}(s))ds, \quad (18)$$

$$w^{(k+1)}(x)=\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)\hat{f}(s,t_j,w^{(k)}(s),v^{(k)}(s))ds, \quad (19)$$

$$v^{(0)}(x)=v_0(x), \quad (20)$$

$$w^{(0)}(x)=w_0(x). \quad (21)$$

Оскільки конусний відрізок $<v_0, w_0>$ є сильно інваріантним, оператор T, для якого оператор $\hat{T}$ супровідний, є гетеротонним, то послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом K_+, а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом K_+. Крім того, з нормальності конуса K_+ і повної неперервності оператора $\hat{T}$ випливає існування границь $v^*(x)$ і $w^*(x)$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v_0=v^{(0)}\le v^{(1)}\le\dots\le v^{(k)}\le\dots\le v^*\le w^*\le\dots\le w^{(k)}\le\dots\le w^{(1)}\le w^{(0)}=w_0.$$

Функції v^* і w^* є розв'язком системи рівнянь $v^*=\hat{T}(v^*,w^*)$, $w^*=\hat{T}(w^*,v^*)$, тобто системи

$$v^*(x)=\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)\hat{f}(s,t_j,v^*(s),w^*(s))ds,$$

$$w^*(x)=\varphi_j(x)+\frac{1}{a^2}\int_0^l G(x,s)\hat{f}(s,t_j,w^*(s),v^*(s))ds.$$

Якщо ж отримали, що $v^*=w^*=u_j^*$, то u_j^* – єдина на конусному відрізку $<v_0, w_0>$ нерухома точка оператора T, а отже, u_j^* – єдиний на $<v_0, w_0>$ розв'язок відповідної крайової задачі.

Умовою, яка забезпечить єдиність додатного розв'язку є u_0 -псевдоувігнутість оператора T вигляду (14) [14], яка матиме місце, якщо для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\sigma\in(0,1)$

$$\hat{f}\left(x,t,\sigma v,\frac{1}{\sigma}w\right)>\sigma\hat{f}(x,t,v,w),\ x\in(0,L). \quad (22)$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема. Нехай система нерівностей (16), (17) має розв'язок (α, β) такий, що $0 \le \alpha < \beta$, і виконується умова (22). Тоді ітераційний процес (18) – (21) на кожному часовому шарі дискретизації метода прямих збігається до єдиного неперервного додатного розв'язку $u_j^* \in < \alpha u_0, \beta u_0 >$ крайової задачі (8), (9) чи (8), (10), причому мають місце нерівності

$$v_0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \ldots \le v^{(k)} \le \ldots \le u_j^* \le \ldots \le w^{(k)} \le \ldots \le w^{(1)} \le w^{(0)} = w_0 .$$

За наближений розв'язок вихідної нестаціонарної задачі на j-му часовому шарі на k-й ітерації приймаємо функцію

$$u_j^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2} . \tag{23}$$

Зауважимо, що перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній k-й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (23):

$$\max_{x \in [0,\, L]} \left| u_j^*(x) - u_j^{(k)}(x) \right| \le \frac{1}{2} \max_{x \in [0,\, L]} \left| w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x) \right| .$$

Тоді для заданої точності $\varepsilon > 0$ ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності $\max\limits_{x \in [0,\, L]} \left| w^{(k_j)}(x) - v^{(k_j)}(x) \right| < 2\varepsilon$ і з точністю ε можна вважати, що $u^*(x, t_j) = u_j^*(x) \approx u_j^{(k_j)}(x)$.

