Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.922 № 967, 2011, с.17–31

Существование и единственность решения одного вырожденного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями

А.Л. Пивень
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
пл.Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
e-mail: Aleksey.L.Piven@univer.kharkov.ua

Доказана теорема существования и единственности решения для вырожденного интегро-дифференциального уравнения запаздывающего типа, возникающего при описании переходных процессов в радиотехнических системах.

Півень О.Л. **Існування та єдиність розв'язку одного виродженого інтегро-диференціального рівняння із запізненнями.** Доведено теорему існування та єдиності розв'язку для виродженого інтегро-диференціального рівняння запізнюючого типу, що виникає при описі перехідних процесів у радіотехнічних системах.

A.L. Piven **Existence and uniqueness of a solution for one degenerate integro-differential delay equation.** We are proved the existence and uniqueness theorem for degenerate integro-differential delay equation which appear at describing of transients in radio technical systems .

2000 Mathematics Subject Classification 34A09.

Рассматривается начальная задача

$$\frac{d(A_0u(t))}{dt}+\sum_{j=0}^{N}B_ju(t-\omega_j)+\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}\Phi_j(t,\tau)u(\tau)d\tau=f(t)+\varphi(u(t)),\quad t_0\le t<T \tag{1}$$

$$u(t)=g(t),\quad t_0-\omega_N\le t\le t_0. \tag{2}$$

Здесь A_0, B_j $(j = 0, .., N)$ – постоянные квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, элементы $n \times n$ матриц $\Phi_j(t,\tau)$ непрерывны по совокупности переменных на множествах $\{(t,\tau) \in [t_0, T) \times [t_0 - \omega_j, T) : t_0 - \omega_j \leq \tau \leq t - \omega_j\}$ соответственно, $f(t) \in C([t_0, T), \mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $g(t) \in C([t_0 - \omega_N, t_0], \mathbb{R}^n)$. Запаздывания упорядочены: $0 = \omega_0 < \omega_1 < \cdots < < \omega_N$. Следуя [1], под решением задачи (1),(2) на отрезке $[t_0 - \omega_N, T_0]$ $(t_0 < < T_0 < T \leq \infty)$ будем понимать вектор-функцию $u(t) \in C([t_0 - \omega_N, T_0], \mathbb{R}^n)$ такую, что $A_0 u(t) \in C^1([t_0, T_0], \mathbb{R}^n)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $t \in [t_0, T_0]$ и начальному условию (2).

Уравнение (1) называется *неявным*, а в случае необратимости матрицы A_0–*вырожденным* [1, 2]. Нелинейное уравнение (1) с вырожденной матрицей A_0 получено в [3, 4] при описании переходных процессов в радиотехнических системах.

По существу *явное* уравнение (1) $(A_0 = E$, E – единичная матрица порядка $n)$ с учетом начального условия (2) сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра с запаздываниями. В работах [5, 6] (см. также обзорную статью [7] и библиографию в ней) получены различные теоремы существования, единственности и продолжаемости решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра без запаздываний. В [8, 9] подобные теоремы получены и для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с запаздываниями по времени.

Локальные и глобальные теоремы существования и единственности решения для уравнения (1) с $\Phi_j(t,\tau) \equiv 0$ получены в [1]. Для глобальных теорем существования и единственности решения основным требованием, накладываемым на нелинейную функцию $\varphi(x)$, является глобальное условие Липшица. В работах [3, 4] отмечено, что в реальных физических системах встречаются нелинейные функции $\varphi(x)$ степенного типа, удовлетворяющие условию Липшица не глобально, а локально на каждом компакте в $\mathbb{R}^n$. В общем случае решение уравнения (1) для такого типа нелинейности может быть определено лишь на конечном промежутке времени.

В настоящей работе доказывается теорема существования и единственности решения начальной задачи (1), (2), в которой предполагается степенной рост нелинейной функции $\varphi(x)$. При доказательстве теоремы, наряду с методом спектральных проекторов типа Рисса теории вырожденных дифференциально-алгебраических уравнений [10], используется также метод линейных и нелинейных интегральных неравенств, широко применяемый в теории устойчивости движения [6]. Этот метод позволяет продолжить локальное решение уравнения (1) на вполне определенный промежуток времени.

