УДК 517.977.5

Оптимизация надежности сложной системы

Н.С. Подцыкин
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: nick_p_2018@ukr.net

В статье предложен метод оптимизации надежности сложной технической системы, рассматриваемой на неограниченном интервале времени. Обновление системы происходит периодически в плановые моменты контроля или в момент отказа системы с помощью профилактических и ремонтных работ, которые называются управлениями. Допускается, что глубина обновления зависит от вида работ и случайна. Сложная система составлена из простых подсистем. Соединения в смысле надежности простых подсистем между собой заданы и могут быть произвольными. Поэтому отказ одной или нескольких подсистем не обязательно приводит к отказу всей сложной системы. В каждой сложной системе существует конечное число наборов определенных подсистем, отказ которых приводит к отказу всей системы. Отказ системы нежелателен, так как восстановление системы часто связано с большими потерями.
Важность решения этой задачи отмечалось еще в [2]. В статье предложен вариант ее решения. Для построения математической модели предполагается наличие оценок функций надежности всех простых подсистем или их экспертные оценки. На основе этих оценок и с учетом наблюдаемых информативных параметров подсистем определяется функция надежности сложной системы и ее состояние. Процесс эволюции состояния системы по времени является случайным процессом, который позволяет выбрать вложенную марковскую цепь, выделив моменты времени перед применением управлений. Эта цепь содержит необходимую информацию для применения известного метода оптимизации стратегии применения управлений в моменты контроля. Для реализации этого метода перечислены все возможные управления в плановые моменты контроля и в моменты отказа, их стоимости и вероятностные характеристики. Приведен алгоритм вычисления ε -оптимальной стратегии. Указано, что при необходимости можно найти оптимальную стратегию с помощью более громоздкого алгоритма Ховарда.

Ключевые слова*: математическая модель, сложная система, износ технической системы, работоспособность системы, состояние системы, стратегия управления****.***

У статті запропоновано метод оптимізації надійності складної технічної системи, що розглядається на необмеженому інтервалі часу. Оновлення системи відбувається періодично в планові моменти контролю або в момент відмови системи за допомогою профілактичних і ремонтних робіт, які називаються управліннями. Допускається, що глибина поновлення залежить від виду робіт і випадкова. Складна система складена з простих підсистем. З'єднання в сенсі надійності простих підсистем між собою задані і можуть бути довільними. Тому відмова однієї або декількох підсистем не обов'язково призводить до відмови всієї складної системи. У кожній складній системі існує кінцеве число наборів певних підсистем, відмова яких призводить до відмови всієї системи. Відмова системи небажана, тому, що відновлення системи часто пов'язано з великими втратами.
Важливість вирішення цього завдання зазначалося ще в [2]. У статті запропоновано варіант її вирішення. Для побудови математичної моделі передбачається наявність оцінок функцій надійності всіх простих підсистем або їх експертні оцінки. На основі цих оцінок і з урахуванням спостережуваних інформативних параметрів підсистем визначається функція надійності складної системи і її стан. Процес еволюції стану системи по часу є випадковим процесом, який дозволяє вибрати вкладеної марковський ланцюг, виділивши моменти часу перед застосуванням управлінь. Цей ланцюг містить необхідну інформацію для застосування відомого методу оптимізації стратегії застосування управлінь в моменти контролю. Для реалізації цього методу перераховані всі можливі управління в планові моменти контролю і в моменти відмови, їх вартості та ймовірні характеристики. Наведено алгоритм обчислення ε - оптимальний стратегії. Зазначено, що при необхідності можна знайти оптимальну стратегію за допомогою більш громіздкого алгоритму Ховарда.

Ключові слова: *математична модель, складна система, знос технічної системи, працездатність системи, стан системи, стратегія управління.*

The article proposes a method for optimizing the reliability of a complex technical system considered on an unlimited time interval. The system is updated periodically at scheduled points of control or at the time of system failure with the help of preventive and repair works, which are called controls. It is assumed that the depth of the update depends on the type of work and random. A complex system is composed of simple subsystems. As for the reliability of simple subsystems, their connections are set and can be arbitrary. Therefore, the failure of one or more subsystems does not necessarily lead to the failure of the entire complex system. In each complex system there are a finite number of sets of defined subsystems, the failure of which leads to the failure of the entire system. System failure is undesirable, as system recovery is often associated with large losses.
The importance of solving this problem has been noted before and the article proposes the solution. To build a mathematical model it is assumed that there are estimates of the reliability functions of all simple subsystems or their expert evaluations. Based on these estimates and taking into account the observed informative parameters of the subsystems, the reliability function of the complex system and its state are determined. The process of the evolution of the state of the system over time is a random process that allows you to select an embedded Markov chain, selecting time points before applying controls. This chain contains the necessary information for applying the well-known method of optimizing the strategy of applying controls in moments of control. For the implementation of this method all possible controls are listed for the planned control points and

for the moments of failure, as well as, their costs and probabilistic characteristics. The algorithm for computing the ε -optimal strategy is given. It is indicated that, if necessary, you can find the optimal strategy using the more cumbersome Howard algorithm.

Key words: *mathematical model, complex system, technical system wear, system operability, system state, control strategy*.

1. Введение

Пусть система S составлена из n простых подсистем [1,2]. Каждая простая подсистема в процессе эксплуатации изнашивается, вероятность отказа увеличивается, эффективность ее использования в составе S снижается. Будем допускать, что между простыми подсистемами в смысле надежности могут быть выделены соединения трех видов: простое (последовательное), резервирование (параллельное), смешанное [2]. Очевидно, что надежность системы зависит не только от надежности ее подсистем, но и от их соединений друг с другом.