Отже, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$u_0(x) = \varphi(x) ,\ u_1^{(k_1)}(x) ,\ u_2^{(k_2)}(x) ,\ \ldots,\ u_M^{(k_M)}(x) . \tag{24}$$

Далі за набором функцій (24) можна, використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [16], побудувати наближений розв'язок задач (2) – (4) та (2), (3), (5) у вигляді функції $u_M(x, t)$, визначеної при всіх $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$. Цей наближений розв'язок має точність $O(\tau)$. Якщо зробити розрахунки з кроком $\frac{\tau}{2}$, то отримаємо наближений розв'язок $u_{2M}(x, t)$, який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку $O(\tau^2)$ за формулою

$$u(x, t) = 2u_{2M}(x, t) - u_M(x, t) . \tag{25}$$

3. Результати обчислювального експерименту

Для проведення обчислювального експерименту було обрано $a = 1$, $l = 1$, $f(x, t, u) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}$, $\varphi(x) = x(l - x)$ для перших крайових умов і $\varphi(x) = 1 + \cos\frac{\pi x}{l}$ для других крайових умов.

Для заданої функції $f(x, t, u)$ функцію $\hat{f}(x, t, v, w)$ оберемо у вигляді $\hat{f}(x, t, v, w) = \sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{w}}$. Нерівність (22) для неї набуває вигляду $\sqrt{\sigma v} + \sqrt{\frac{\sigma}{w}} > \sigma\left(\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right)$ і, очевидно, виконується для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\sigma \in (0, 1)$.

Отже, відповідні нелінійні крайові задачі методу прямих матимуть єдиний додатний розв'язок на кожному часовому шарі, який можна буде апроксимувати двобічними ітераціями.

Оберемо крок за часом $\tau = 0{,}1$. Для перших крайових умов нерівності (16), (17) виконуватимуться при $\alpha = 3{,}55$, $\beta = 6{,}47$. Ітераційний процес за формулами (18) – (21) збігся з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за шість ітерацій. На рис. 1 наведено графіки збіжності двобічних наближень для першого часового шару при $\tau = 0{,}1$. Аналіз оцінок похибки $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max\limits_{x \in [0,\, L]} \left| w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x) \right|$ наближеного розв'язку (23) на k-й ітерації, $k = 0, 1, \ldots, 6$, показав, що $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx q = 0{,}29$, а отже, послідовність $\{u^{(k)}(x)\}$ збігається у нормі $C[0; 1]$ до точного розв'язку крайової задачі модифікованого методу Роте (для першого часового шару) зі швидкістю геометричної прогресії з показником q. Зробимо тепер з початкового моменту часу два кроки з $\tau = 0{,}05$. Значення наближень до $u(x,\ 0{,}1)$, отримані обома способами (з кроком $\tau = 0{,}1$ і кроком $\tau = 0{,}05$), а також уточнені за формулою (25) значення на сітці з кроком 0,1 наведено у табл. 1.

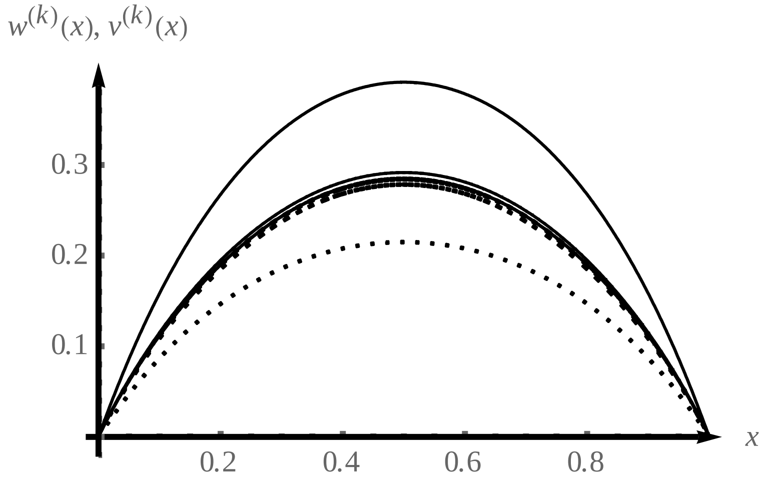

Рис. 1. Графіки верхніх та нижніх наближень для першого часового шару у випадку перших крайових умов

