

УДК 539.3

## Плоска термопружна деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами

Н.М. Антоненко

*Запорізький національний технічний університет, вул. Жуковського 64, м. Запоріжжя, 69063, Україна  
e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com*

Розв'язано плоску стаціонарну задачу термопружності для багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. Для розв'язання задачі використано одномірне інтегральне перетворення Фур'є та метод функцій податливості. У матричній формі побудовано рекурентні співвідношення для функцій податливості плити, які враховують вплив температури та наявність пружних зв'язків між шарами. Для двошарової плити, що знаходиться під дією теплових навантажень, проаналізовано вплив коефіцієнтів пружних зв'язків, коефіцієнтів теплового розширення та теплопровідності шарів на розподіл нормальних та дотичних напружень на стику шарів двошарової плити.

**Ключові слова:** багатошарова плита, пружні зв'язки, інтегральне перетворення Фур'є, функція податливості, напруження, температура.

The method of the solution of the stationary plane thermoelastic problem of a multilayer plate with elastic links between its layers is proposed. It is assumed that tangential (normal) elastic links between two neighboring layers exist if the difference between the horizontal (vertical) displacements of points of the upper boundary of the lower layer and of the corresponding points of the lower boundary of the upper layer are proportional to the tangential (normal) stresses on their boundary. It is assumed that the conditions of perfect thermal contact are satisfied on their common boundaries. The technique is based on a compliance functions method and a Fourier transformation method. The Fourier transforms of displacements, stresses, and functions used to describe temperature and flow at the points of a layer can be represented in the form of linear combinations of the auxiliary functions. The auxiliary functions are connected with the Fourier transforms of displacements, stresses, and functions used to describe temperature and flow at the points of the upper boundary of the corresponding layer. For considered problem six auxiliary functions can be found from boundary conditions. Using the conditions on the common boundaries of the layers and the boundary conditions the recurrent formulas for finding other auxiliary functions are constructed. We've proved that the auxiliary functions are dependent. This dependence can be represented in the matrix form using so-called compliance functions. We've constructed the recurrence relations for the compliance functions of the thermoelastic plate. The algorithm for solving the problem is formulated. For a two-layer plate subjected to the action of thermal load the influence of the coefficients of elastic links, the coefficients of thermal expansion and the coefficients of thermal conductivity on the distribution of the normal stresses and the tangential stresses on its common boundary is investigated. The proposed method allows analyzing the influence of the mechanical and temperature characteristics of the layers on the distribution of stresses and displacements in the layers of the plate with any finite number of the layers.

**Keywords:** multilayer plate, elastic links, Fourier transformation, compliance function, stress, temperature.

### 1 Вступ

Багато інженерних об'єктів знаходяться в умовах значних силових та теплових навантажень, тому при розрахунках на міцність їх елементів варто враховувати дію обох вище зазначених типів навантажень. Дослідженню напружено-деформованого стану багатошарових основ, плит, пластин, з урахуванням дії теплових навантажень, присвячена значна кількість робіт вітчизняних та зарубіжних учених [1–10]. У вказаних статтях автори вважають, що контакт між шарами ідеальний, це не завжди відповідає реальній фізичній картині, оскільки між ними може бути присутній деякий проміжний шар. Моделювати його наявність можна, наприклад, за допомогою пружних зв'язків, методом запропонованим у [11]. У праці [12] асимптотичним методом знайдено розв'язок плоскої задачі термопружності для тришарової смуги скінченої довжини при різних типах контакту між смугами. Цим же методом розв'язано задачі теплопровідності та термопружності для двошарової пластини у [13]. В рамках моделі [11] розв'язано задачі про дію нестационарного навантаження на двошарову циліндричну оболонку [14] та двошарову пластину кінцевих розмірів [15]. У [16] та [17] метод функцій податливості розповсюджено на задачу про плоску деформацію багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами без урахування дії теплових навантажень та задачу про плоску термопружну деформацію багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами, яка пружно зчеплена з абсолютно жорсткою півплощиною.

У даній статті, з використанням одномірного інтегрального перетворення Фур'є та модифікації методу функцій податливості, пропонується спосіб розв'язання плоскої задачі термопружності для багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. Вважатимемо, що між двома сусідніми шарами є дотичні (нормальні) пружні зв'язки, якщо різниці горизонтальних

(вертикальних) переміщень точок верхньої межі нижнього шару та відповідних точок нижньої межі верхнього шару пропорційні дотичним (нормальним) напруженням на їх спільній межі.

## 2 Постановка задачі

Розглянемо багатошарову плиту, яка знаходиться в умовах плоскої термопружної деформації. Пливу моделюватимемо пакетом, який складається з  $n$  пружних невагомих шарів. Кожен шар характеризуватимемо товщиною  $h_k$  та двома пружними характеристиками  $\mu_k$ ,  $\lambda_k$  (коефіцієнти Ламе), коефіцієнтом теплопровідності  $k_{Tk}$  та приведеним коефіцієнтом теплового розширення

$$\alpha_{Tk} = \frac{\tilde{\alpha}_{Tk}(3\lambda_k + 2\mu_k)}{\lambda_k + 2\mu_k}, \text{ де } \tilde{\alpha}_{Tk} - \text{коефіцієнт теплового розширення матеріалу, } k = \overline{1, n}. \text{ Між}$$

шарами плити є пружні зв'язки. Вважатимемо, що на спільних межах шарів виконуються умови ідеального теплового контакту. На верхній та нижній межах плити відомі напруження та температура. Необхідно знайти напруження, переміщення та температуру для всіх точок плити.

