DOI: 10.26565/2304-6201-2019-41-07

УДК 539.3

# Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах колебаний жидкости в коаксиальных оболочках

[1]Ю.В. Науменко, [2]Л.В. Розова, [1,3]Е.А. Стрельникова, [1]О.А. Усатова
[1] *Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ,*
*ул. Пожарского, 2/10,. Харьков, 61046, Украина*
[2]*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»*
*ул. Кирпичева 2, Харьков 61002, Украина*
[3]*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*
*площадь Свободы 4, Харьков, 61022*
*elena15@gmx.com*

Рассматривается задача о свободных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в коаксиальных оболочках вращения. Предполагается, что движение жидкости является безвихревым. Это позволяет ввести потенциал скоростей. Относительно потенциала скоростей сформулирована краевая задача, которая далее сводится к проблеме собственных значений. Для решения краевой задачи для уравнения Лапласа применен метод граничных элементов в прямой формулировке. Полученное сингулярное уравнение решается методом дискретных особенностей. Область интегрирования содержит свободную поверхность жидкости, которая в случае коаксиальных оболочек представляет собой кольцо. Проведено численное исследование, позволившее определить частоты и формы плесканий жидкости в оболочках при разных отношениях радиусов внутренней и внешней цилиндрических коаксиальных оболочек.

***Ключевые слова****: сингулярное интегральное уравнение, численное решение, коаксиальные оболочки, плескания жидкости, свободные колебания*

Розглянуто задачу про вільні коливання ідеальної нестисливої рідини в коаксіальних оболонках обертання. Вважається, що рух рідини є безвихровим, що дозволяє ввести потенціал швидкостей. В зазначених умовах потенціал швидкостей задовольняє рівнянню Лапласа. Граничні умови сформульовано на змочених поверхнях оболонкової системи та на вільній поверхні рідини. Умова непротікання має виконуватись на змочених поверхнях. На вільній поверхні застосовуємо динамічну та кінематичну граничні умови. Динамічна гранична умова полягає в рівності тиску рідини на вільній поверхні атмосферному тиску. Кінематична гранична умова потребує виконання рівності нулю повної похідної за часом від функції, що описує рівень підйому вільної поверхні в кожний момент часу. Відносно потенціалу швидкостей сформульовано крайову задачу, яку далі зведено до проблеми власних значень. Для розв’язання крайової задачі для рівняння Лапласа застосований метод граничних елементів в прямому формулюванні. Осесиметрична форма оболонок обертання дозволяє звести отриману при цьому систему сингулярних інтегральних рівнянь до одновимірних рівнянь. Ядра сингулярних операторів в цих рівняннях зображені у термінах еліптичних інтегралів першого та другого роду та мають логарифмічні особливості. Розроблено спеціальну процедуру для ефективного обчислення таких інтегралів. Отримане сингулярне рівняння розв’язано методом дискретних особливостей. Область інтегрування містить вільну поверхню рідини, яка в разі коаксіальних оболонок має вигляд кільця. Таким чином, встановлено можливість використання методу граничних інтегральних рівнянь сумісно з методом дискретних особливостей для розв’язання сингулярних інтегральних рівнянь з незв’язною межею. Проведено числове дослідження, яке дало можливість визначити частоти і форми плескань рідини в оболонкових системах при різних відношеннях радіусів внутрішньої і зовнішньої циліндричних коаксіальних оболонок. Отримані форми власних коливань рідини можна застосовувати як базисні функції при вивченні вимушених коливань рідини в резервуарах.