Положим, что система S эксплуатируется неограниченно долго, оптимальный уровень ее надежности поддерживается за счет периодических ремонтных работ и профилактических обслуживаний подсистем, проводимых в момент контроля. В дальнейшем мероприятия, проводимые в момент контроля, назовем управлением. Контроль системы проводится в планируемые моменты времени через заданный регламентом промежуток времени τ . В момент отказа системы проводится внеочередной контроль и применяется одно из возможных управлений, направленных на восстановление системы и ее обновление. Управления могут различаться по локализации в системе, по глубине обновления подсистем и, следовательно, по стоимости. Естественно предположить, что выбор управления в момент контроля должен зависеть от состояния системы. Ниже будет предложен метод оценки состояния, которое будет учитывать надежность системы на текущий момент контроля. Будем допускать, что процесс изменения состояния является случайным, не марковским. Однако вложенная марковская цепь $X(t)$, определяемая последовательностью состояний в момент контроля перед применением управлений, содержит необходимую информацию для оптимизации процесса выбора управлений.

Последнее замечание определяет выбор метода построения модели на основе марковского процесса принятия решений [3], который задается набором следующих объектов: $\{E, Y, Q, w, \pi\}$, где E - конечное множество состояний, Y -конечное множество управлений, Q - переходная функция, заданная на $E \times E$, w - функция непосредственных доходов, заданная на $E \times Y$, π - стратегия управления, определяющая правило выбора управлений в зависимости от наблюдаемого состояния в момент контроля. Каждой стратегии можно поставить в соответствие величину φ среднего дохода в единицу времени. Целью моделирования является нахождение стратегии π , максимизирующей величину φ .

2. Функция надежности простой и сложной системы.

Примем следующее определение надежности технической системы. Обозначим через ξ время до ее отказа. Функция надежности системы определяется вероятностью $P(t) = P(\xi \geq t)$, где t - время. Рассмотрим i -ю подсистему системы S . С помощью методов распознавания образов выберем набор контролируемых параметров $\left\{\theta_k^{(i)}, k = 1,\dots,l_i\right\}$, содержащих информацию о надежности подсистемы, и на их основе составим скалярную функцию $\theta^{(i)}$ так, чтобы ее значения монотонно зависели от уровня надежности подсистемы [4]. Будем предполагать, что для начальных значений $\left\{\theta^{(i)}(1),\dots,\theta^{(i)}(m_i)\right\}$ параметра $\theta^{(i)}$с помощью методов математической статистики получены оценки функции надежности, которые обозначим через $P\left(t, \theta^{(i)}(j)\right)$, $j = 1,\dots,m_i$. Если для i -ой подсистемы имеется оценка функции надежности новой подсистемы, то обозначим эту функцию так: $P_0\left(t, \theta^{(i)}\right)$.

Обозначим средние времена до отказа i -ой подсистемы для разных начальных значений параметра $\theta^{(i)}(j)$ через $\bar{t}^{(i)}(j)$, то есть $\bar{t}^{(i)}(j) = \int\limits_0^\infty t d\left(1 - P\left(t, \theta^{(i)}(j)\right)\right)$.

Образуем наборы пар $\{\theta^{(i)}(j), \bar{t}^{(i)}(j)\}$ для каждого $i = 1,\ldots,n$. Далее, для каждого i и конечного числа заданных пар с помощью метода интерполяции оценим зависимость среднего времени до отказа подсистемы от параметра θ. Обозначим полученную зависимость $\bar{t}^{(i)} = \varphi^{(i)}(\theta)$, где $\theta \in \left[\underline{\theta}^{(i)}, \bar{\theta}^{(i)}\right]$, $\underline{\theta}^{(i)} = \min\limits_j \theta^{(i)}(j)$, $\bar{\theta}^{(i)} = \max\limits_j \theta^{(i)}(j)$. Важное значение при построении модели имеет наличие статистической информации о надежности новой подсистемы. Если она отсутствует, то будем предполагать, что либо технические характеристики новой подсистемы определяют значение параметра θ новой подсистемы, либо она определяется экспертной оценкой. Затем значение функции φ экстраполируется на это значение. Аналогично проведем экстраполяцию на наихудшие состояния подсистемы. Полученный интервал возможных значений параметра θ для i-ой подсистемы обозначим через $\Theta^{(i)}$.

Предлагается правило определения состояния сложной системы, основанной на функции надежности сложной системы. Если известны функции надежности подсистем и схема их соединений в смысле надежности, то функция надежности сложной системы находится без принципиальных трудностей. Ниже будет рассмотрен пример ее нахождения для системы, приведенной на рисунке 1.

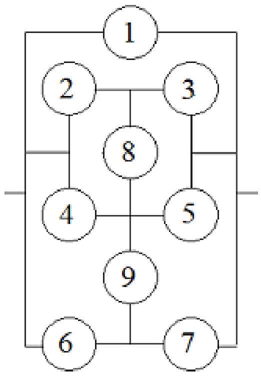

Рис. 1. Система S

Система состоит из девяти простых подсистем, соединенных в смысле надежности так, как показано на рисунке. Пересечение линий означает соединение. Пусть надежности всех девяти простых подсистем заданы: $P^{(i)}(t)$, $i = 1,\ldots,9$. Для удобства анализа системы будем считать, что сложная система и рассматриваемые далее подсистемы имеют один вход и один выход, как показано на рисунке. Чтобы найти функцию надежности сложной системы, выраженной через надежности простых подсистем, проведем ее анализ. Последовательно будем находить подсистемы, состоящие из нескольких простых подсистем, имеющих один вход и один выход, надежность которых легко вычисляется. Если таких подсистем не находится, то выбирается ключевая простая подсистема, обладающая следующим свойством: работающая и неработающая ключевая подсистема определяет две разные сложные системы, доступные дальнейшему анализу. Заметим, что в некоторых случаях удобно выделить несколько ключевых подсистем. Пользуясь этим правилом найдем надежность $P(t)$ системы, приведенной на рисунке 1.

Обозначим для удобства подсистему, рассматриваемую на j-ом шаге анализа и содержащую элементы $e_1,\ldots,e_k$, через $S_j\{e_1,\ldots,e_k\}$, а ее надежность через $P_j^{(e_1,\ldots,e_k)}(t)$.