Нумерацію шарів будемо проводити зверху вниз, починаючи з одиниці. Усі величини, які відносяться до  $k$ -го шару, будемо позначати нижнім індексом  $k$  (якщо це не призводитимемо до неоднозначності, то індекси опускатимемо). У кожному шарі введемо локальну декартову систему координат  $O_k x_k z_k$  з початком на верхній межі шару: осі  $O_k z_k$  всіх систем координат співпадають та направлені вглиб відповідного шару, всі осі  $O_k x_k$  паралельні осі  $O_1 x_1$  та співпадають з межами відповідних шарів (рис. 2.1).

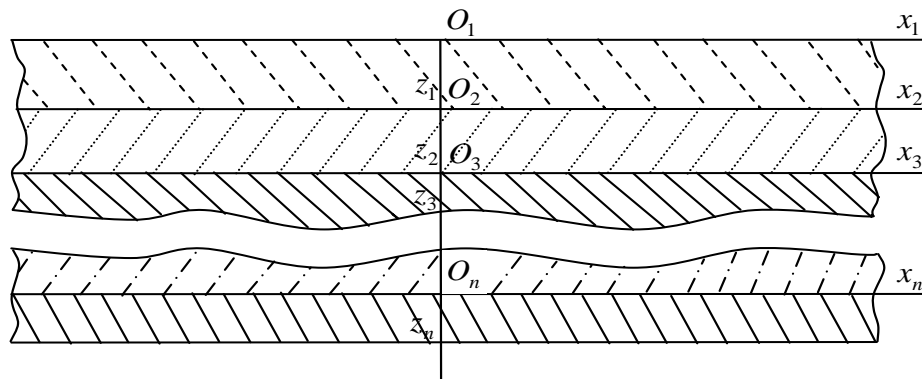


Рис.2.1 Багатошарова плита

Крайові умови задачі:

$$\sigma_{z1}(x,0) = \sigma(x), \tau_{xz1}(x,0) = \tau(x), T_1(x,0) = f(x), \quad (2.1)$$

$$\sigma_{zn}(x, h_n) = \tilde{\sigma}(x), \tau_{xzn}(x, h_n) = \tilde{\tau}(x), T_n(x, h_n) = \tilde{f}(x), \quad (2.2)$$

де  $\sigma(x)$ ,  $\tilde{\sigma}(x)$ ,  $\tau(x)$ ,  $\tilde{\tau}(x)$ ,  $f(x)$ ,  $\tilde{f}(x)$  – відомі функції.

Умови на спільних межах шарів:

$$\sigma_{zk+1}(x,0) = \sigma_{zk}(x, h_k), w_{k+1}(x,0) = w_k(x, h_k) + r_k \sigma_{zk}(x, h_k), \quad (2.3)$$

$$u_{k+1}(x,0) = u_k(x, h_k) + m_k \tau_{xzk}(x, h_k), \tau_{xzk+1}(x,0) = \tau_{xzk}(x, h_k), \quad (2.4)$$

$$T_{k+1}(x,0) = T_k(x, h_k), k_{Tk+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(x,0) = k_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial z}(x, h_k), \quad (2.5)$$

де  $m_k \geq 0$ ,  $r_k \geq 0$  – дотичні та нормальні коефіцієнти пружних зв'язків відповідно,  $T_k(x, z)$  – температура,  $u_k(x, z)$ ,  $w_k(x, z)$  – переміщення в напрямках осей  $O_k x_k$  та  $O_k z_k$  відповідно.

### 3 Метод розв'язання

Задача зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь для кожного з шарів плити [18]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (1-\omega) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (1-\omega) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

де  $\omega = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$ .

Закон Дюамеля-Неймана, який пов'язує між собою напруження, деформації та температуру [18]:

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_z - (3\lambda + 2\mu)\tilde{\alpha}_T T, \quad \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}, \quad \sigma_z = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_x - (3\lambda + 2\mu)\tilde{\alpha}_T T.$$

Вважатимемо, що всі напруження та переміщення задовольняють умовам існування одномірного інтегрального перетворення Фур'є по змінній  $x$  (для будь-якого  $z$ ):

$$\bar{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (3.1)$$

Для кожного шару введемо шість допоміжних функцій, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень на верхній межі шару та трансформантами функцій, які описують температуру та потік на цій межі:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0), \quad \beta = \mu W(\xi, 0), \quad \gamma = \mu S(\xi, 0), \quad \delta = \frac{-i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, 0), \quad (3.2)$$

$$\eta = \bar{T}(\xi, 0), \quad \varepsilon = \frac{1}{p} \frac{d\bar{T}}{dz}(\xi, 0), \quad (3.3)$$

де  $S(\xi, z) = -i\xi \bar{u}(\xi, z)$ ,  $W(\xi, z) = p \bar{w}(\xi, z)$ ,  $p = |\xi|$ .