**Ключові слова:** *сингулярне інтегральне рівняння, чисельний розв’язок, коаксіальні оболонки, плескання рідини, вільні коливання.*

The paper deals with the problem of free vibrations of an ideal incompressible fluid in coaxial shells of revolution. It is assumed that the motion of the fluid is irrotational that allows us to introduce the velocity potential. In these suppositions the potential is satisfied to Laplace equation. The boundary conditions are formulated on the wetted surfaces of the shells and on the free liquid surface. The non-penetration conditions are applied to the wetted surfaces. On the free surface we consider dynamical and kinematical boundary conditions. The dynamical condition consists in equality of the liquid pressure on the free surface to the atmospheric one. The kinematic condition requires that total time derivative of the free surface elevation will be equal to zero at any instant. Regarding the potential of velocities, a boundary value problem is formulated that is further reduced to the eigenvalue problem. To solve the boundary value problem for the Laplace equation, the boundary element method is used in a direct formulation. The axial symmetric form of the shells allows us to reduce the obtained system of singular equations to one-dimensional equations. The kernels in singular operators of obtained integral equations are expressed on terms of elliptical integrals of the first and second kinds, and have the logarithmic singularities. The special numerical technique is elaborated to treat with such kind integral equations. The resulting one-dimensional singular equation is solved by the method of discrete singularities. The integration region contains the free surface of the fluid that in the case of coaxial shells is a ring. So, the possibility of using the boundary integral equation approach coupled with application of the discrete singularities method is established to solution of the singular integral equation with incoherent boundaries. A numerical study has been carried out that made it possible to determine the frequencies and modes of the liquid sloshing in the shells for different ratios of the inner and outer radii of cylindrical coaxial shells. The obtained modes of natural vibrations will be used for numerical simulation of forced liquid vibrations in the tanks and reservoirs.

***Key words:*** *singular integral equations, numerical solution, coaxial shells, splashing fluid, free vibrations.*

## 1. Вступ

Коаксиальные оболочки вращения, частично заполненные жидкостью, широко используются как конструктивные элементы в различных инженерных приложениях, например, в нефтехимической и атомной промышленности. Системы трубопроводов также могут моделироваться коаксиальными оболочками, между которыми движется жидкость [1-3]. Применение аналитических методов для изучения вибраций таких систем возможно лишь для сравнительно небольшого класса коаксиальных оболочек. Поэтому многие проблемы расчета частот и форм колебаний жидкости в коаксиальных оболочках остаются нерешенными и требуют развития современных эффективных численных методов. В данной работе для расчета частот и форм свободных колебаний жидкости в жестких коаксиальных оболочках вращения применен метод граничных элементов. Нами использованы разработанные ранее методы решения сингулярных интегральных уравнений, возникающие в задачах о колебаниях оболочек, частично заполненных жидкостью [4-6]. В [4] изучены свободные и вынужденные колебания упругих оболочек вращения с жидкостью; в [5] рассмотрен случай действия сейсмической нагрузки; в [6] рассмотрены большие амплитуды внешнего воздействия, что привело к появлению хаотического характера колебаний. Целью данной работы является обобщение методов граничных интегральных уравнений и дискретных особенностей для определения частот и форм свободных колебаний жидкости в жестких коаксиальных оболочках.

## 2. Общая постановка задачи

Рассматриваются две коаксиальные жесткие оболочки. Область между оболочками может быть полностью или частично заполнена идеальной несжимаемой жидкостью, рис.2.1.

