

УДК 519.6

Метод дискретних особливостей у задачах коливань заповнювача паливних баків при перевантаженнях та в умовах низької гравітації

В.І. Гнітько, К.Г. Дегтярьов, М.Л. Мироненко

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАНУ,
вул. Пожарського, 2/10., Харків, 61046, Україна*

Розглянуто задачі коливань рідини в паливних баках з різним рівнем заповнення в умовах дії перевантажень або низької гравітації. Припускається, що баки є жорсткими оболонками обертання. Розглядається ідеальна нестислива рідина. Її течія, індукована зовнішніми впливами, вважається потенційною. Сформульовано мішану крайову задачу та відповідні граничні умови на жорсткій поверхні оболонки та вільній поверхні рідини з урахуванням сил поверхневого натягу. Задачу визначення потенціалу швидкостей і функції, що характеризують рівень підйому вільної поверхні, зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Числовий розв'язок цієї системи здійснюється методом дискретних особливостей.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, ідеальна нестислива рідина, метод дискретних особливостей, плескання, низька гравітація, оболонка обертання.

Рассмотрены задачи колебаний жидкости в топливных баках с различным уровнем заполнения в условиях действия перегрузок или низкой гравитации. Предполагается, что баки представляют собой жесткие оболочки вращения. Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость. Ее течение предполагается потенциальным. Сформулирована смешанная краевая задача и соответствующие граничные условия на жестких смоченных поверхностях оболочки и на свободной поверхности жидкости с учетом сил поверхностного натяжения. Задача определения потенциала скоростей и функции, характеризующей уровень подъема свободной поверхности, сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Численное решение этой системы осуществляется методом дискретных особенностей.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, идеальная несжимаемая жидкость, метод дискретных особенностей, плескания, низкая гравитация, оболочка вращения.

The paper is about free vibration problems in fuel tanks with different levels of fillers both under overloads and low gravity. The fuel tanks are considered as rigid shells of revolution. The liquid, contained in the tanks, is supposed to be an ideal and incompressible one, and its flow, induced by external excitations, is irrotational. The problem of free axisymmetric harmonic oscillations of the fluid-filled rigid compound shell is considered. The mixed boundary value problem is formulated, and boundary conditions are received on the boundaries of the fluid domain. The non-penetration conditions is formulated on the rigid shell boundaries, and on the free liquid surface there are kinematic and dynamic boundary conditions. The flow fluctuations are described by using the velocity potential that for ideal and incompressible liquids satisfies the Laplace equation. For its solution, the integral representation is in use. But there are two unknown functions, the velocity potential and the function describing the shape and position of the free surface during time. The transformation of the boundary conditions leads to eliminating one of these unknown functions. So, the system of boundary singular integral equations is obtained to determine the velocity potential. The discrete singularity method and the boundary element method are applied for its numerical solution. The problem of determining own modes and frequencies is solved by using the techniques, where the surface tension effects are neglected. Then these modes are considered as basic functions to determine the modes and frequencies of the liquid taking into account the surface tension. Thus, in this work the method is developed which takes into account the surface tension effect on the frequency of fluid fluctuations in the rigid tank under low gravity conditions. The surface of the interaction between liquid media and gas is considered as a thin membrane, whose thickness is neglected. The fluid pressure on this surface is determined by the Laplace-Young equation. The developed method is useful for the investigation of free and forced fluid oscillations in rigid compound shells with arbitrary meridians.

Key words: singular integral equations, ideal incompressible liquid, discrete singularity method, sloshing, low gravity, shell of revolution.

1. Вступ

Проблема втрати стійкості космічних апаратів включає низку можливих причин та бере свій початок ще з тих етапів розвитку авіації, коли вперше спостерігали явища, які викликали нестійкість літального апарату. Було розроблено низку інженерних конструкторських рішень, які з розвитком ракетно-космічної техніки потребували перегляду. Розробка потужних ракетноносіїв призвела до появи нових форм нестійкості. Специфічні форми нестійкості ракетно-космічної техніки пов'язані з рухливістю палива, що частково заповнює паливні баки. Вирішення практичних та теоретичних задач щодо динамічної стійкості рідкопаливних ракетноносіїв дозволяє виділити фактори впливу та шляхи покращення динамічних характеристик ракетноносіїв з метою підвищення надійності ракетно-космічних систем.