Линейной части уравнения (1) отвечает характеристический матричный пучок $\lambda A_0 + B_0$. Всюду в дальнейшем он предполагается регулярным $(\det(\lambda A_0 + B_0) \not\equiv 0)$[11, с. 332] индекса 0 или 1. Под *индексом* регулярного пучка $\lambda A_0 + B_0$ понимается порядок полюса резольвенты $(A_0 + \mu B_0)^{-1}$ в точке $\mu = 0$. Если индекс равен 0, то матрица A_0 обратима, если индекс равен 1, то A_0 имеет нетривиальное ядро и резольвента $(A_0+\mu B_0)^{-1}$ – полюс первого порядка в точке $\mu = 0$. Будем использовать пару взаимно дополнительных спектральных проекторов [10]

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=C_0} (\lambda A_0 + B_0)^{-1} A_0 d\lambda, \quad P_2 = E - P_1;$$
$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=C_0} A_0(\lambda A_0 + B_0)^{-1} d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1, \tag{3}$$

где контур $\{\lambda : |\lambda| = C_0\}$ охватывает конечный спектр пучка $\lambda A_0 + B_0$. В [2] введен оператор G вида

$$G = A_0 + B_0 P_2 = A_0 + Q_2 B_0.$$

Как и оператор G из [2], матрица G обратима. Для проекторов вида (3) свойства матрицы G установлены в [1].

Всюду в статье мы используем евклидову норму вектора пространства $\mathbb{R}^n$ и подчиненную ей операторную норму матрицы размера $n \times n$.

Положим $S = G^{-1} Q_1 B_0$. Известно, что существуют постоянные $C > 0,\ b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$||e^{-St} P_1|| \le Ce^{bt}, \quad t \ge 0. \tag{4}$$

Заметим, что в случае оценки $||e^{-St}|| \le C_0 e^{b_0 t}, \quad t \ge 0$ показатель b_0 может оказаться менее подходящим для дальнейшего по сравнению с показателем b в (4), см. пример ниже.

По ядрам $\Phi_j(t,\tau)$ $(j = 0, 1, ..., N)$ интегральных операторов, входящих в уравнение (1), построим скалярные функции

$$K_j^1(t,\tau) = C \int\limits_{\tau+\omega_j}^{t} e^{b(\tau-s)} ||G^{-1} Q_1 \Phi_j(s,\tau)|| ds,$$

$$K_j^2(t,\tau) = \max_{\tau+\omega_j \le s \le t} e^{b(\tau-s)} ||G^{-1} Q_2 \Phi_j(s,\tau)||, \quad t_0 - \omega_j \le \tau \le t - \omega_j \le t < T.$$

После доопределения $K_j^i(t,\tau) = K_j^i(\tau + \omega_j, \tau),\ t \ge t_0,\ t - \omega_j < \tau \le t$, $i = 1, 2; j = 0, ..., N$ все функции $K_j^i(t,\tau)$ $(i = 1, 2; j = 1, ..., N)$ становятся непрерывными по совокупности переменных на соответствующих множествах $\{(t,\tau) \in [t_0, T) \times [t_0 - \omega_j, T) : t_0 - \omega_j \le \tau \le t\}$ и при каждом фиксированном τ не убывают по t.

Пусть $T > t_0 + \omega_1$. Для натурального $k < \dfrac{T - t_0}{\omega_1}$ положим

$$Q = \sum_{j=1}^{N} e^{-b\omega_j} ||G^{-1} Q_2 B_j||, \quad U_k = \max\{Q^k, Q\},$$

$$V_k = \sum_{j=0}^{k-1} Q^j, \quad g_0(t) = \max_{\tau \in [t_0 - \omega_N, t]} e^{-b\tau} ||g(\tau)||$$

и введем в рассмотрение следующие функции

$$p_k(t) = \exp \left(V_k \left(C \sum_{j=1}^{N} e^{-b\omega_j} ||G^{-1} Q_1 B_j|| (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{N} K_j^i(t,s) ds \right) \right), \tag{5}$$

$$h_k(t) = U_k g_0(t) + V_k \left[C e^{-bt_0} ||g(t_0)|| + \frac{\beta C}{b} (e^{-bt_0} - e^{-bt}) + \right.$$

$$+ C \int_{t_0}^{t} e^{-b\tau} ||G^{-1} Q_1 f(\tau)|| d\tau + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0 - \omega_j}^{t_0} (K_j^1(t,\tau) + K_j^2(t,\tau)) g_0(\tau) d\tau +$$

$$\left. + \max_{t_0 \le s \le t} (e^{-bs} ||G^{-1} Q_2 f(s)||) + C \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0 - \omega_j}^{t_0} e^{-b\omega_j} ||G^{-1} Q_1 B_j|| \; g_0(\tau) d\tau \right], \tag{6}$$

непрерывные на $[t_0, T)$. Здесь постоянная $\beta \ge 0$. В соотношении (6) и в дальнейшем выражения, знаменатель которых равен b, определяются в случае $b = 0$ предельным переходом при $b \to 0$. Справедлива следующая теорема существования и единственности решения задачи (1),(2).