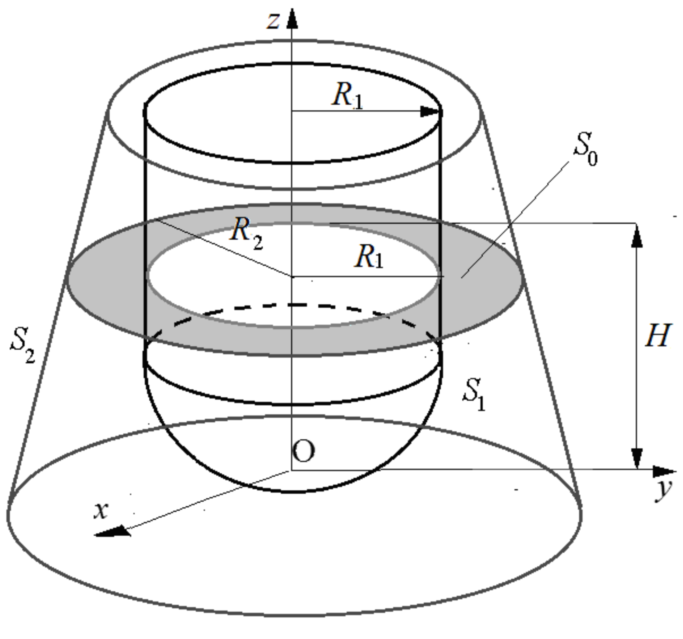


*Рис. 2.1. Коаксиальные оболочки, содержащие жидкость*

Требуется найти частоты и формы колебаний жидкости, заполняющей область между оболочками. Предполагается, что движение жидкости безвихревое. В этих условиях существует потенциал скоростей Ф, удовлетворяющий всюду внутри области, занятой жидкостью, уравнению Лапласа. Давление жидкости $p$ на смоченные поверхности оболочечной системы определяется из линеаризованного интеграла Бернулли

$$p - p_0 = -\rho_l\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + gz\right) \tag{2.1}$$

Здесь $g$ - ускорение свободного падения, $\rho_l$-плотность жидкости, $p_0$- атмосферное давление. Для решения уравнения Лапласа зададим краевые условия. На смоченных поверхностях коаксиальных оболочек $S_1, S_2$ потребуем выполнения условия непротекания

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_1} = 0\,,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_2} = 0\,. \tag{2.2}$$

На свободной поверхности $S_0$ зададим кинематическое и динамическое условия. Динамическое условие состоит в равенстве давления жидкости на свободной поверхности атмосферному давлению $p_0$, а кинематические условие заключается в требовании равенства нулю полной производной по времени от функции, описывающей уровень подъема свободной поверхности

$$\left.p - p_0\right|_{S_0} = 0,\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}\,. \tag{2.3}$$

Здесь функция $\zeta$ описывает форму свободной поверхности и ее положение. Отметим, что на свободной поверхности динамическое условие приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta = 0\,. \tag{2.4}$$

Продифференцируем соотношение (2.4) по $t$ и подставим полученное равенство во второе из соотношений (2.3). Приходим к следующей краевой задаче относительно неизвестного потенциала скоростей $\Phi$

$$\Delta\Phi = 0,\quad \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right|_{S_0} + g\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_0} = 0,\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_1,S_2} = 0\,. \tag{2.5}$$

Для однозначной разрешимости краевой задачи (2.5) потребуем выполнения условия Неймана

$$\int_{S_0}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}dS_0 = 0\,. \tag{2.6}$$

В предположении, что рассматривается задача о малых колебаниях жидкости, неизвестный потенциал скоростей представляем в виде

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r})e^{i\omega t},\quad i^2 = -1,\quad \mathbf{r} = (x,y,z). \tag{2.7}$$

Приходим к проблеме собственных значений

$$\Delta\varphi = 0,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g}\left.\varphi\right|_{S_0},\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S_{1,2}} = 0,\ \iint_{S_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}dS_0 = 0. \tag{2.8}$$

Здесь $\omega$ - частота собственных колебаний жидкости в системе из коаксиальных оболочек.

**3. Метод сингулярных интегральных уравнений**

В области, занятой жидкостью и ограниченной поверхностями $S_0, S_1, S_2$, для определения гармонической функции $\varphi$ используем следующее интегральное представление [7]:

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P - P_0|}dS - \iint_S\varphi\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\frac{1}{|P - P_0|}dS,\quad S = S_0\cup S_1\cup S_2. \tag{3.1}$$

Здесь $|P - P_0|$ - декартово расстояние между точками $P_0$ и $P_1$, находящимися на границе области $S$, $\mathbf{n}$ - орт внешней нормали к поверхности $S$.

В [8] показано, что при использовании интегрального представления (3.1) краевая задача (2.8), описывающая проблему собственных значений, сводится к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi + \iint\limits_{S_1\cup S_2} \varphi \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\dfrac{1}{|P-P_0|}\right)dS - \dfrac{\chi^2}{g}\iint\limits_{S_0}\varphi_0 \dfrac{1}{|P-P_0|}dS + \iint\limits_{S_0}\varphi_0 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{|P-P_0|}\right)dS = 0, \\ -\iint\limits_{S_1\cup S_2} \varphi \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\dfrac{1}{|P-P_0|}\right)dS - 2\pi\varphi_0 + \dfrac{\chi^2}{g}\iint\limits_{S_0}\varphi_0 \dfrac{1}{|P-P_0|}dS = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

В уравнениях (3.2) через $\varphi$ обозначены неизвестные значения потенциала на поверхностях $S_1, S_2$, а через $\varphi_0$ – значения потенциала на свободной поверхности $S_0$.