Исходную сложную систему S представим в виде резервированной системы $S_1\{1\}$, $S_1\{2,\ldots,9\}$. Подсистема $S_1\{1\}$ состоит из одного элемента с надежностью $P_1^{(1)}(t)$. На рисунке 2 представлена подсистема $S(2) = S_1\{2,\ldots,9\}$.

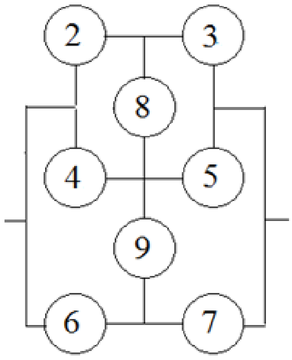

Рис. 2. Система S (2)

Тогда надежность системы S, очевидно, равна

$$P(t)=1-\left(1-P_1^{(1)}(t)\right)\left(1-P_1^{(2,\dots,9)}(t)\right), \tag{2.1}$$

где $P_1^{(1)}(t)=P^{(1)}(t)$.

В системе $S_1\{2,\dots,9\}$ удобно выбрать ключевые элементы 8 и 9. Если элементы 8 и 9 находятся в рабочем состоянии, то эту систему обозначим $S(3)=S_2\{2,\dots,7\}$. На рисунке 3 она представлена в исходном виде и в эквивалентном виде, в котором выделены простые и резервированные подсистемы.

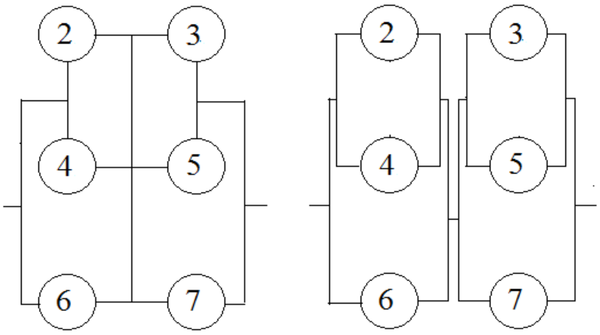

Рис. 3. Подсистема S (3)

Если элемент 8 находится в рабочем состоянии, а элемент 9 – в нерабочем состоянии, то получим систему $S(4)=S_3\{2,\dots,7\}$, которая представлена на рисунке 4.

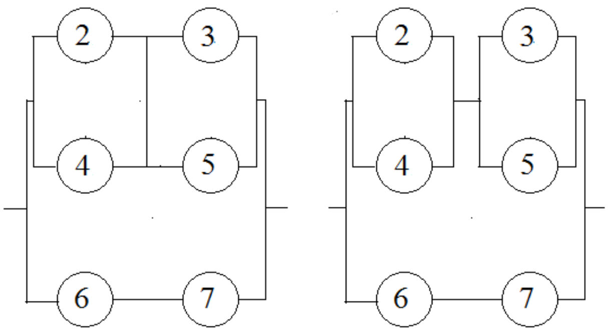

Рис. 4. Подсистема S (4)

Если элемент 8 находится в нерабочем состоянии, а элемент 9 – в рабочем состоянии, то получим систему $S(5)=S_4\{2,\dots,7\}$, которая представлена на рисунке 5.

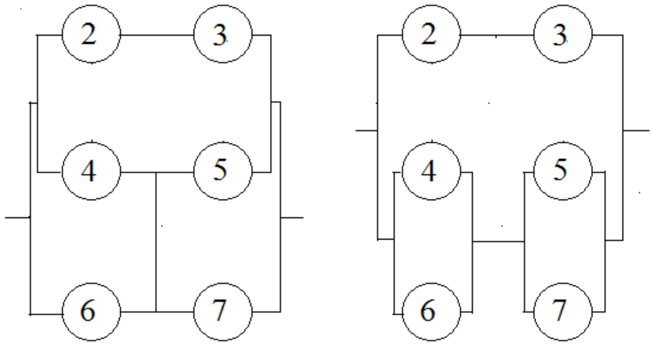

Рис. 5. Подсистема S (5)

Оба элемента 8 и 9 находятся в нерабочем состоянии. Получим систему $S(6) = S_5\{2,\ldots,7\}$, которая представлена на рисунке 6.

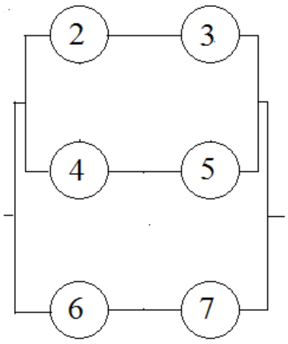

Рис. 6. Подсистема S (6)

Надежности ключевых элементов 8 и 9 даны по условию и равны соответственно $P^{(8)}(t)$, $P^{(9)}(t)$. Теперь система $S_1\{2,\ldots,9\}$ представлена через простые и резервированные подсистемы. Это дает возможность записать функцию надежности системы $S_1\{2,\ldots,9\}$.

$$
\begin{aligned}
P_1^{(2,\ldots,9)}(t) = {} & P^{(8)}(t)P^{(9)}(t)\left[1-\left(1-P_2(2,4)\right)\left(1-P^{(6)}(t)\right)\right]\left[1-\left(1-P_2(3,5)\right)\left(1-P^{(7)}(t)\right)\right]+\\
& + P^{(8)}(t)\left(1-P^{(9)}(t)\right)\left(1-\left(1-P_3(2,4,3,5)\right)\left(1-P^{(6)}(t)P^{(7)}(t)\right)\right)+\\
& + \left(1-P^{(8)}(t)\right)P^{(9)}(t)\left[1-\left(1-P^{(2)}(t)P^{(3)}(t)\right)\left(1-P_4(4,6,5,7)\right)\right]+\\
& + \left(1-P^{(8)}(t)\right)\left(1-P^{(9)}(t)\right)\left[1-\left(1-P_5(2,3,4,5)\right)\left(1-P^{(6)}(t)P^{(7)}(t)\right)\right],
\end{aligned}
$$