2. Аналіз останніх досліджень та публікацій

Значна кількість робіт вітчизняних та зарубіжних вчених розглядає різні аспекти виникнення нестійкості, а також варіанти їх усунення. Дослідження спільних коливань твердих тіл і рідин, що їх заповнюють, були проведені радянським вченим Г.С. Нарімановим у 50-х роках минулого століття та започаткували низку оригінальних наукових результатів, які сприяли практичному вирішенню проблем стійкості ракетноносіїв. У книзі [1] автор надає модель пружних деформацій вигину корпусу ракетноносія без урахування коливань рідини. Вплив рухливості рідини з вільною поверхнею на стійкість вивчили Г.Н. Мікішев та Б.І. Рабінович [2] у своїх спільних дослідженнях. Також у книзі [3] значну увагу приділено впливу рухливості рідкого палива у баках та урахування пружності корпусу ракетноносія при визначенні динамічних характеристик ракет. Математичним моделям космічних літальних апаратів, як пружним конструкціям з рідиною, їх параметрам, методам визначення динамічних характеристик присвячено монографію Мікішева Г.Н. [4]. Книга Рабіновича Б.І. [5] основну увагу приділяє комплексу задач динаміки, а саме динамічній стійкості замкнутої системи корпус - рідина - автомат стабілізації - двигун з урахуванням рухливості палива та пружності корпусу. Велика кількість досліджень присвячена коливанням рідини в резервуарах за різних умов заповнення та рівня гравітації, [6] – [8] та ін. Праці американських вчених Абрамсона [9] та Ібрагіма [10] містять всебічний аналіз динамічної поведінки рідини в резервуарах, які рухаються, включаючи результати проведених аналітичних та експериментальних досліджень. Проте досить складно безпосередньо застосовувати обчислювальну тривимірну гідродинамічну модель при проектуванні резервуарів, оскільки проведення такого аналізу потребує значних витрат часу та зусиль. Тому актуальним є розроблення ефективних методів на основі числових алгоритмів, що використовують теорію потенціалу [11,12].

3. Постановка задачі

В даній роботі розглянуто задачу вільних осесиметричних гармонічних коливань рідини, що заповнює жорстку оболонку. Позначимо змочену поверхню оболонки як S_1 , а вільну поверхню – S_0 . Нехай R – радіус циліндричної частини, H – висота змоченої частини оболонки. Слід зазначити, що вільна поверхня S_0 є поверхнею розподілу між двома середовищами: рідина-газ. Її буде розглянуто як тонку мембрану, якщо враховується вплив поверхневого натягу.

Припустимо, що рідина є нестисливою, $\rho_l = \text{const}$; потік рідини безвихровий, тому існує потенціал швидкості $\mathbf{v} = \nabla\varphi$; на рідину впливає гравітаційне поле, тому єдиною зовнішньою силою, що діє на систему, є сила тяжіння $\mathbf{F} = \rho_l \mathbf{g}$. Значення гравітаційної сталої \mathbf{g} може змінюватись під час місії. Оскільки стінки оболонки є жорсткими, то швидкість \mathbf{v} має лише тангенціальну складову, тому:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0,$$

де \mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль до поверхні. Динамічна гранична умова на вільній поверхні має такий вигляд:

$$\left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right|_{S_0} + g \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = 0.$$

Таким чином, отримано граничні та початкові умови для динамічної системи і сформульовано крайову задачу для рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0; \quad \left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right|_{S_0} + g \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0}. \quad (3.1)$$

Також врахуємо умову існування розв'язку

$$\iint_{S_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS_0 = 0$$

Тут невідома функція ζ описує форму вільної поверхні та її положення.

4. Математична модель. Вплив поверхневого натягу

Нехай σ – поверхневий натяг. За формулою Лапласа-Юнга [10] маємо

$$p_s = \sigma \kappa, \quad (4.1)$$

де κ – кривина поверхні. Вираз для κ можна лінеаризувати [10]:

$$\kappa = -\Delta_s \zeta, \quad (4.2)$$

де Δ_s – поверхневий оператор Лапласа. Таким чином, динамічна гранична умова на вільній поверхні приймає вигляд:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \zeta - \frac{\sigma}{\rho_l} \Delta_s \zeta \Big|_{S_0} = 0. \quad (4.3)$$

Припустимо, що

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

Отримуємо таку крайову задачу для функції ψ :

$$\Delta \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g} \psi \Big|_{S_0}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (4.5)$$

Ці співвідношення приводять до задачі на власні значення. Власні значення є частотами вільних коливань χ_k , а власні вектори $\varphi_k(\mathbf{r})$ – формами вільних коливань. Кожен з цих власних векторів є розв'язком системи (4.5), а потенціал швидкості, що описує задачу (3.1), приймає вигляд

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}, t). \quad (4.6)$$

Вираз для функції $\zeta(\rho, t)$ знаходимо з рівняння (4.3) в (3.1) на вільній поверхні, тобто маємо

$$\zeta(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, \zeta_0(\rho))}{\partial \mathbf{n}}. \quad (4.7)$$

Крайова задача (4.5) зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь з використанням методу граничних елементів у його прямому формулюванні [13].