У просторі трансформант переміщення, напруження та функції, які описують температуру та потік у точках шару, можна представити у вигляді лінійних комбінацій його допоміжних функцій [10]:

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = [-\omega p z \operatorname{sh} p z + \operatorname{ch} p z] \alpha + 2\omega [\operatorname{sh} p z - p z \operatorname{ch} p z] \beta - 2\omega p z \operatorname{sh} p z \gamma -$$

$$- [(1-\omega) \operatorname{sh} p z + \omega p z \operatorname{ch} p z] \delta + \alpha_T \mu p z \operatorname{sh} p z \eta + \alpha_T \mu [-\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \varepsilon, \quad (3.4)$$

$$-\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = [-(1-\omega) \operatorname{sh} p z + \omega p z \operatorname{ch} p z] \alpha + 2\omega p z \operatorname{sh} p z \beta + 2\omega [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \gamma +$$

$$+ [\omega p z \operatorname{sh} p z + \operatorname{ch} p z] \delta - \alpha_T \mu [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \eta - \alpha_T \mu p z \operatorname{sh} p z \varepsilon, \quad (3.5)$$

$$2\mu S(\xi, z) = p z \omega \operatorname{sh} p z \alpha + 2[(1-\omega) \operatorname{sh} p z + p z \omega \operatorname{ch} p z] \beta + 2[\omega p z \operatorname{sh} p z + \operatorname{ch} p z] \gamma +$$

$$+ [(2-\omega) \operatorname{sh} p z + \omega p z \operatorname{ch} p z] \delta - \alpha_T \mu p z \operatorname{sh} p z \eta + \alpha_T \mu [\operatorname{sh} p z - p z \operatorname{ch} p z] \varepsilon, \quad (3.6)$$

$$2\mu W(\xi, z) = [(2-\omega) \operatorname{sh} p z - \omega p z \operatorname{ch} p z] \alpha + 2[-\omega p z \operatorname{sh} p z + \operatorname{ch} p z] \beta + 2[(1-\omega) \operatorname{sh} p z -$$

$$-\omega p z \operatorname{ch} p z] \gamma - \omega p z \operatorname{sh} p z \delta + \alpha_T \mu [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \eta + \alpha_T \mu p z \operatorname{sh} p z \varepsilon, \quad (3.7)$$

$$\bar{\sigma}_x(\xi, z) = [\omega p z \operatorname{sh} p z + (2\omega - 1) \operatorname{ch} p z] \alpha + 2\omega [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \beta + 2\omega [p z \operatorname{sh} p z + 2 \operatorname{ch} p z] \gamma +$$

$$+ [(1+\omega) \operatorname{sh} p z + \omega p z \operatorname{ch} p z] \delta - \alpha_T \mu [p z \operatorname{sh} p z + 2 \operatorname{ch} p z] \eta - \alpha_T \mu [\operatorname{sh} p z + p z \operatorname{ch} p z] \varepsilon. \quad (3.8)$$

$$\bar{T}(\xi, z) = \eta(\xi) \operatorname{ch} p z + \varepsilon(\xi) \operatorname{sh} p z. \quad (3.9)$$

Розв'язання сформульованої задачі зводиться до знаходження шести допоміжних функцій (3.2), (3.3) для кожного шару плити.

Спочатку побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують допоміжні функції  $\eta_k$ ,  $\varepsilon_k$  сусідніх шарів плити. Застосуємо до співвідношень (2.5) пряме інтегральне перетворення Фур'є та формули (3.3), (3.9), отримаємо:

$$\eta_{k+1} = C_k \eta_k + S_k \varepsilon_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \Delta_k (S_k \eta_k + C_k \varepsilon_k), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (3.10)$$

де  $S_k = \text{sh} p_k$ ,  $C_k = \text{ch} p_k$ ,  $p_k = p h_k$ ,  $\Delta_k = \frac{k_T k}{k_T k_{k+1}}$ .

Покажемо, що функції  $\eta_k$  та  $\varepsilon_k$  лінійно залежні. Уведемо фіктивний шар з номером  $n+1$ , вважаючи, що на спільній межі  $n$ -го та  $(n+1)$ -го шарів виконуються умови ідеального теплового контакту, тобто  $T_{n+1}(x, 0) = T_n(x, h_n)$ . Запишемо ці умови в просторі трансформант Фур'є та застосуємо до них формули (3.3) та (3.9):

$$\bar{T}_{n+1}(\xi, 0) = \bar{T}_n(\xi, h_n),$$

$$\eta_{n+1} = C_n \eta_n + S_n \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = -\text{cth} p_n \eta_n + \frac{1}{S_n} \eta_{n+1}, \quad (3.11)$$

де  $\eta_{n+1} = \bar{f}(\xi)$ .

Виразимо функції  $\eta_n$  та  $\varepsilon_n$  через функції  $\eta_{n-1}$  та  $\varepsilon_{n-1}$  за формулами (3.10) і підставимо отримані вирази в останню формулу:

$$\varepsilon_{n-1} = -\frac{\Delta_{n-1} S_{n-1} + \text{cth} p_n C_{n-1}}{\Delta_{n-1} C_{n-1} + \text{cth} p_n S_{n-1}} \eta_{n-1} + \frac{1}{S_n (\Delta_{n-1} C_{n-1} + \text{cth} p_n S_{n-1})} \eta_{n+1}.$$

Аналогічно можна виразити  $\eta_{n-1}$ ,  $\varepsilon_{n-1}$  через  $\eta_{n-2}$ ,  $\varepsilon_{n-2}$  та отримати формулу, яка пов'язує  $\varepsilon_{n-2}$  та  $\eta_{n-2}$ . Виконуючи аналогічні перетворення можна отримати залежність між  $\varepsilon_k$  та  $\eta_k$ . Вона має вигляд

$$\varepsilon_k = -D_k \eta_k + F_k \eta_{k+1}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.12)$$

де функції  $D_k$ ,  $F_k$  – функції податливості термопружної плити за термінологією [10].