Теорема 1. *Пусть пучок матриц $\lambda A_0 + B_0$ регулярный индекса не выше 1, $f(t) \in C([t_0, T), \mathbb{R}^n)$, $g(t) \in C([t_0 - \omega_N, t_0], \mathbb{R}^n)$, элементы $n \times n$ матриц $\Phi_j(t,\tau)$ непрерывны по совокупности переменных на множествах $\{(t,\tau) \in [t_0, T) \times [t_0 - \omega_j, T) : t_0 - \omega_j \le \tau \le t - \omega_j\}$ $(j = 0, ..., N)$ соответственно, $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и в каждом шаре $U(0,r)$ выполнено условие Липшица*

$$||\varphi(x) - \varphi(y)|| \le M_r ||x - y||, \quad x, y \in U(0,r) \tag{7}$$

с постоянной M_r, вообще говоря, зависящей от радиуса r. Предположим, что

$$Q_2 \varphi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

при некоторых постоянных $\alpha, \beta \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$ справедлива оценка

$$||G^{-1} \varphi(x)|| \le \alpha ||x||^m + \beta, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

и выполнено условие согласования

$$Q_2 \sum_{j=0}^{N} B_j g(t_0 - \omega_j) = Q_2 f(t_0) \tag{10}$$

на начальный вектор в (2) и правую часть в (1). Если для некоторого натурального q такого, что $t_q = t_0 + q\omega_1 < T$ выполнено условие

$$(m-1)\alpha C V_q \int\limits_{t_0}^{t_q} e^{(m-1)bs} h_q^{m-1}(s) p_q^m(s) ds < 1, \tag{11}$$

то начальная задача (1),(2) имеет единственное решение $u(t)$ на отрезке $[t_0-\omega_N, t_q]$, причем

$$||u(t)|| \leq \frac{e^{bt} p_q(t) h_q(t)}{\left(1-(m-1)\alpha C V_q \int\limits_{t_0}^{t_q} e^{(m-1)bs} h_q^{m-1}(s) p_q^m(s) ds\right)^{\frac{1}{m-1}}}, \quad t \in [t_0, t_q]. \tag{12}$$

Замечание 1. Условие согласования (10) на начальный вектор в (2) и правую часть в (1) возникает из-за вырождения матрицы A_0 и использовалось при исследовании разрешимости начальной задачи для вырожденного функционально-дифференциального уравнения в [1]. Если матрица A_0 невырождена, то $Q_2 = 0$ и условие (10) выполнено. Условие (11) по существу встречалось ранее в [6] при исследовании явных уравнений без запаздываний (см. замечание 3 ниже).

Доказательство теоремы 1. Как и в [1, лемма 1] проверяется, что вектор-функция $u(t)$ является решением задачи (1),(2) на промежутке $[t_0, T)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет на этом промежутке интегральному уравнению

$$u(t) = e^{-S(t-t_0)} P_1 g(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-S(t-\tau)} G^{-1} Q_1 f(\tau) d\tau -$$

$$-\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} e^{-S(t-\tau-\omega_j)} G^{-1} Q_1 B_j u(\tau) d\tau - \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t,\tau) u(\tau) d\tau -$$

$$-\sum_{j=0}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} \int\limits_{\tau+\omega_j}^{t} e^{-S(t-s)} G^{-1} Q_1 \Phi_j(s,\tau) ds u(\tau) d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} e^{-S(t-\tau)} G^{-1} \varphi(u(\tau)) d\tau + G^{-1} Q_2 f(t) - \sum_{j=1}^{N} G^{-1} Q_2 B_j u(t-\omega_j). \tag{13}$$