Задача визначення функцій $\varphi_k(\mathbf{r})$ і частот χ_k розв'язується за допомогою методів, описаних у [14,15], де не враховувалися ефекти поверхневого натягу.

5. Частоти коливань при врахуванні поверхневого натягу

Підставляючи ряди (4.6), (4.7) з N складовими для потенціалу φ і рівня підйому висоти вільної поверхні ζ в граничну умову (4.3), можна отримати

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\sigma}{\rho_l} \sum_{k=1}^N c_k(t) \Delta_s \left(\frac{\partial \varphi_k(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) = 0. \quad (5.1)$$

Припустимо, $c_k(t) = a_k e^{i\omega t}$ і виконаємо скалярний добуток виразу (5.1) і функцій $\varphi_i(\mathbf{r})$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Отримуємо внаслідок ортогональності форм коливань

$$-\omega^2 a_i + \chi_i^2 a_i - \frac{\sigma}{\rho_l g} \sum_{k=1}^N a_k \chi_k^2 \frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = 0. \quad (5.2)$$

Це приводить до задачі власних значень у такому вигляді:

$$\mathbf{G} \mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T, \quad \mathbf{G} = \left\{ \chi_k^2 \left[\delta_{ik} - \frac{\sigma}{\rho_l g} \frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \right] \right\}_{i,k=1}^N. \quad (5.3)$$

Для циліндричних і складених оболонок обертання поверхневий оператор Лапласа Δ_s в циліндричних координатах для осесиметричних задач має вигляд $\Delta_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$. Таким чином, використовуючи інтеграцію частинами в скалярному добутку $(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)$ і враховуючи, що $(\varphi_i)'_{\rho} \Big|_{\rho=R} = 0$, отримаємо $(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i) = -((\varphi_k)'_{\rho}, (\varphi_i)'_{\rho})$.

Для циліндричних оболонок аналітичні вирази для $\varphi_k(\mathbf{r})$ в осесиметричних випадках отримані через функції Бесселя першого роду [10], а саме:

$$\varphi_k(\rho, z) = J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\rho\right) \cosh\left(\frac{\mu_k}{R}z\right) \cosh^{-1}\left(\frac{\mu_k}{R}H\right), \quad (5.4)$$

де значення μ_k є коренями рівняння $J'_0(\rho) = 0$. Слід зазначити, що якщо μ – корінь рівняння $J'_0(\rho) = J_1(\rho) = 0$, то мають місце наступні формули:

$$\int_0^R \rho J_0^2\left(\frac{\mu}{R}\rho\right) d\rho = \frac{1}{2} J_0^2(\mu), \quad \int_0^R \rho J_1^2\left(\frac{\mu}{R}\rho\right) d\rho = \frac{1}{2} J_1^2(\mu), \quad 2J'_1(\mu) = J_0(\mu) - J_2(\mu),$$

$$2J_1(\mu) = \mu[J_0(\mu) + J_2(\mu)] = 0 \Rightarrow J_2(\mu) = -J_0(\mu). \quad (5.5)$$

Отже, можна отримати вираз $\frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = -\frac{\mu_k^2}{R^2} \delta_{ik}$ та наступну формулу для частот коливань з урахуванням поверхневого натягу:

$$\omega_k^2 = \chi_k^2 \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g R^2} \mu_k^2 \right).$$

Якщо ввести число Бонда $Bo = (\rho g R^2) / \sigma$, то результат врахування поверхневого натягу можна оцінити за формулою:

$$\omega_k^2 / \chi_k^2 = \left(1 + \mu_k^2 / Bo \right). \quad (5.6)$$

Формула (5.6) відповідає результатам, отриманим у [10]. Це свідчить, що запропонований підхід може бути застосований до оцінки частот коливань рідини в жорсткому резервуарі за умови низької гравітації.

6. Метод сингулярних інтегральних рівнянь

З використанням основного інтегрального співвідношення [13]

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS, \quad S = S_0 \cup S_1 \cup S_2, \quad (6.1)$$

де $|P-P_0|$ – декартова відстань між точками P_0 і P , що знаходяться на межі області S , зводимо задачу визначення власних форм $\varphi_k(\mathbf{r})$ та відповідних їм частот до системи інтегральних сингулярних рівнянь, як в [14, 15]

$$\begin{cases} 2\pi\varphi + \iint_{S_1 \cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS = 0, \\ - \iint_{S_1 \cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

Двовимірні інтеграли в (6.2) при цьому зводяться до одновимірних, які обчислюються вздовж контуру оболонки та радіусу вільної поверхні, при цьому застосовувався метод дискретних особливостей, запропонований Ю.В. Ганделем в [16].