где:

$$
\begin{aligned}
& P_2(2,4) = 1-\left(1-P^{(2)}(t)\right)\left(1-P^{(4)}(t)\right),\\
& P_2(3,5) = 1-\left(1-P^{(3)}(t)\right)\left(1-P^{(5)}(t)\right),\\
& P_3(2,4,3,5) = \left[1-\left(1-P^{(2)}(t)\right)\left(1-P^{(4)}(t)\right)\right]\left[1-\left(1-P^{(3)}(t)\right)\left(1-P^{(5)}(t)\right)\right],\\
& P_4(4,6,5,7) = \left[1-\left(1-P^{(4)}(t)\right)\left(1-P^{(6)}(t)\right)\right]\left[1-\left(1-P^{(5)}(t)\right)\left(1-P^{(7)}(t)\right)\right],\\
& P_5(2,3,4,5) = 1-\left(1-P^{(2)}(t)P^{(3)}(t)\right)\left(1-P^{(4)}(t)P^{(5)}(t)\right).
\end{aligned}
$$

Подставив полученное выражение надежности подсистемы $S_1\{2,\ldots,9\}$ в (2.1), получим функцию надежности сложной системы S, выраженную через функции надежности простых подсистем.

3. Состояние сложной системы.

Определение состояния зависит от цели моделирования, определяется интуицией аналитика и доступной информацией о системе. Далее рассмотрим возможный способ определения состояния сложной изнашивающейся системы для рассматриваемого случая.

Время до отказа является важной характеристикой системы, существенно влияющей на эффективность ее работы. Следует к тому же заметить, что износ системы обычно снижает ее производительность. Поэтому среднее время до отказа выберем в качестве основной характеристики при определении состояния.

Для определения состояния системы в момент контроля важное значение имеет знание функций надежности всех новых подсистем. Рассмотрим способ оценки недостающих функций надежности. Пусть для i-ой подсистемы известен набор функций надежности $P^{(i)}\left(t,\theta^{(i)}(l)\right)$, $l=1,\dots,L_i$. Выберем ту функцию надежности, у которой наилучшее начальное значение параметра $\theta^{(i)}$. По предположению выбранное значение параметра $\theta^{(i)}(j)$ не соответствует новой подсистеме. Считаем, что эта подсистема проработала некоторый неизвестный интервал времени. С помощью методов экстраполяции можно восстановить длину неизвестного интервала времени и функцию надежности $P^{(i)}\left(t,\theta^{(i)}(j)\right)$ на этом интервале. Для этого следует учесть, что функция надежности в начальный момент времени равна 1, а также использовать функцию надежности и ее производные на интервале, на котором она известна. Обозначим полученную оценку через $P_0^{(i)}(t)$.

Для дальнейшего построения модели необходимо провести дискретизацию множества состояний E системы S и множеств значений параметров $\Theta^{(k)}$, $k=1,\dots,n$, подсистем. Обозначим через $\hat{E}_0$ конечное множество состояний $\{x_1,\dots,x_N\}$ после дискретизации E, причем разным x_i соответствуют непересекающиеся полуинтервалы $\left[\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right)$ множества E. Аналогично, пусть $\hat{\Theta}^{(k)}$ конечное множество значений параметра k-ой подсистемы: $\hat{\Theta}^{(k)}=\left\{\theta_1^{(k)},\dots,\theta_M^{(k)}\right\}$, $k=1,\dots,n$.

Пусть в момент контроля t_0 наблюдались следующие значения параметров подсистем $I(t_0)=\left\{\theta^{(1)}(t_0),\dots,\theta^{(n)}(t_0)\right\}$. Этому набору соответствует набор дискретных значений параметров $\hat{I}(t_0)=\left\{\theta_{l_1}^{(1)}(t_0),\dots,\theta_{l_n}^{(n)}(t_0)\right\}$, $1\le l_k\le M$, $k=1,\dots,n$ Для каждой k-ой подсистемы найдем величины $\bar{t}^{(k)}=\varphi^{(k)}\left(\theta_{l_k}^{(k)}\right)$, $k=1,\dots,n$. Затем из уравнения $\bar{t}^{(k)}=\int_0^\infty td\left(1-P_0^{(k)}\left(t+\hat{t}^{(k)}\right)\right)$ находим сдвиги $\hat{t}^{(k)}$, $k=1,\dots,n$. Найденные функции надежности

$$P_0^{(k)}\left(t+\hat{t}^{(k)}\right),\ k=1,\dots,n, \tag{3.1}$$

обозначим через $P_{\hat{t}^{(k)}}^{(k)}(t)$. Они позволят оценить в момент контроля t_0 функцию надежности $P_{t_0}(t)$ системы S и ее состояние.

Пусть $P_0(t)$ - функция надежности сложной системы, составленной из новых подсистем. Обозначим через μ, $\mu\ge 0$, произвольный момент времени. Определим функцию $\bar{t}_\mu$ условного среднего времени до отказа системы, при условии, что до момента времени μ отказа не произошло.

$$\bar{t}_\mu=\int_0^\infty td\left(1-\frac{P_0(\mu+t)}{P_0(\mu)}\right).$$

Положим, что в момент времени $\mu=0$ состояние системы $x=0$. Для произвольного момента времени $\mu\ge 0$ положим

$$x_\mu = \frac{\bar{t}_0 - \bar{t}_\mu}{\bar{t}_0}. \tag{3.2}$$

Таким образом, множество состояний сложной системы $E=[0,1)$. Ему соответствует дискретное множество состояний $\hat{E}_0$. Заметим, что здесь состояние x_μ является прогнозируемым для момента $\mu>0$, при условии, что в начальный момент времени состояние $x=0$ и до момента μ отказ системы не произошел. Следует предположить, что в любой момент времени $\mu\neq 0$ из-за наличия случайных факторов состояние может несколько отличаться от прогнозируемого.