Далее, аналогично [9] вводим интегральные операторы

$$\mathbf{A}\varphi = 2\pi\mathbf{I}\varphi + \iint\limits_{S_1\cup S_2} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{1}{r(P,P_0)}dS\,,\ \mathbf{B}\varphi_0 = \iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{1}{r}dS,\ \mathbf{C}\varphi_0 = \iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dS\,,$$

$$\mathbf{D}\varphi = -\iint\limits_{S_1\cup S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{1}{|P-P_0|}dS\,,\ \mathbf{F}\varphi_0 = \iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{1}{r}dS\,. \tag{3.3}$$

С использованием (3.3) приводим краевую задачу (2.8) к следующей операторной форме:

$$\mathbf{A}\varphi = \frac{\chi^2}{g}\mathbf{B}\varphi_0 - \mathbf{C}\varphi_0\,,\quad P_0 \in S_1 \cup S_2\,,\ \mathbf{D}\varphi = 2\pi\mathbf{I}\varphi_0 - \frac{\chi^2}{g}\mathbf{F}\varphi_0\,,\qquad P_0 \in S_0\,. \tag{3.4}$$

Исключив из уравнений (3.4) функцию $\varphi$, получим задачу на собственные значения в операторной форме, при этом неизвестными будут лишь значения потенциала $\varphi_0$ на свободной поверхности

$$(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{C} + 2\pi\mathbf{I})\gamma_0 - \lambda(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{F})\varphi_0 = 0,\quad \lambda = \chi^2/g. \tag{3.5}$$

Собственные значения и собственные векторы проблемы собственных значений (3.5) являются частотами и формами свободных колебаний жидкости в системе коаксиальных оболочек.

Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - образующая составной оболочки вращения. В [8-9] получены следующие соотношения:

$$\iint\limits_{S_1\cup S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\frac{1}{|P-P_0|}\right)dS = \int\limits_{\Gamma}\varphi(z)\Theta(z,z_0)r(z)d\Gamma\,,\ \iint\limits_{S_0}\varphi_0\frac{1}{|P-P_0|}dS_0 = \int\limits_0^R \varphi_0(r)\Phi(P,P_0)rdr\,,$$

$$\Theta(z,z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}}\left\{\frac{1}{2r}\left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b}\mathsf{E}_\alpha(k) - \mathsf{F}_\alpha(k)\right]n_r + \frac{z_0 - z}{a-b}\mathsf{E}_\alpha(k)n_z\right\},$$

$$\Phi(P,P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}}\mathsf{F}_\alpha(k);\ \mathsf{E}_\alpha(k) = (-1)^\alpha\left(1 - 16\alpha^2\right)\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2\alpha l\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi\,,$$

$$\mathsf{F}_\alpha(k) = (-1)^\alpha\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos 2\alpha l\psi d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,,\ a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2,\ b = 2rr_0,\ k^2 = \frac{2b}{a+b},\ l = 1. \tag{3.5}$$

Формулы (3.5) позволяют свести двумерные интегралы (3.3) к одномерным, которые вычисляются по образующей составной оболочки и вдоль радиуса свободной поверхности. Полученное в результате применения формул (3.5) к интегралам (3.3) сингулярное интегральное уравнение решается методом дискретных особенностей [10].

В формулах (3.5) параметр $\alpha$ означает количество узловых диаметров (или волновое число). Если $\alpha$=0, то рассматриваются осесимметричные колебания.