Поклавши в (3.12)  $k = n$  та прирівнявши коефіцієнти при  $\eta_n$  та  $\eta_{n+1}$  в отриманій рівності та в рівності (3.11), отримаємо:

$$D_n = \text{cth} p_n, \quad F_n = \frac{1}{S_n}. \quad (3.13)$$

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують між собою функції  $D_k$ ,  $F_k$  ( $k = \overline{1, n-1}$ ) сусідніх шарів плити. З одного боку, зі співвідношень (3.12) отримуємо:

$$\varepsilon_{k+1} = (-D_{k+1} C_k + D_{k+1} S_k D_k) \eta_k + (F_{k+1} - D_{k+1} S_k F_k) \eta_{k+1}.$$

З іншого боку, застосувавши до другого співвідношення (3.10) формулу (3.12), маємо:

$$\varepsilon_{k+1} = \Delta_k (S_k - C_k D_k) \eta_k + \Delta_k C_k F_k \eta_{k+1}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при  $\eta_k$  та  $\eta_{k+1}$  в двох останніх рівностях та виражаємо  $D_k$ ,  $F_k$  через  $D_{k+1}$ ,  $F_{k+1}$ , отримуємо:

$$D_k = \frac{\Delta_k S_k + D_{k+1} C_k}{\Delta_k C_k + D_{k+1} S_k}, \quad F_k = \frac{F_{k+1}}{\Delta_k C_k + D_{k+1} S_k}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (3.14)$$

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують між собою допоміжні функції  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\delta_k$  сусідніх шарів плити. Запишемо умови (2.3), (2.4) у просторі трансформант Фур'є та застосуємо до них формули (3.2), (3.4)–(3.7) та (3.12):

$$\bar{\alpha}_{k+1} = M_{11k}\bar{\alpha}_k + M_{12k}\bar{\beta}_k + M_{13k}\eta_k + M_{14k}\eta_{n+1}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} = & (M_{21k} + NM_{11k})\bar{\alpha}_k + (M_{22k} + NM_{12k})\bar{\beta}_k + \\ & + (M_{23k} + NM_{13k})\eta_k + (M_{24k} + NM_{14k})\eta_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де  $\bar{\mu}_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}$ ,  $S_k = \text{sh } p_k$ ,  $C_k = \text{ch } p_k$ ,  $p_k = ph_k$ ,  $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^t$ ,  $\bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^t$ ,

$$\begin{aligned} N = & \begin{pmatrix} r_k p \mu_{k+1} & 0 \\ 0 & m_k p \mu_{k+1} \end{pmatrix}, \quad M_{11k} = \begin{pmatrix} C_k - \omega_k p_k S_k & -(1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ -(1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & C_k + \omega_k p_k S_k \end{pmatrix}, \\ M_{12k} = & \begin{pmatrix} 2\omega_k (S_k - p_k C_k) & -2\omega_k p_k S_k \\ 2\omega_k p_k S_k & 2\omega_k (S_k + p_k C_k) \end{pmatrix}, \quad M_{13k} = \alpha_{Tk} \mu_k \begin{pmatrix} p_k S_k + D_k [S_k - p_k C_k] \\ -(S_k + p_k C_k) + D_k p_k S_k \end{pmatrix}, \\ M_{14k} = & \alpha_{Tk} \mu_k \begin{pmatrix} (p_k C_k - S_k) F_k \\ -p_k S_k F_k \end{pmatrix}, \quad M_{21k} = \frac{1}{2\bar{\mu}_k} \begin{pmatrix} (2 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k & -\omega_k p_k S_k \\ \omega_k p_k S_k & (2 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k \end{pmatrix}, \\ M_{22k} = & \frac{1}{\bar{\mu}_k} \begin{pmatrix} -\omega_k p_k S_k + C_k & (1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ (1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & \omega_k p_k S_k + C_k \end{pmatrix}, \\ M_{23k} = & \frac{\mu_{k+1} \alpha_{Tk}}{2} \begin{pmatrix} S_k + p_k C_k - D_k p_k S_k \\ -p_k S_k - D_k [S_k - p_k C_k] \end{pmatrix}, \quad M_{24k} = \frac{\mu_{k+1} \alpha_{Tk}}{2} \begin{pmatrix} p_k S_k F_k \\ (S_k - p_k C_k) F_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Уведемо фіктивний шар з номером  $n+1$ . Запишемо умови на спільній межі  $n$ -го та  $n+1$ -го шарів, вважаючи, що контакт між цими шарами ідеальний:

$$\sigma_{zn+1}(x, 0) = \sigma_{zn}(x, h_n), \quad \tau_{xz n+1}(x, 0) = \tau_{xz n}(x, h_n).$$

Застосуємо до останніх співвідношень пряме інтегральне перетворення Фур'є та співвідношення (3.2), (3.4), (3.5), отримаємо:

$$\bar{\alpha}_{n+1} = M_{11n}\bar{\alpha}_n + M_{12n}\bar{\beta}_n + M_{13n}\eta_n + M_{14n}\eta_{n+1},$$

де  $\bar{\alpha}_{n+1} = \left( \bar{\sigma}(\xi), -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}(\xi) \right)^t$ .