Если в момент контроля t_0 системы S была получена оценка функции надежности $P_{t_0}(t)$, то после вычисления функции $\bar{t}_\mu = \int_0^\infty t d\left(1-\frac{P_{t_0}(\mu+t)}{P_{t_0}(\mu)}\right)$, прогнозируемые состояния для любого момента времени $\mu>0$ (начиная с момента контроля t_0), вычисляются по формуле(3.2).

4. Управления, доход и стратегия управления

Предполагается, что система контролируется в плановые моменты времени через промежуток времени τ или в момент отказа системы. Обозначим случайный период контроля через

$$\zeta = \min(\xi,\tau), \tag{4.1}$$

где ξ - случайное время от начала периода до отказа.

Подсистемы, отказавшие на периоде τ, ожидают восстановления до следующего момента контроля, если их отказ не привел к отказу всей системы. Если отказ подсистемы привел к отказу системы S, то в момент ее отказа формально реализуется случайная величина ς и период заканчивается.

Управления в системе S применяются в каждый момент контроля. Для общности допускаем, что управления, применяемые в плановый момент контроля и в момент отказа, принадлежат разным конечным и непересекающимся множествам, соответственно, Y_1 и Y_2, $Y=Y_1\cup Y_2$, $Y_1\cap Y_2=\varnothing$. Каждое управление восстанавливает отказавшие подсистемы и определяет конкретную подсистему, состояние которой следует улучшить. Управления из Y_2 дополнительно еще и восстанавливают систему из состояния отказа. Допускается, что после применения управления состояние выбранной этим управлением подсистемы улучшается на случайную величину. Пусть перед применением управления y значение параметра выбранной подсистемы равно θ, то после его применения значение параметра будет случайным, с распределением, зависящим от значения θ и управления y. Параметры других подсистем управление не изменяет.

Применение управления y в состоянии x определяет средний доход в единицу времени $w(x,y)$ на предстоящем периоде.

Конечное множество состояний E_1, в которых отказа не произошло, составлено из N элементов (совпадает с множеством $\hat{E}_0$) и конечное множество состояний E_2 (совпадает с множеством $\hat{E}_0$), в которых отказ произошел, составлен также из N элементов. Множество всех состояний $\hat{E}=E_1\cup E_2$. Далее полагаем, что состояния $\hat{E}$ упорядочены от наилучшего к наихудшему в каждой группе: $x_1,..x_N\in E_1$, $\tilde{x}_1,..\tilde{x}_N\in E_2$.

В момент контроля оценивается состояние системы и, в зависимости от состояния, принимается решение о применении одного из возможных управлений из множества Y. Формально это означает, что задано отображение $f:\hat{E}\to Y$, называемое решающей функцией. Последовательность решающих функций $\pi=(f_1,f_2,...)$ называется стратегией управления.

Обозначим вектор средних доходов в единицу времени системы, управляемой стратегией π, через

$$\varphi(\pi)=\underline{\lim}_{L\to\infty}\frac{1}{L}\mathrm{M}_x^{\pi}\sum_{l=0}^{L-1}w\left(x^l,\,f_l\left(x^l\right)\right),$$

где: M - знак математического ожидания, x - начальное состояние в момент времени $t=0$, x^l - состояние системы в l-ый момент контроля, k -я компонента вектора $\varphi(\pi)$ соответствует началу процесса из состояния $x_k\in\hat{E}$.

Каждой решающей функции f можно поставить в соответствие матрицу переходных вероятностей $Q(f)$ с элементами $Q\left(x_j\middle|x_i,\,f(x_i)\right)$, $i,j=1,\ldots,2N$, и вектор-столбец непосредственных доходов $w(f)$ с компонентами $w(x_i,\,f(x_i))$, $i=1,\ldots,2N$ [3]. Применение управления $f(x)\in Y$ в состоянии $x\in\hat{E}$ обеспечит непосредственный средний доход $w(x,\,f(x))$ в единицу времени на предстоящем периоде и определяет распределение вероятностей $Q\left(\cdot\middle|x,\,f(x)\right)$ на множестве состояний $\hat{E}$ в следующий момент контроля.

Стратегия вида $\pi=f^{(\infty)}=(f,\,f,\ldots)$ называется стационарной. Для стационарной стратегии $f^{(\infty)}$ вектор средних доходов в единицу времени, при некоторых несущественных ограничениях [3], можно записать в виде

$$\varphi(\pi)=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}Q^l(f)w(f),\tag{4.2}$$

где вектор $\varphi(\pi)$ составлен из одинаковых компонент.

Оптимальную стратегию можно искать в классе стационарных стратегий [3].

Стратегия π, максимизирующая $\varphi(\pi)$, называется оптимальной. Поиск оптимальной или близкой к оптимальной стратегии управления надежностью сложной системы является задачей, вариант решения которой предложен в данной работе.

Функция непосредственного дохода $w(x,y)$ системы S вычисляется в условиях имеющейся информации. Она определяется с учетом дохода в единицу времени от функционирования системы на текущем периоде до следующего момента контроля с учетом стоимости управления и средней стоимости восстановления отказавших подсистем. Если, например, в момент контроля система S находится в состоянии x, доход в единицу времени равен ν, случайное время до отказа имеет плотность распределения вероятностей $p(t)$, стоимость управления y равна r_y, средняя стоимость восстановления подсистем равна R_y, восстановления системы S из состояния отказа равна R, то учитывая, что период ς случаен (4.1), получаем:

$$w(x,y)=\int_0^{\tau}\left(\nu-\frac{r_y+R_y+R}{t}\right)p(t)dt+\left(\nu-\frac{r_y+R_y}{\tau}\right)\int_{\tau}^{\infty}p(t)dt.\tag{4.3}$$

Далее рассмотрим действие управления $y^{(i)}\in Y_1$ на состояние сложной системы S. Пусть в момент контроля t_0 параметры подсистем приняли значения, определяемые вектором $\hat{I}(t_0)=\left\{\theta_{l_1}^{(1)}(t_0),\ldots,\theta_{l_n}^{(n)}(t_0)\right\}$. По формуле (2.1) получим функции надежности $P_{\hat{t}^{(k)}}^{(k)}(t)$ всех подсистем для момента времени t_0, затем функцию надежности $P_{t_0}(t)$ системы S и, наконец, состояние $x_u\in E_1$ перед применением управления $y^{(i)}\in Y_1$ по формуле (3.2).