**4. Апробация метода**

В качестве тестовой рассматривается задача о колебаниях жидкости в жесткой сферической оболочке. Рассмотрим сферическую оболочку радиуса $R$=1м, частично заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, уровень заполнения $h$. Численный анализ проводился для $(0.2 < h/R < 1.99)$, $h_1 = h/R$. Применен метод граничных элементов (МГЭ), описанный выше, и аналитический подход [11]. При использовании метода граничных элементов использовалось 150 элементов вдоль радиуса свободной поверхности и 300 элементов вдоль смоченной части образующей. Рассматривались граничные элементы с постоянной аппроксимацией плотности, что соответствует идеологии метода дискретных особенностей [10]. Дальнейшее увеличение числа элементов не привело к существенному изменению результатов. В таблице 1 приведены результаты расчета частот осесимметричных колебаний жидкости (в Hz) с помощью указанных методов.

*Таблица 1. Частоты осесимметричных колебаний жидкости в сферической оболочке*

| Метод | Уровень заполнения $h$, м | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $h_1$=0.2 | $h_1$=0.6 | $h_1$=1.0 | $h_1$=1.8 | $h_1$=1.99 |
| [11] | 3.8261 | 3.6501 | 3.7451 | 6.7641 | 29.0500 |
| МГЭ | 3.8314 | 3.6510 | 3.7456 | 6.7665 | 29.1811 |

Рассмотрены различные уровни заполнения жидкостью, включая $h_1$=1.99, что соответствует «ice-fishing problem», [11]. Результаты расчетов близки, в некоторых случаях МГЭ дает более высокую точность. Заметим, что «ice-fishing problem» (малая свободная поверхность, проблема подледной рыбалки)) является камнем преткновения для многих численных методов, включая метод конечных элементов. Метод граничных интегральных уравнений и в этом случае демонстрирует высокую точность и надежность. Это дает основание считать целесообразным применение метода дискретных особенностей (как численного аналога метода граничных интегральных уравнений) и в случае достаточно малого зазора между поверхностями коаксиальных оболочек.

**5. Анализ численных результатов**

Рассмотрены две цилиндрические коаксиальные оболочки разных радиусов. Пусть $R_1$ радиус внутренней оболочки, $R_2$ - радиус внешней оболочки, $H$ – уровень заполнения жидкостью внутренней части оболочечной конструкции. Расчеты проводились при использовании 150 граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности вдоль радиуса свободной поверхности и 300 элементов вдоль образующей каждой из оболочек. В таблице 2 приведены частоты колебаний составной системы из коаксиальных цилиндрических оболочек. Принималось, что $R_2 = H$ =1м. Рассматривались различные значения внутреннего радиуса $R_1$. В таблице 2 приведены значения частот колебаний жидкости в системе из коаксиальных оболочек при $\alpha$ = 1 при разных отношениях радиусов $R_1/R_2$.

*Таблица 2. Частоты осесимметричных колебаний жидкости в системе коаксиальных оболочек*

| $R_1/R_2$ | 0.0 | 0.01 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | 4.247 | 4.247 | 4.204 | 4.086 | 3.937 | 3.785 | 3.641 | 3.516 | 3.403 | 3.212 |

Формы колебаний жидкости в системе коаксиальных оболочек представлены на рис. 5.1, 5.2.