Використовуючи формули (3.15), (3.16) та (3.12), виразимо вектор  $\bar{\alpha}_{n+1}$  через вектори  $\bar{\alpha}_{n-1}$ ,  $\bar{\beta}_{n-1}$  та функції  $\eta_{n-1}$ ,  $\eta_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{n+1} = & M_{11n}\bar{\alpha}_n + M_{12n}\bar{\beta}_n + M_{13n}\eta_n + M_{14n}\eta_{n+1} = \\ = & [M_{11n}M_{11n-1} + M_{12n}(M_{21n-1} + NM_{11n-1})]\bar{\alpha}_{n-1} + \\ & + [M_{11n}M_{12n-1} + M_{12n}(M_{22n-1} + NM_{12n-1})]\bar{\beta}_{n-1} + \\ & + [M_{11n}M_{13n-1} + M_{12n}(M_{23n-1} + NM_{13n-1}) + M_{13n}(C_{n-1} - D_{n-1}S_{n-1})]\eta_{n-1} + \\ & + (M_{13n}S_{n-1}F_{n-1} + M_{14n})\eta_{n+1}. \end{aligned}$$

Виконуючи аналогічні перетворення з останнім виразом, можна виразити вектор  $\bar{\alpha}_{n+1}$  через вектори  $\bar{\alpha}_k$  і  $\bar{\beta}_k$  та функції  $\eta_k$ ,  $\eta_{n+1}$ . Із вище наведеного випливає, що вектор  $\bar{\alpha}_{n+1}$  є лінійною комбінацією векторів  $\bar{\alpha}_k$  та  $\bar{\beta}_k$  та функцій  $\eta_k$ ,  $\eta_{n+1}$ . Отже, вектор  $\bar{\beta}_k$  можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів  $\bar{\alpha}_k$ ,  $\bar{\alpha}_{n+1}$  та функцій  $\eta_k$ ,  $\eta_{n+1}$ :

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1} + K_k \eta_k + L_k \eta_{n+1}. \quad (3.17)$$

Матриці  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $K_k$  та  $L_k$  називатимемо матрицями податливості багатошарової плити.

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості сусідніх плит. Спочатку знайдемо матриці податливості для  $n$ -го шару плити. Запишемо співвідношення (3.17) для шару з номером  $n$ :

$$\bar{\beta}_n = A_n \bar{\alpha}_n + B_n \bar{\alpha}_{n+1} + K_n \eta_n + L_n \eta_{n+1}.$$

Покладемо у формулі (3.15)  $k = n$  та виразимо  $\bar{\beta}_n$ :

$$\bar{\beta}_n = -M_{12n}^{-1} M_{11n} \bar{\alpha}_n + M_{12n}^{-1} \bar{\alpha}_{n+1} - M_{12n}^{-1} M_{13n} \eta_n - M_{12n}^{-1} M_{14n} \eta_{n+1}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при  $\bar{\alpha}_n$ ,  $\bar{\alpha}_{n+1}$ ,  $\eta_n$  та  $\eta_{n+1}$  в двох останніх співвідношеннях, отримаємо:

$$A_n = -M_{12n}^{-1} M_{11n}, \quad B_n = M_{12n}^{-1}, \quad K_n = -M_{12n}^{-1} M_{13n}, \quad L_n = -M_{12n}^{-1} M_{14n}. \quad (3.18)$$

Побудуємо рекурентні формули, які пов'язують матриці  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $K_k$  та  $L_k$  сусідніх шарів плити при  $k = \overline{1, n-1}$ . Обчислимо  $\bar{\beta}_{k+1}$  двома способами. З одного боку, з формул (3.17), (3.10), (3.12) та (3.15):

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} = & A_{k+1} (M_{11k} + M_{12k} A_k) \bar{\alpha}_k + (A_{k+1} M_{12k} B_k + B_{k+1}) \bar{\alpha}_{n+1} + \\ & + (A_{k+1} M_{12k} K_k + A_{k+1} M_{13k} + K_{k+1} (C_k - S_k D_k)) \eta_k +. \end{aligned}$$

З іншого боку, з формул (3.16) та (3.17):

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} = & [M_{21k} + N M_{11k} + (M_{22k} + N M_{12k}) A_k] \bar{\alpha}_k + (M_{22k} + N M_{12k}) B_k \bar{\alpha}_{n+1} + \\ & + (A_{k+1} M_{12k} L_k + A_{k+1} M_{14k} + K_{k+1} S_k F_k + L_{k+1}) \eta_{n+1}, \\ & + [(M_{22k} + N M_{12k}) K_k + M_{23k} + N M_{13k}] \eta_k + \\ & + [(M_{22k} + N M_{12k}) L_k + M_{24k} + N M_{14k}] \eta_{n+1}. \end{aligned}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при  $\bar{\alpha}_k$ ,  $\bar{\alpha}_{n+1}$ ,  $\eta_k$ ,  $\eta_{n+1}$  в двох останніх виразах та виражаємо з отриманих рівностей  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $K_k$  та  $L_k$ :

$$A_k = (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} (M_{21k} + N M_{11k} - A_{k+1} M_{11k}), \quad (3.19)$$

$$B_k = -(A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} B_{k+1}, \quad (3.20)$$

$$K_k = (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} (M_{23k} + N M_{13k} - A_{k+1} M_{13k} - K_{k+1} (C_k - D_k S_k)), \quad (3.21)$$

$$L_k = (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} (M_{24k} + N M_{14k} - A_{k+1} M_{14k} - K_{k+1} S_k F_k - L_{k+1}). \quad (3.22)$$

Користуючись співвідношеннями (3.14), (3.19)–(3.22), можна послідовно знайти функції податливості всіх шарів плити, починаючи з функцій податливості  $n$ -го шару, які обчислюються за формулами (3.13), (3.18).