Действие управления $y^{(i)}\in Y_1$ в условиях конкретного набора параметров $\hat{I}(t_0)$ приведет к изменению параметра i–ой подсистемы в соответствии с некоторым вероятностным распределением $\rho\left(\cdot\middle|\theta_{l_i}^{(i)},y^{(i)}\right)$ на $\hat{\Theta}^{(i)}$ и не влияет на параметры других подсистем. Оценка распределения ρ на $\hat{\Theta}^{(i)}$ может быть получена статистическими методами по имеющимся наблюдениям.

Если управление $y^{(i)} \in Y_2$ применяется в системе S в момент отказа, то распределение ρ, в зависимости от конкретной системы, может быть либо тем же, что и для $y^{(i)} \in Y_1$, либо оцениваться отдельно.

Распределение ρ после применения управления $y^{(i)}$ определяет вероятность $\rho\left(\theta_l^{(i)} \middle| \theta_{l_i}^{(i)}, y^{(i)}\right)$ каждого значения параметра $\theta_l^{(i)} \in \hat{\Theta}^{(i)}$, $1 \le l \le M$. Значение параметра $\theta_l^{(i)}$ i-ой подсистемы вместе с фиксированными в момент t_0 значениями параметров других подсистем определяют функцию надежности $P_{t_0}(t,l)$ системы S. Обозначим через μ интервал времени, отсчитанный от момента контроля t_0 такой, что $0 \le \mu \le \tau$. Тогда среднее время до отказа системы, начиная с момента $t_0 + \mu$, при условии, что на интервале времени μ отказ не произошел, равен

$$\bar{t}_{\mu,l} = \int_0^{\infty} t d\left(1 - \frac{P_{t_0}(\mu + t, l)}{P_{t_0}(\mu, l)}\right), \tag{4.4}$$

а состояние системы в этот момент равно $x_{\mu,l} = \frac{\bar{t}_0 - \bar{t}_{\mu,l}}{\bar{t}_0}$. Обозначим $x_{\mu,l} \sim x_\nu$, если состоянию $x_{\mu,l} \in E$ соответствует состояние $x_\nu \in \hat{E}$. Обозначим, далее, множество индексов $J_\nu(\mu) = \{l : x_{\mu,l} \sim x_\nu\}$, $\nu = 1,\dots,N$. Заметим, что при фиксированном μ для некоторых ν оно может быть пустым.

Далее, с учетом сделанных предположений и полученных результатов, найдем переходные вероятности процесса $X(t)$ на заданном интервале времени. Вероятность перехода процесса $X(t)$ на интервале времени $(t_0, t_0 + \mu)$, $0 \le \mu \le \tau$, из состояния $x_u \in \hat{E}$, в котором применено управление $y^{(i)} \in Y$, в состояние $x_\nu \in \hat{E}$, при условии, что на этом интервале отказа системы не произошло, равна

$$p_\mu\left(x_\nu \middle| x_u, y^{(i)}\right) = \sum_{l \in J_\nu(\mu)} \rho\left(\theta_l^{(i)} \middle| \theta_{l_i}^{(i)}, y^{(i)}\right). \tag{4.5}$$

Рассмотрим теперь случай, когда в некоторый момент $t_0 + \mu$ на интервале времени (t_0, τ) произошел отказ системы. Найдем вероятность состояния $x_\nu \in \hat{E}$ системы в момент отказа, при условии, что в момент контроля t_0 в состоянии x_u было применено управление $y^{(i)} \in Y$. Пусть для определенности в момент контроля параметр i–ой подсистемы имел значение $\theta_{l_i}^{(i)} \in \hat{\Theta}^{(i)}$. Для заданного l $(l = 1,\dots,M)$ из уравнения (4.4) находим вместо значения $\bar{t}_{\mu,l}$ при фиксированном μ функцию $t_l(\mu)$ и затем функцию $x_l(\mu) = 1 - \frac{\bar{t}_l(\mu)}{\bar{t}_0}$, $0 \le \mu \le \tau$. Для удобства введем в рассмотрение функцию Хэвисайда $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$ и функцию $\delta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t \le 0 \end{cases}$. В этом случае индикатор попадания величины x в полуинтервал $[a,b)$ можно сконструировать следующим образом: $\Delta_{[a,b)}(x) = \chi(x-a)\chi(b-x) + \chi(\delta(a-x)\delta(x-a))$. При фиксированном l вероятность состояния x_ν в момент отказа с помощью индикатора Δ можно записать в виде:

$\int\limits_0^\tau \Delta_{\left[\frac{\nu-1}{N},\frac{\nu}{N}\right)}(x_l(\mu))d\left(1-P_{t_0}(\mu)\right)$. Учитывая распределение ρ окончательно получаем, что вероятность состояния x_ν в момент отказа, при условии применения управления $y^{(i)}$ в состоянии x_u, равна

$$p_\xi\left(x_\nu \middle| x_u, y^{(i)}\right) = \sum_{l=1}^{M} \rho\left(\theta_l^{(i)} \middle| \theta_{l_i}^{(i)}, y^{(i)}\right) \int\limits_0^\tau \Delta_{\left[\frac{\nu-1}{N},\frac{\nu}{N}\right)}(x_l(\mu))d\left(1-P_{t_0}(\mu)\right). \tag{4.6}$$

Заметим, что если отказа до следующего момента контроля не произошло, то при всех остальных перечисленных выше условиях, с учетом (4.3), вероятность перехода $x_u \to x_\nu$ за период контроля τ равна

$$p_\tau\left(x_\nu \middle| x_u, y^{(i)}\right) = P_{t_0}(\tau) \sum_{l \in J_\nu(\tau)} \rho\left(\theta_l^{(i)} \middle| \theta_{l_i}^{(i)}, y^{(i)}\right). \tag{4.7}$$

5. Матрица переходных вероятностей.