Таблиця 1. Значення наближень до $u(x,\ 0{,}1)$ *на сітці з кроком 0,1*

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\tau = 0{,}1$	0	0,1118	0,1897	0,2430	0,2743	0,2847	0,2743	0,2430	0,1897	0,1118	0
$\tau = 0{,}05$	0	0,1137	0,1930	0,2471	0,2787	0,2891	0,2787	0,2471	0,1930	0,1137	0
Уточненні значення	0	0,1157	0,1964	0,2511	0,2830	0,2935	0,2830	0,2511	0,1964	0,1157	0

Оберемо крок за часом $\tau = 0{,}1$. Для других крайових умов нерівності (16), (17) виконуватимуться при $\alpha = 6{,}53$, $\beta = 17{,}60$. Ітераційний процес за формулами (18) – (21) збігся з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за чотири ітерацій. На рис. 2 наведено графіки збіжності двобічних наближень для першого часового шару при $\tau = 0{,}1$. Аналіз оцінок похибки $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max\limits_{x \in [0,\ L]} \left| w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x) \right|$ наближеного розв'язку (23) на k-й ітерації, $k = 0, 1, \ldots, 6$, показав, що $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \approx q = 0{,}11$, а отже, послідовність $\{u^{(k)}(x)\}$ збігається у нормі $C[0;1]$ до точного розв'язку крайової задачі модифікованого методу Роте (для першого часового шару) зі швидкістю геометричної прогресії з показником q. Зробимо тепер з початкового моменту часу два кроки з $\tau = 0{,}05$. Значення наближень до $u(x,\ 0{,}1)$, отримані обома способами (з кроком $\tau = 0{,}1$ і кроком $\tau = 0{,}05$), а також уточнені за формулою (25) значення на сітці з кроком 0,1 наведено у табл. 2.

4. Висновки

В роботі вперше запропоновано комбінація модифікованого метода Роте і метода двобічних наближень для знаходження наближеного розв'язку початково-крайових задач для одновимірного квазілінійного рівняння теплопровідності. Обчислювальний експеримент, проведений для задачі зі степеневою нелінійністю, продемонстрував можливості та ефективність метода. Запропонований підхід може бути використаний при розв'язанні різних прикладних задач, математичними моделями яких є розглянуті початково-крайові задачі, і може бути розповсюджений на багатовимірний випадок. Цим визначається наукова новизна та практична значимість отриманих у роботі результатів.

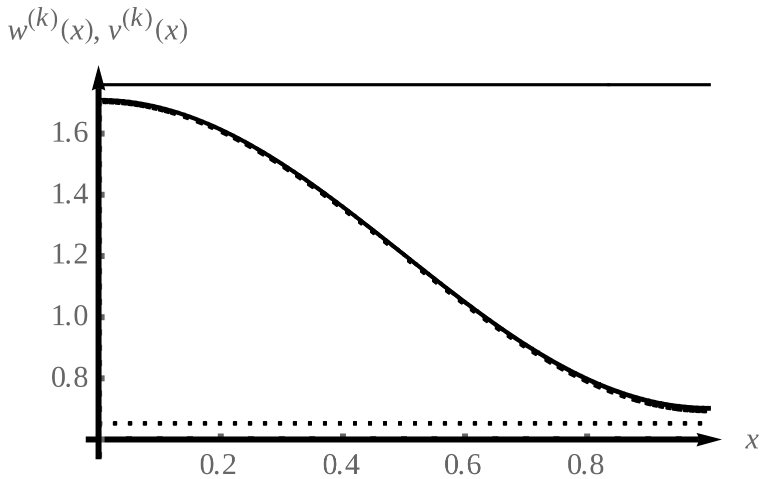

Рис. 2. Графіки верхніх та нижніх наближень для першого часового шару у випадку других крайових умов