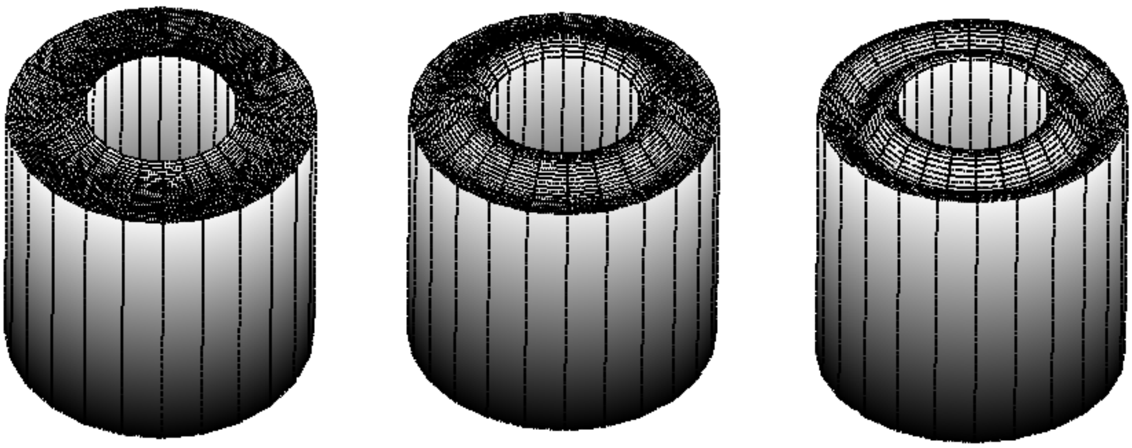

*Рис. 5.1 Первые осесимметричные формы колебаний жидкости в системе коаксиальных цилиндрических оболочек, $\alpha = 0$*

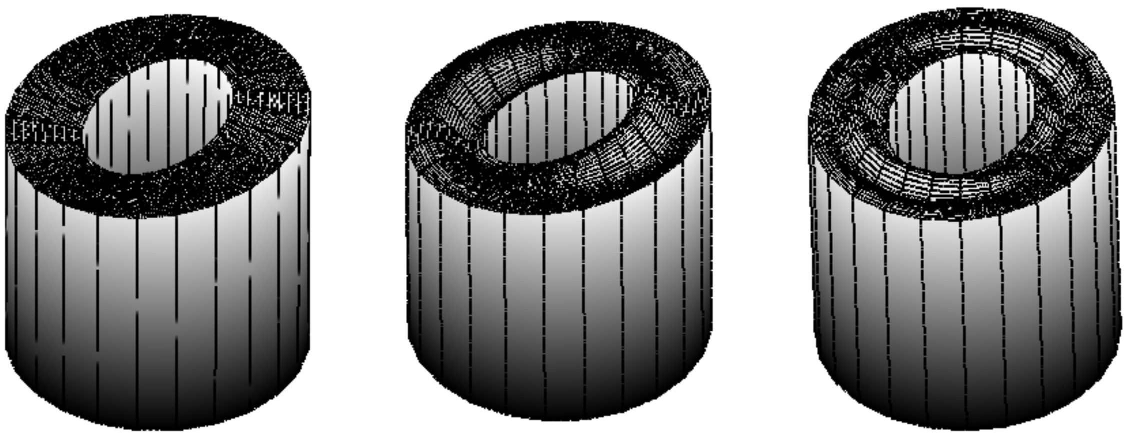

*Рис. 5.2 Первые неосесимметричные формы колебаний жидкости в системе коаксиальных цилиндрических оболочек, $\alpha = 1$*

Приведенные на рис. 5.1, 5.2 формы колебаний жидкости соответствуют следующему отношению $R_1 / R_2 = 0.5$. Аналогично формам колебаний цилиндрических и конических оболочек, рассмотренных в [9], видим, что формы колебаний свободной поверхности имеют характер, присущий функциям Бесселя. Полученные формы колебаний являются ортогональными и могут быть использованы при решении задач о вынужденных колебаниях жидкости в коаксиальных оболочках, а также как базисная система функций при изучении нелинейных колебаний.

**5. Выводы**

Методы граничных интегральных уравнений и дискретных особенностей получили дальнейшее развитие при решении задач о колебаниях жидкости в жестких коаксиальных оболочках, когда свободная поверхность жидкости имеет вид кольца. Задача определения потенциала скоростей и давления жидкости сведена к решению системы одномерных сингулярных уравнений. Разработан эффективный численный метод ее решения. Проведено тестирование алгоритма, и установлено необходимое количество граничных элементов для получения заданной точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bochkarev S.A., Matveyenko V.P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Appl. Math. Mech*. 2010. Vol. 74, no. 4. P. 467–474.

2. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. Vol. 46, no 1. pp. 12-19.
3. Karagiozis K. N., Païdoussis M. P., Misra A. K. Transmural pressure effects on the stability of clamped cylindrical shells subjected to internal fluid flow: theory and experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2007. Vol. 42, Issue 1. P. 13-23.
4. Strelnikova E.,Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid, *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2010. Vol.50. P. 203-211.
5. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011. Vol. 52. P. 285-296.
6. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. Resonant many–mode periodic and chaotic self–sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012. N 70. P. 1335 – 1354.
7. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
8. Gnitko, V., Degtyariov, K., Naumenko, V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, 2017. Vol. 5(3). P. 317-328.
9. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1, no. 1. P.14-27.
10. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems, *Differ. Equ.* 2003. 39:9 P.1295–1307.
11. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape. *J. Fluid Mech.* 2012. V. 703. P. 391-401.