Із крайових умов знаходимо допоміжні функції  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$ ,  $\eta_1$  та  $\alpha_{n+1}$ ,  $\delta_{n+1}$ ,  $\eta_{n+1}$ . Решту допоміжних функцій знаходимо за формулами (3.12), (3.15) та (3.16). Підставляємо отримані допоміжні функції для  $k$ -го шару плити в формули (3.4)–(3.9) та застосовуємо до них обернене перетворення Фур'є, отримуємо шукані компоненти напружено-деформованого стану цього шару.

Зазначимо, що при відсутності теплових навантажень отримані формули з точністю до позначень співпадають з формулами побудованими в [16].

#### 4 Чисельні результати

Чисельні розрахунки проведено для двошарової плити з такими характеристиками шарів:

$$h_1 = h_2 = h, \quad \mu_1/\mu_2 = 0,5, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0.8. \quad \text{За крайових умов } T_1(x,0) = T_2(x,h_2) = \begin{cases} T_0, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases}$$

$\sigma_{z1}(x,0) = \sigma_{z2}(x,h_2) = 0, \quad \tau_{xz1}(x,0) = \tau_{xz2}(x,h_2) = 0$  знайдено нормальні (рис. 4.1а) та дотичні (рис. 4.1б) напруження вздовж спільної межі двошарової плити для різних відношень коефіцієнтів теплового розширення шарів  $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2}$  при  $\Delta = 1$ . За крайових умов:

$$T_1(x,0) = \begin{cases} T_0, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases} \quad T_2(x,h_2) = \begin{cases} 0.1T_0, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases} \quad \sigma_{z1}(x,0) = \sigma_{z2}(x,h_2) = 0, \quad \tau_{xz1}(x,0) = \tau_{xz2}(x,h_2) = 0$$

знайдено нормальні (рис. 4.2а) та дотичні (рис. 4.2б) напруження вздовж спільної межі двошарової плити для різних відношень коефіцієнтів теплового розширення шарів  $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2}$ ,  $\Delta = 1$ . На рис. 4.3 наведено аналогічні графіки для різних відношень коефіцієнтів теплопровідності шарів  $\Delta = k_{T1}/k_{T2}$  при  $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2} = 1$ . На рис. 4.1–4.3 крива 1 відповідає значенням коефіцієнтів пружних зв'язків  $m = r = 0$  (ідеальний контакт), крива 2 –  $m = 0$  і  $r = 1$ , крива 3 –  $m = 1$  і  $r = 0$ ; крива 4 –  $m = r = 1$ .

Аналіз графіків розподілу нормальних та дотичних напружень дозволяє зробити такі висновки:

1) наявність пружних зв'язків між шарами плити призводить до зменшення напружень на стику шарів плити у порівнянні з ідеальним контактом;

2) для плити, на верхній межі якої температурні навантаження більші ніж на нижній, наявність нормальних пружних зв'язків більш суттєво впливає на розподіл нормальних напружень на спільній межі шарів, а наявність дотичних пружних зв'язків – на розподіл дотичних напружень;

3) збільшення коефіцієнта теплового розширення нижнього шару більш суттєво впливає на розподіл напружень  $\sigma_{z1}(x,h)$  та  $\tau_{xz1}(x,h)$ , у порівнянні зі збільшенням цього коефіцієнта для верхнього шару;

4) температурне навантаження не викликає напружень у точках плити, шари якої мають однакові коефіцієнти теплового розширення та теплопровідності.

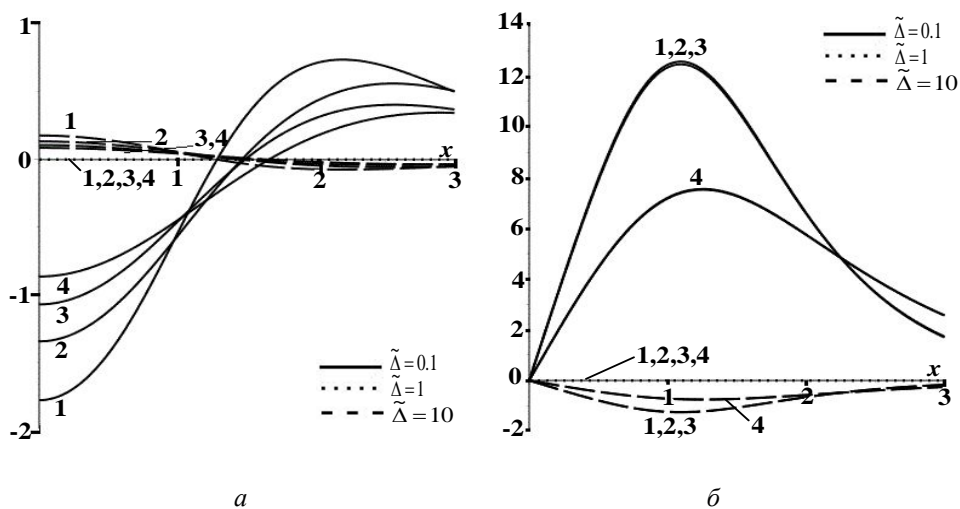


Рис. 4.1 Нормальні  $10\sigma_{z1}(x,h)/(\alpha_{T1} T_0 \mu_1)$  та дотичні  $10\tau_{xz1}(x,h)/(\alpha_{T1} T_0 \mu_1)$  напруження на спільній межі шарів двошарової плити