Пусть f - решающая функция. Ей соответствует матрица Q переходных вероятностей размерности $2N \times 2N$. Разделим ее на 4 квадратные подматрицы размерностью $N \times N$:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы $p_\tau\left(x_\nu \middle| x_u, y^{(i)}\right)$ матрицы Q_{11} являются вероятностями перехода системы S из рабочего состояния в момент контроля в рабочее состояние в следующий плановый момент контроля и могут быть вычислены по формуле (4.7). Элементы $p_\xi\left(\tilde{x}_\nu \middle| x_u, y^{(i)}\right)$ матрицы Q_{12}- вероятности перехода из рабочего состояния в момент контроля в состояние отказа в следующий момент контроля и могут быть вычислены по формуле (4.6). Элементы $p_\tau\left(x_\nu \middle| \tilde{x}_u, y^{(i)}\right)$матрицы Q_{21}- вероятности перехода из состояния отказа в рабочие состояния в следующий плановый момент контроля и могут быть вычислены по формуле (4.7). Элементы $p_\xi\left(\tilde{x}_\nu \middle| \tilde{x}_u, y^{(i)}\right)$ матрицы Q_{22}- вероятности перехода из состояния отказа в состояние отказа в следующий момент контроля и могут быть вычислены по формуле (4.6).

6. Функция непосредственных доходов.

Пусть в момент контроля t_0 функция надежности системы S равна $P_{t_0}(t)$. f - решающая функция. Ей соответствует вектор-столбец $w(f)$непосредственных доходов, причем $f(x) \in Y$, $x \in \hat{E}$. k -я компонента вектора $w(f)$содержит значение среднего дохода в единицу времени системы S за один период между двумя последовательными моментами контроля при условии, что в начале периода в момент времени в состоянии $x_k \in \hat{E}$ было применено управление $f(x_k) \in Y$, $k = 1,\ldots,2N$.

Обозначим стоимость применения управления $f(x_k) \in Y$ через $r\left(y^{(i)}\right)$, длительность реализации этого управления через $t(f(x_k))$, стоимость восстановления системы из отказа через R. Средняя длительность восстановления системы из отказа равна T. Заметим, что $r(f(x_k))$ включает среднюю стоимость восстановления отказавших на рассматриваемом периоде подсистем. Будем считать, что работающая система приносит доход ν в единицу времени. Тогда формула (4.3) для вычисления k -ой компоненты вектора $w(f)$ примет следующий вид:

$$w(x_k, f(x_k)) = \int_0^{\tau} \left(\frac{\nu\mu - r(f(x_k)) - R}{\mu + t(f(x_k)) + T} \right) d\left(1 - P_{t_0}(\mu)\right) + P_{t_0}(\tau) \frac{\nu\tau - r(f(x_k))}{\tau + t(f(x_k))}, \ k = 1, \ldots, 2N, \ f(x_k) \in Y.$$

7. Метод и алгоритм оптимизации

Будем считать, что для векторов a и b выполнено неравенство $a \ge b$, если аналогичное неравенство выполнено для всех компонент: $a_i \ge b_i$. Неравенство $a > b$ выполнено, если $a \ge b$ и $a \ne b$.

Стационарная стратегия π^* называется оптимальной, если для любой стационарной стратегии π выполнено неравенство $\varphi(\pi^*) \ge \varphi(\pi)$. Стационарная стратегия π_ε^* называется ε-оптимальной, если для заданного $\varepsilon > 0$ и любой стационарной стратегии π выполнено неравенство $\varphi(\pi) - \varphi(\pi_\varepsilon^*) \le \varepsilon$.

Для прикладных задач ε-оптимальная стратегия управления по разным причинам имеет наибольшую ценность. Далее рассмотрим метод нахождения ε-оптимальной стратегии управления системой S. Воспользуемся известным методом поиска ε-оптимальной стратегии, основанном на принципе сжатых отображений [3]. Предварительно введем следующие вспомогательные определения.

Пусть на векторном пространстве V с элементами v размерности $2N$ определена полунорма $\tilde{p}(v) = \max_i v_i - \min_i v_i$, $1 \le i \le 2N$ [5]. Факторизация V по $K = \{v : p(v) = 0\}$ определяет фактор-пространство $V' = V / K$, на котором $\tilde{p}$ является нормой $\|\cdot\|$ [5].

Определим на V следующие операторы.

$$F(f)v = w(f) + Q(f)v;$$
$$Uv = \max_f F(f)v.$$

В условиях предположения о регулярности переходной матрицы для любой решающей функции f оператор U на V' является сжимающим [3]. Сделанные выше предположения позволяют применить оптимизационный метод, основанный на принципе сжатых отображений [3]. Правило остановки алгоритма будет основано на следующем утверждении.

Утверждение [6]. Пусть $v \in V'$, $\|Uv - v\| = \varepsilon$, $Uv = F(f)v$. Тогда

1. Стратегия $\pi = f^{(\infty)}$ является ε-оптимальной.
2. $\min_x (Uv - v)(x) \le \varphi^* \le \max_x (Uv - v)(x)$.

Здесь φ^* - величина среднего дохода в единицу времени, которая соответствует оптимальной стратегии.

Следствие [6]. Пусть $\pi^* = (f^*, f^*, \ldots)$ - оптимальная стратегия, $v_k, v_{k+1} \in V'$ и f_{k+1} удовлетворяют условиям: $v_{k+1} = Uv_k = F(f_{k+1})v_k$. Обозначим $\varepsilon = \|v_{k+1} - v_k\|$. Тогда решающая функция f_{k+1} определяет ε-оптимальную стратегию $\pi_\varepsilon^* = (f_{k+1}, f_{k+1}, \ldots)$.

Для нахождения ε-оптимальной стратегии необходимо выполнить следующие действия.