и начальному условию (2). Аналогично [1] с учетом условия Липшица (7) доказывается локальная теорема существования и единственности решения начальной задачи (1),(2), в силу которой существует единственное решение $u(t)$ задачи (1),(2), определенное на некотором нетривиальном отрезке $[t_0, T_0] \subset [t_0, T)$. На отрезке $[t_0, T_0]$ решение $u(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (13). Поэтому для нормы решения $u(t)$ справедлива оценка

$$||u(t)|| \leq Ce^{b(t-t_0)}||g(t_0)|| + C\int\limits_{t_0}^{t} e^{b(t-\tau)}||G^{-1}Q_1 f(\tau)||d\tau +$$

$$+C\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} e^{b(t-\tau-\omega_j)}||G^{-1}Q_1 B_j|| \cdot ||u(\tau)||d\tau +$$

$$+C\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}\int\limits_{\tau+\omega_j}^{t} e^{b(t-s)}||G^{-1}Q_1\Phi_j(s,\tau)||ds||u(\tau)||d\tau +$$

$$+\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}||G^{-1}Q_2\Phi_j(t,\tau)||\,||u(\tau)||d\tau + C\alpha\int\limits_{t_0}^{t} e^{b(t-\tau)}||u(\tau)||^m d\tau + ||G^{-1}Q_2 f(t)|| +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}||G^{-1}Q_2 B_j u(t-\omega_j)|| + \frac{\beta C}{b}(e^{b(t-t_0)}-1), \quad t \in [t_0, T_0].$$

Тогда функция $v(t) = e^{-bt}||u(t)||$ удовлетворяет оценке

$$v(t) \leq Ce^{-bt_0}||g(t_0)|| + C\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_1 B_j||v(\tau)d\tau +$$

$$+C\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}\int\limits_{\tau+\omega_j}^{t} e^{b(\tau-s)}||G^{-1}Q_1\Phi_j(s,\tau)||dsv(\tau)d\tau + C\int\limits_{t_0}^{t} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_1 f(\tau)||d\tau +$$

$$+\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} e^{b(\tau-t)}||G^{-1}Q_2\Phi_j(t,\tau)||\; v(\tau)d\tau + C\alpha\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)b\tau}v^m(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_2 B_j||v(t-\omega_j) + e^{-bt}||G^{-1}Q_2 f(t)|| + \frac{\beta C}{b}(e^{-bt_0}-e^{-bt}),\ t \in [t_0, T_0].$$

С учетом упорядоченности запаздываний получаем следующую оценку для неубывающей на $[t_0, T_0]$ функции $x(t) = \begin{cases} \max\limits_{t_0 \le s \le t} v(s), & t_0 \le t \le T_0, \\ g_0(t), & t_0 - \omega_N \le t < t_0 \end{cases}$:

$$x(t) \le Ce^{-bt_0}||g(t_0)|| + C\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_1B_j||x(\tau)d\tau +$$

$$+C\sum_{j=0}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} \int\limits_{\tau+\omega_j}^{t} e^{b(\tau-s)}||G^{-1}Q_1\Phi_j(s,\tau)||dsx(\tau)d\tau + \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j} K_j^2(t,\tau)x(\tau)d\tau +$$

$$+C\alpha\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)b\tau}x^m(\tau)d\tau + C\int\limits_{t_0}^{t} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_1f(\tau)||d\tau + \max_{t_0\le s\le t} e^{-bs}||G^{-1}Q_2f(s)|| +$$

$$+Qx(t-\omega_1) + \frac{\beta C}{b}(e^{-bt_0} - e^{-bt}), \quad t \in [t_0, T_0]. \qquad (14)$$

Если $t_k = t_0 + k\omega_1 \le T_0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то в силу (14) для функции $x(t)$ получим оценку

$$x(t) \le \sum_{l=0}^{k-1} Q^l \Bigg[Ce^{-bt_0}||g(t_0)|| + C\int\limits_{t_0}^{t-l\omega_1} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_1f(\tau)||d\tau +$$

$$+C\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j-l\omega_1} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_1B_j||x(\tau)d\tau + C\alpha\int\limits_{t_0}^{t-l\omega_1} e^{(m-1)b\tau}x^m(\tau)d\tau +$$

$$+C\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j-l\omega_1}\int\limits_{\tau+\omega_j}^{t-l\omega_1} e^{b(\tau-s)}||G^{-1}Q_1\Phi_j(s,\tau)||dsx(\tau)d\tau +$$

$$+\max_{t_0\le s\le t-l\omega_1} e^{-bs}||G^{-1}Q_2f(s)|| + \sum_{j=0}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j-l\omega_1} K_j^2(t-l\omega_1,\tau)x(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{\beta C}{b}(e^{-bt_0} - e^{-b(t-l\omega_1)})\Bigg] + Q^k g_0(t-k\omega_1), \quad t \in [t_{k-1}, t_k]. \qquad (15)$$