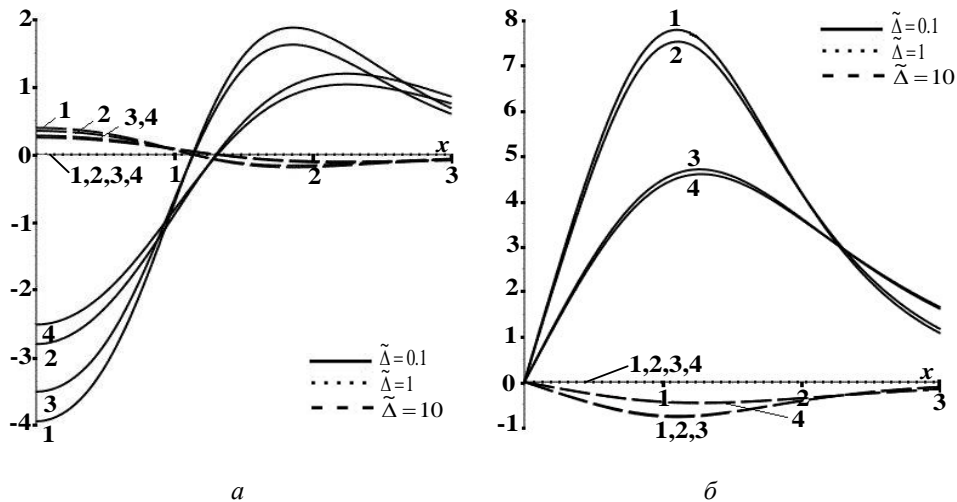


Рис.4.2 Нормальні  $10\sigma_{z1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$  та дотичні  $10\tau_{xz1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$  напруження на спільній межі шарів двошарової плити

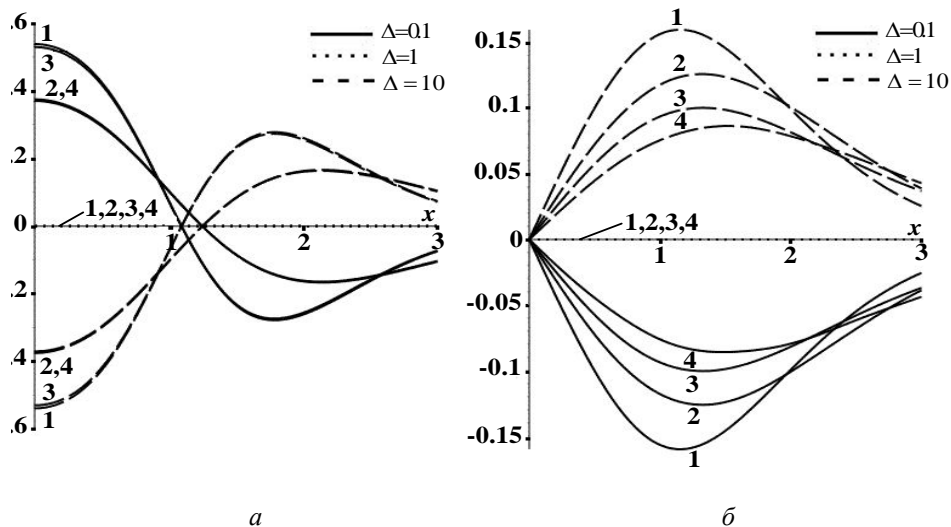


Рис.4.3 Нормальні  $10\sigma_{z1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$  та дотичні  $10\tau_{xz1}(x,h)/(\alpha_{T1}T_0\mu_1)$  напруження на спільній межі шарів двошарової плити

## 5 Висновки

Запропоновано спосіб визначення напружено-деформованого стану багатошарової плити з пружними зв'язками, що перебуває під дією теплових та силових навантажень. У просторі трансформант Фур'є в матричній формі побудовано рекурентні співвідношення, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів, через які виражаються трансформанти напружень та переміщень шарів, та рекурентні співвідношення між функціями податливості сусідніх шарів плити. Проведено чисельні розрахунки для двошарової плити при різних видах теплових навантажень на верхній та нижній межах плити.

Запропонований спосіб визначення напружено-деформованого стану багатошарових плит з пружними зв'язками між шарами дозволяє провести детальний аналіз впливу механічних та температурних характеристик шарів на розподіл напружень і переміщень у шарах плити з пружними зв'язками між ними з будь-якою скінченною кількістю шарів.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Vel S. S., Batra R. C. Generalized Plane Strain Thermoelastic Deformation of Laminated Anisotropic Thick Plates. International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 38, № 8. P. 1395–1414.