1. Выбрать $\varepsilon > 0$.
2. Выбрать произвольно начальный вектор $v_0 \in V'$.

   k-ый шаг алгоритма.
3. Вычислить $v_k = Uv_{k-1} = F(f_k)v_{k-1}$, $v_k \in V'$.
4. Проверить неравенство $\|v_k - v_{k-1}\| < \varepsilon$.

Если оно выполнено, то стратегия $\pi = f_k^{(\infty)}$ является ε-оптимальной.

Если не выполнено, то выполнить $(k+1)$-ый шаг алгоритма.

За конечное число шагов будет достигнута ε-оптимальная стратегия.

Замечание 1. Для определенности удобно выбирать из класса смежности фактор-пространства V' представителя v_k с нулевой первой компонентой.

Замечание 2. Оптимальную стратегию управления можно найти, применив более громоздкий алгоритм Ховарда [7].

8. Заключение

Данная работа является продолжением [1]. Важность решения задачи в рассмотренной постановке было отмечено еще в [2]. В предлагаемой работе рассмотрен вариант решения задачи поддержания уровня надежности и работоспособности сложной технической системы на оптимальном уровне на неограниченном интервале времени. При построении модели допускалось, что простые подсистемы, составляющие рассматриваемую сложную систему, соединены между собой в смысле надежности достаточно произвольно. Одна или несколько простых подсистем в процессе эксплуатации могут отказать. Однако их отказ не обязательно приводит к отказу всей системы, и система продолжает функционировать до момента планового контроля. Если же отказ подсистем привел к отказу всей системы, то система останавливается, проводится внеплановый контроль и применяется управление для восстановления системы. Модель строилась в условиях наличия некоторой статистической информации по каждой простой подсистеме. Эта информация позволила получить оценки функций надежности простых подсистем. На основе полученных оценок построена функция надежности сложной системы и определено ее состояние.

Всякая техническая система в процессе эксплуатации подвержена износу. Износ системы снижает ее производительность, повышает вероятность отказа. Отказ системы связан с ее простоем, обычно приводит к большим потерям и нежелателен. Поэтому вводимое состояние системы должно оценивать степень ее износа и вероятность возможного отказа. Состояние сложной системы, которое определено в модели с помощью функции надежности, содержит интегральную информацию о надежности и работоспособности системы и может быть доступно в каждый момент контроля после получения информации о текущих значениях заданных информативных параметров.

Следует заметить, что случайный процесс изменения состояния системы во времени не является марковским, но последовательность моментов контроля системы перед применением управлений определяет вложенный марковский процесс. Это позволило применить известный оптимизационный метод для нахождения ε -оптимальной стратегии управления. Предложенный алгоритм легко реализовать, например, с помощью математического пакета MAPLE [8].

Дальнейшее развитие модели может быть направлено на обобщение и изменение действия управления в сложной системе. Например, количество подсистем, которые обновляются в результате реализации управления, может быть фиксированным числом больше одного, или может быть случайным числом, зависящим от состояния системы или подсистем. Необходимым условием при этом является перечисление всех возможных управлений заранее в модели.

Функция надежности сложной системы позволяет найти все наборы подсистем такие, что отказ всех подсистем набора приводит к отказу сложной системы. Адекватность модели можно повысить, если прогнозировать не только сам отказ системы, но и возможный набор подсистем, отказ которых привел к отказу всей системы. В этом случае стоимость восстановления будет не усредненной величиной, а суммой стоимостей восстановления каждой отказавшей подсистемы.

В заключение отметим, что точность моделирования системы зависит от количества информации, которой можно располагать при ее моделировании. Введение состояния системы, определяемого контролируемыми параметрами, использование статистической информации о функциях надежности подсистем, составляющих сложную систему, обеспечивают построение более адекватной модели для оптимизации надежности и работоспособности, чем часто используемая для этой цели “наработка на отказ”.

ЛІТЕРАТУРА

1. Подцыкин Н.С. Математическая модель профилактики сложной технической системы. Вісник ХНУ, Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”, Випуск 31, Харків, 2016., с.82-93.

2. Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А. и др. Под ред. Гнеденко Б.В. Вопросы математической теории надежности. – М.: Радио и связь, 1983. – 376с.
3. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 175с.
4. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания, М.: Высшая школа, 2004. – 262с.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. – 443с.
6. Подцыкин Н.С. Оптимизация периода наблюдений в марковском процессе принятия решений. Вісник ХНУ, №629, Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління", Випуск 3, Харків, 2004., с.25-32.
7. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы.: Сов. Радио, 1964. - 189 с.
8. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 800 с Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1981. – 448 с

REFERENCIES

1. N.S. Podtcykin. A mathematical model for the prevention of complex technical systems. Visnyk KhNU, Seria "Mathematical modelviku. Informacion technology. Automation systems management ", Vipusk 31, Kharkiv, pp.82-93, 2016.
2. E.Yu. Barzilovich, Yu.K. Belyaev, V.A. Kashtanov and others. Ed. B.V. Gnedenko. Mathematical theory of reliability issues. - M.: Radio and communication, 1983.
3. H. Main, S. Osaki. Markov decision-making processes. - M .: Science, 1977.
4. A.L. Gorelik., V.A. Skripkin. Recognition methods, M.: Higher School, 2004.
5. U. Rudin. Functional analysis. M .: Mir, 1975.
6. N.S. Podtcykin. Optimization of the observation period in the Markov decision-making process. Visnyk KhNU, №629, Seria "Mathematical Modeling. Informacion technology. Automation systems management ", Vipusk 3, Kharkiv, pp. 25-32, 2004.
7. R.A. Howard. Dynamic programming and Markov processes .: Sov. Radio, 1964.
8. V.P. Dyakonov. Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations. - M .: DMK Press, 2011.

Подцикін Микола Серафимович *– кандидат технічних наук, доцент; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків-22, майдан Свободи, 4, 61022; e-mail: nick_p_2018@ukr.net; ORCID: 0000-0001-5814-9164.*

Надійшла у першій редакції 30.08.2018, в останній – 14.10.2018.