7. Аналіз числових результатів

Розглянуто коливання рідини в жорсткій оболонці обертання, яка складається з циліндричної та сферичної частин (рис. 7.1а).

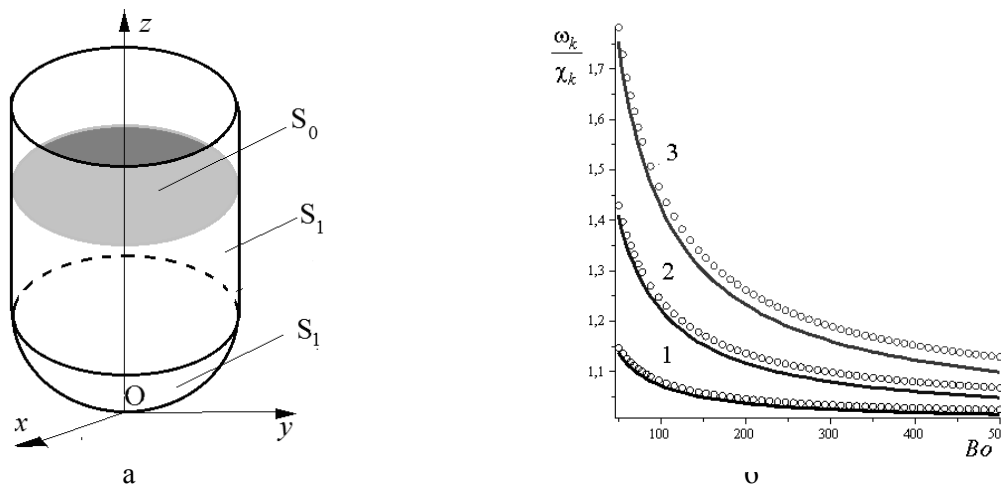


Рис. 7.1 Оболонка обертання, частково заповнена рідиною

Вважалось, що радіус оболонки дорівнював $R=1\text{м}$, а її рівень заповнення рідиною складав $H=2\text{м}$. Вільна поверхня у стані спокою займала положення $z=H$. Користуючись результатами, отриманими в [11, 14], було встановлено, що при застосуванні 180 граничних елементів вздовж меридіану оболонки та 60 граничних елементів вздовж радіусу вільної поверхні зі сталою апроксимацією густини (що відповідає ідеології методу дискретних особливостей) досягається точність $\varepsilon=10^{-3}$ у порівнянні з аналітичним розв'язком для циліндричної оболонки [10]. Тому саме таке число елементів було використано при числовому моделюванні коливань рідини в складеній оболонці обертання, (рис. 7.1б).

Бачимо, що ефект поверхневого натягу зменшується із зростанням числа Бонда, цей ефект є більш суттєвим на вищих частотах коливань.

У наведеному прикладі форма днища незначно впливає на значення частот.

8. Перспективи подальших досліджень

Передбачається провести дослідження впливу кривини вільної поверхні на частоти коливань заповнювача за умови низької гравітації.

9. Висновки

Таким чином, в даній роботі розроблено метод, що наближено враховує вплив поверхневого натягу на частоти коливань рідини в жорсткому резервуарі за умови низької гравітації. Поверхня взаємодії середовищ «рідкий заповнювач-газ» розглядається як тонка мембрана, товщиною якої можна знехтувати. Тиск рідини на цій поверхні визначається за допомогою рівняння Лапласа-Юнга. Слід також зауважити, що розроблений метод буде корисним для дослідження вільних і вимушених коливань рідини в жорстких оболонках обертання з довільним меридіаном.

ЛІТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. Динамика деформируемых систем. М.: Военная арт. инж. академия им. Ф.Э. Дзержинского, 1958. 175 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
3. Абгарян К. А., Калязин Э. Л., Мишин В. П. и др. под общ. ред. Мишина В. П. Динамика ракет: Учебник для студентов вузов / 2-е изд., перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1990. 464 с.
4. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
5. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 416 с.
6. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1, no. 1. P.14-27.