REFERENCES

1. S.A. Bochkarev, V.P. Matveyenko, "The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid". *J. Appl. Math. Mech*., Vol. 74, no. 4. P. 467–474, 2010.
2. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, A. A. Popova, "Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation". *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Vol. 46, no 1, pp. 12-19, 2017.
3. K. N. Karagiozis, M. P. Païdoussis, A. K. Misra, "Transmural pressure effects on the stability of clamped cylindrical shells subjected to internal fluid flow: theory and experiments". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, Issue 1, P. 13-23, 2007.
4. E. Strelnikova, E. Yeseleva, V. Gnitko, V. Naumenko, "Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid", *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*, Vol.50, P. 203-211, 2010.
5. V. Gnitko, U. Marchenko, V. Naumenko, E. Strelnikova, "Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load". *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*, Vol. 52, P. 285-296, 2011.
6. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. Resonant many–mode periodic and chaotic self–sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*, N 70, P. 1335 – 1354, 2012.
7. C.A Brebbia, J.C.F Telles, & L.C.Wrobel, *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
8. V.Gnitko, K. Degtyariov, V. Naumenko, E. Strelnikova, "BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles". *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, Vol. 5(3), P. 317-328, 2017.

9. K. Degtyariov, V.Gnitko, V. Naumenko, E. Strelnikova "Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles". *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, Vol. 1, no. 1, P.14-27, 2016.
10. Yu. V. Gandel', T. S. Polyanskaya, Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Problems, *Differ. Equ*, 39, P.1295–1307. 2003.
11. O.M. Faltinsen, A.N. "Timokha Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape". *J. Fluid Mech*, V. 703, P. 391-401, 2012.

***Науменко Юрий Виталиевич,*** *– аспирант, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10,Харьков, 61046, Украина;*

*ORCID: 0000-0001-9058-6727.*

***Розова Людмила Викторовна,*** *– кандидат технических наук, доцент, [2]Национальный технический университета «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева 2, Харьков 61002, Украина; ORCID: 0000-0002-0781-7473.*

***Стрельникова Елена Александровна,*** *– доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10,. Харьков, 61046, Украина; e-mail: elena15@gmx.co; ORCID:0000-0003-0707-7214.*

***Усатова Ольга Александровна,*** *– аспирант, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина, ORCID 0000-0001-1267-2723.*

***Науменко Юрій Віталийович,*** *– аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10,. Харьков, 61046, Україна;*

*ORCID: 0000-0001-9058-6727.*

***Розова Людмила Викторівна,*** *- кандидат технични наук, доцент, Національний технічний университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева 2, Харьков 61002, Украина; ORCID: 0000-0002-0781-7473.*

***Стрельникова Олена Олександрівна,*** *- доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Іститут проблем машинобудування ім. А.. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10,. Харьков, 61046, Україна, e-mail: elena15@gmx.co; ORCID: 0000-0003-0707-7214*

***Усатова Ольга Олександрівна,*** *– аспірант, Института проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10,. Харьков, 61046, Украина;*

*ORCID: 0000-0001-1267-2723.*

***Naumenko Yury Vytalievich,*** *post graduate, A.Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; ORCID: 0000-0001-9058-6727.*

***Rozova Ludmila Victorovna,*** *assistant professor, PhD, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute"vul Kirpicheva,2, Kharkov, 61002, Ukraine; ORCID: 0000-0002-0781-7473.*

***Strelnikova Elena Alexandrovna***, *.DSc, Prof. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: elena15@gmx.co;ORCID: 0000-0003-0707-7214.*

***Usatova Olga Alexandrovna***,*. post graduate, A.Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, ul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; ORCID: 0000-0001-1267-2723.*

Надійшла - 11.03.2019.