2. Kushnir R.M., Protsyuk B.V., Synyuta V.M. Temperature Stresses and Displacements in a Multilayer Plate with Nonlinear Conditions of Heat Exchange. *Materials Science*. 2002. Vol. 38, № 6. P. 798 – 808.
3. Chien-Ching Ma, Shin-Wen Chang Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2004. Vol. 47, № 8-9. P. 1643–1655.
4. Brischetto S., Carrera E. Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates. *Composite Structures*. 2010. Vol. 92, № 8. P. 1793–1812.
5. Аттеков А. В., Волков И. К., Тверская Е. С. Температурное поле многослойного полупространства при неидеальном тепловом контакте между слоями. *Известия Российской академии наук. Энергетика*. 2010. № 3. С. 83–91.
6. Chien-Ching Ma, Yi-Tzu Chen Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes. *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 221, № 3. P. 223–237.
7. Cetkovic M. Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P. 388–399.
8. Zenkour A. M., Maturi D. A. Thermoelastic bending response of laminated plate resting on elastic foundations. *Scientia Iranica*. 2015. Vol. 22, № 2. P. 287–298.
9. Бойко С. Б., Величко О. В. Аналітичний метод визначення теплових стаціонарних полів у шаруватих конструкціях. *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2015. № 1, т. 77. С. 257–266.
10. Величко І. Г., Ткаченко І. Г. Плоска термопружна деформація багатшарової основи. *Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка*. 2004. Вип. 8, т. 1. С. 154–161.
11. Jones J. P., Whitter J. S. Waves at a flexibly bonded interface. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1967. Vol. 34, № 4. P. 178–183.
12. Барсегян В. М., Хачатрян А. М. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для трехслойной полосы при различных условиях контакта слоев. *Изв. НАН Армении. Механика*. 2001. № 1, т. 54. С. 17–25.
13. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Асимптотические решения несвязных задач стационарной теплопроводности и термоупругости для двухслойных пластин с неклассическими граничными условиями. *Изв. НАН Армении. Механика*. 2017. № 2, т. 70. С. 3–14.
14. Пожуев А. В., Михайлуца Е. Н. Действие нестационарной нагрузки на двухслойную цилиндрическую оболочку с упругой прослойкой. *Вісник СевДТУ. Механіка, енергетика, екологія : зб. наук. пр.* 2008. Вип. 88. С. 5–12.
15. Пожуев А. В., Михайлуца Е. Н. Нестационарная пространственная деформация двухслойной пластины конечных размеров с неидеальной связью. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2011. № 1. С. 139–143.
16. Антоненко Н. М. Плоска деформація багатшарової плити з пружними зв'язками між шарами. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Сер. : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2013. Вип. 23, № 1089. С. 15–21.
17. Antonenko N. M. Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Plate Elastically Coupled with a Rigid Half Plane. *Materials Science*. 2017. Vol. 53, № 3. P. 407–416.
18. Коваленко А. Д. Термоупругость. Київ : Вища школа, 1975. 216 с.

#### REFERENCES

1. S. S. Vel, and R. C. Batra, "Generalized Plane Strain Thermoelastic Deformation of Laminated Anisotropic Thick Plates." *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, no. 8, pp. 1395–1414. 2001.
2. R. M. Kushnir, B. V. Protsyuk, and V. M. Synyuta, "Temperature Stresses and Displacements in a Multilayer Plate with Nonlinear Conditions of Heat Exchange," *Materials Science*, vol. 38, no. 6, pp. 798–808, 2002.
3. Ch.-Ch. Ma, and Sh.-W. Chang, "Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, no. 8-9, pp. 1643–1655, 2004.

4. S. Brischetto, and E. Carrera, "Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates." *Composite Structures*, vol. 92, no. 8, pp. 1793–1812, 2010.
5. A.V. Attekov, I.K. Volkov, and E.S. Tverskaya, "Temperature field in a multilayer half space for the imperfect thermal contact of layers." *Izv. Ross. Acad. Nauk, Energet*, no. 3, pp. 83–91, 2010.
6. Ch.-Ch. Ma, and Y.-T. Chen, "Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes." *Acta Mechanica*, vol. 221, no. 3, pp. 223–237, 2011.
7. M. Cetkovic, "Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model." *Composite Structures*, vol. 125, pp. 388–399, 2015.
8. A. M. Zenkour, and D. A. Maturi, "Thermoelastic bending response of laminated plate resting on elastic foundations," *Scientia Iranica*, vol. 22, no. 2, pp. 287–298, 2015.
9. S. Boyko, and H. Velichko, "Analytical method for determining the stationary thermal fields in layered structures," *Bulletin of TNTU*, vol. 77, no. 1, pp. 257–266, 2015.
10. I. G. Velychko, and I. G. Tkachenko, "Plane thermoelastic deformation of multilayer foundation," *Visn. Dnibr. Univ. Mekh.*, vol. 1, no. 8, pp. 154–161, 2004.
11. J. P. Jones, and J. S. Whitter, "Waves at a flexibly bonded interface," *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, vol. 34, no. 4, pp. 178–183, 1967.
12. V. M. Barsegyan, and A. M. Khachatryan, "On Asymptotic solution of a mixed boundary problem for a three-layered stripe under different conditions of the contact between the stripes," *The Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*, vol. 54, no. 1, pp. 17–25, 2001
13. L. A. Aghalovyan, and R. S. Gevorgyan, "Asymptotic solutions of stationary problems of thermal conductivity and thermoelasticity with nonclassical boundary conditions for the two-layer plates with full and incomplete contact layers," *The Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*, vol. 70, no. 2, pp. 3–14, 2017.
14. A. V. Pozhuev, and E. N. Mihaylutsa, "Action non-stationary load on a two-layer cylindrical shell with an elastic interlayer," *Journal of the Sevastopol National Technical University. Series: Mechanics, Power Engineering, Ecology*, vol. 88, pp. 5–12. 2008.
15. A. Pozhuev, and E. Mihaylutsa, "Non-stationary spatial deformation of the final sizes two-layer plate with nonideal communication," *Innovative materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering*, no.1, pp. 139–143, 2011.
16. N. M. Antonenko, "The plane deformation of the multilayer plates with elastic connections between the layers," *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»*, vol. 23, no. 1089, pp. 15–21, 2013
17. N. M. Antonenko, "Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Plate Elastically Coupled with a Rigid Half Plane," *Materials Science*, vol. 53, no. 3, pp. 407–416, 2017.
18. A. D. Kovalenko, *Thermoelasticity*. Kiev: Vyscha Shcola, 1975.

*Антоненко Ніна Миколаївна* – кандидат фізико-математичних наук, доцент; Запорізький національний технічний університет, м. Запоріжжя, вул Жуковського, 64, 69063; e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com; ORCID: 0000000204276499.