7. Karagiozis K. N., Païdoussis M. P., Misra A. K. Transmural pressure effects on the stability of clamped cylindrical shells subjected to internal fluid flow: theory and experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2007. Vol. 42, Issue 1. P. 13-23.
8. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012. N 70. P. 1335 – 1354.
9. Abramson, H.N., The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers, NASA SP- 106, Washington, D.C., 1966, updated by Dodge, F.T., Southwest Research Institute, 2000.
10. Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge University Press, 2005Bochkarev S.A., Matveyenko V.P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Appl. Math. Mech.*, 2010. Vol. 74, no. 4. P. 467–474.
11. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid: Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, *Transaction on Modeling and Simulation*. 2010. Vol.50. P. 203-211.
12. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. 6(6). P. 976-988.
13. Brebbia C.A, Telles J.C.F & Wrobel, L.C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
14. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, *Transaction on Modeling and Simulation*. 2011. Vol. 52. P. 285-296.
15. Gnitko V., Degtyariv K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017. Vol. 5(3). P. 317-328.
16. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems, *Differ. Equ.* 2003. 39:9 P.1295–1307.

REFERENCES

1. Narimanov G. S. *Dynamics of deformable systems*. Moscow, Military artillery engineering academy named after F.E. Dzerzhinsky, 175 p. (Rus. ed.: Narimanov, G. S. Dinamika deformiruemyih sistem. Moscow, Voennaya art. inzh. akademiya im. F.E. Dzerzhinskogo, Russia, 1958, 175 p.). [in Russian]
2. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dynamics of a solid with cavities partially filled with liquid*. Moscow, Mechanical engineering, 1968, 464 p. (Rus. ed.: Mikishev G. N., Rabinovich B. I. Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 532 p.) [in Russian]
3. Abgaryan K. A., Kalyazin E. L., Mishin V. P. and others under the general editorship of Mishin V. P. *Rocket Dynamics*. Moscow, Mechanical Engineering, 1990, 464 p. (Rus. ed.: Mikishev G. N., Rabinovich B. I. Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 464 p.) [in Russian]
4. Mikishev G. N. *Experimental methods in the dynamics of spacecraft*. Moscow, Mechanical engineering, 1968, 248 p. (Rus. ed.: Mikishev G. N. Eksperimentalnyie metody v dinamike kosmicheskikh apparatov. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 248 p.) [in Russian]
5. Rabinovich B. I. *Introduction to the dynamics of launch vehicles of spacecraft*. Moscow, Mechanical engineering, 1975, 416 p. (Rus. ed.: Rabinovich B. I. Vvedenie v dinamiku raketnositeley kosmicheskikh apparatov. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 416 p.) [in Russian]
6. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. “Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles”. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences* 1, N 1, pp.14-27, 2016.
7. Karagiozis K. N., Païdoussis M. P., Misra A. K. “Transmural pressure effects on the stability of clamped cylindrical shells subjected to internal fluid flow: theory and experiments”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, Issue 1, P. 13-23, 2007.

8. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. "Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow". *Nonlinear Dynamics*, N 70, P. 1335 – 1354, 2012.
9. Abramson H.N. *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*, NASA SP- 106, Washington, D.C., 1966, updated by Dodge, F.T., Southwest Research Institute, 2000.
10. Ibrahim R. A., "Liquid sloshing dynamics: theory and applications". *Cambridge University Press*, 2005.
11. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. "Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid", Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2010. Vol.50. P. 203-211.
12. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova, E., "Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks" *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, 6(6), pp. 976-988, 2018.
13. Brebbia C.A, Telles J.C.F & Wrobel L.C., *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
14. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E., "Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. Vol. 52. P. 285-296. 2011.
15. Gnitko V., Degtyariov K., Naumenko V., Strelnikova E. "BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles". *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, Vol. 5(3), P. 317-328, 2017.
16. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, "Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Problems", *Differ. Equ.* 39, P.1295–1307, 2003.

Мироненко Марія Леонідівна – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0266-4463.

Myronenko Maria L. – PhD student, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0266-4463.

Мироненко Марія Леонидовна – аспірант, Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України, ул. Пожарського, 2/10, г. Харьков, Україна, 61046; e-mail: mariamyronenko87@gmail.com; ORCID: 0000-0002-0266-4463.

Гнітько Василь Іванович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: 0000-0003-2475-5486.

Gnitko Vasyl I. – PhD, Senior Research Fellow, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: 0000-0003-2475-5486.

Гнидько Василий Иванович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: 0000-0003-2475-5486.

Дегтярьов Кирило Георгійович – провідний інженер, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: kdeg89@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Degtyarev Kirill G. – Senior Engineer, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: kdeg89@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Дегтярев Кирилл Георгиевич – ведущий инженер, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046; e-mail: kdeg89@gmail.com; ORCID: 0000-0002-4486-2468.