Таблиця 2. Значення наближень до $u(x,\,0{,}1)$ *на сітці з кроком 0,1*

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\tau = 0{,}1$	1,7079	1,6831	1,6113	1,4994	1,3585	1,2025	1,0466	0,9062	0,7949	0,7235	0,6989
$\tau = 0{,}05$	1,6534	1,6313	1,5673	1,4677	1,3424	1,2036	1,0650	0,9402	0,8414	0,7781	0,7563
Уточненні значення	1,5989	1,5795	1,5234	1,4361	1,3262	1,2046	1,0834	0,9743	0,8880	0,8327	0,8137

ЛІТЕРАТУРА

1. Голайдо С.И., Мартинсон Л.К., Павлов К.Б., Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 13, № 5. – 1973. – С. 1351–1356.
2. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1966. – 686 с.
3. Калашников А.С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 14, № 4. – 1974. – С. 891–905.
4. Ладыженская О.А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений. – Тр. ММО, т. 7. – 1958. – С. 149–177.
5. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
6. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский, В.А. Галактионов, СП. Курдюмов, А.П. Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 478 с.
7. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – 2-е изд. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
9. Rothe E. Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben // Mathematische Annalen. – 1930. – Vol. 102. – № 1. – P. 650-670.
10. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Интеллект, 2008. – 408 с.
11. Колосова С.В., Луханин В.С., Сидоров М.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 107 – 120.
12. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
13. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. – К.: Наук. думка, 1980. – 268 с.

14. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
15. Сидоров М.В. Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – № 2. – С. 250 – 259.
16. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

REFERENCIES

1. S. I. Golaido, L. K. Martinson and K. B. Pavlov, "Non-stationary problems of non-linear heat conduction with volume heat absorption", *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, vol. 13, no. 5, pp. 1351–1356, 1973 (in Russian).
2. Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, 2nd ed. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
3. A. S. Kalashnikov, "The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption", *Journal of Computational Mathematics Mathematical Physics*, vol. 14, no. 4, pp. 891–905, 1974 (in Russian).
4. O. A. Ladyženskaya, "Solution of the first boundary problem in the large for quasilinear parabolic equations", *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshestva*, no. 7, pp. 149–177, 1958 (in Russian).
5. V. P. Maslov, V. G. Danilov and K. A. Volosov, *Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes. Evolution of Dissipative Structures*. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
6. A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov and A. P. Mikhailov, *Regimes with Peaking in Problems for Quasilinear Parabolic Equations*. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
7. L. K. Martinson and Yu. I. Malov, *Differential equations of mathematical physics*, 2nd ed. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2002 (in Russian).
8. A. A. Samarskii and A. V. Gulin, *Numerical Methods of Mathematical Physics*, 2nd ed. Moscow, Russian Federation: Nauchnyj mir, 2003 (in Russian).
9. E. Rothe, "Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben", *Mathematische Annalen*, vol. 102, no. 1, pp. 650-670, 1930 (in German).
10. D. A. Frank-Kamenetskii, *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. Moscow, Russian Federation: Intellekt, 2008 (in Russian).
11. S. V. Kolosova, V. S. Lukhanin and M. V. Sidorov, "On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation", *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, no. 3, pp. 107 – 120, 2015 (in Russian).
12. M. A. Krasnosel'skij, *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz, 1962 (in Russian).
13. N.S. Kurpel' and B.A. Shuvar, *Two-sided Operator Inequalities and their Application*. Kiev: Naukova Dumka, 1980 (in Russian).
14. V.I. Opojtsev and T.A. Khurodze, *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*, Tbilisi, USSR: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, 1984 (in Russian).
15. M. V. Sidorov, "Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green's functions and the quasi-functions of Green-Rvachev", *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences*, no. 2, pp. 250 – 259, 2017 (in Ukrainian).
16. O. M. Lytvyn, *Interlineation of Functions and some its Applications*. Kharkiv, Ukraine: Osnova, 2002 (in Ukrainian).

Сидоров Максим Вікторович *– кандидат фізико-математичних наук, доцент; Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків-166, пр. Науки, 14, 61166; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua; ORCID: 0000-0001-8022-866X.*

Надійшла – 04.04.2018.