Покажем, что это решение может быть продолжено на весь отрезок $[t_0, t_q]$. Предположим противное. Тогда в силу леммы из [5, с.327] существует такое

$\tau_1 \in (t_0, t_q]$, что решение $u(t)$ определено на $[t_0, \tau_1)$, удовлетворяет на этом полуинтервале уравнению (13) и

$$\overline{\lim_{t\to\tau_1-0}}||u(t)|| = \overline{\lim_{t\to\tau_1-0}} x(t) = \infty. \tag{16}$$

Пусть натуральное число $k_0 \le q$ выбрано так, что $t_{k_0-1} < \tau_1 \le t_{k_0}$. С помощью неравенства (15) получаем следующую оценку для функции $x(t)$:

$$x(t) \le \sum_{l=0}^{k_0-1} Q^l \Bigg[Ce^{-bt_0}||g(t_0)|| + C\int\limits_{t_0}^{t} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_1 f(\tau)||d\tau +$$

$$+ C\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t_0} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_1B_j||g_0(\tau)d\tau +$$

$$+ C\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_1B_j||x(\tau)d\tau + C\alpha\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)b\tau}x^m(\tau)d\tau +$$

$$+ C\sum_{j=0}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t} \int\limits_{\tau+\omega_j}^{t} e^{b(\tau-s)}||G^{-1}Q_1\Phi_j(s,\tau)||ds x(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t} K_j^2(t-l\omega_1,\tau)x(\tau)d\tau + \frac{\beta C}{b}(e^{-bt_0} - e^{-bt}) +$$

$$+ \max_{\tau\in[t_0,t-l\omega_1]} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_2 f(\tau)|| \Bigg] + U_{k_0}g_0(t) \le V_{k_0}\Bigg[Ce^{-bt_0}||g(t_0)|| +$$

$$+ C\int\limits_{t_0}^{t} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_1 f(\tau)||d\tau + C\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t_0} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_1B_j||g_0(\tau)d\tau +$$

$$+ C\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_0}^{t} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_1B_j||x(\tau)d\tau + C\alpha\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)b\tau}x^m(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N} \int\limits_{t_0-\omega_j}^{t} (K_j^1(t,\tau) + K_j^2(t,\tau))x(\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{\beta C}{b}(e^{-bt_0} - e^{-bt}) + \max_{\tau\in[t_0,t]} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_2 f(\tau)|| \Bigg] + U_{k_0}g_0(t), \quad t \in [t_0, \tau_1). \tag{17}$$

Применяя к неравенству (17) теорему 1.14 из [6, с.32], получаем оценку

$$x(t) \le p_{k_0}(t)\Bigg(U_{k_0}g_0(t) + V_{k_0}\Bigg[Ce^{-bt_0}||g(t_0)|| + C\int\limits_{t_0}^{t} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_1 f(\tau)||d\tau +$$

$$+\max_{\tau\in[t_0,t]} e^{-b\tau}||G^{-1}Q_2 f(\tau)|| + \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t_0}(K_j^1(t,\tau)+K_j^2(t,\tau))g_0(\tau)d\tau +$$

$$+C\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t_0} e^{-b\omega_j}||G^{-1}Q_1B_j||\; g_0(\tau)d\tau + C\alpha\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)b\tau}x^m(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{\beta C}{b}(e^{-bt_0}-e^{-bt})\Bigg]\Bigg) = p_{k_0}(t)\Bigg(h_{k_0}(t)+C\alpha V_{k_0}\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)b\tau}x^m(\tau)d\tau\Bigg),\ t\in[t_0,\tau_1). \tag{18}$$

Применяя к интегральному неравенству (18) теорему 2 [12](см. также теорему 1.7 и ее модификацию в [6, с. 73]) и учитывая ограничение (11), получим

$$x(t) \le \frac{p_{k_0}(t)h_{k_0}(t)}{\left(1-(m-1)\alpha C V_{k_0}\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)bs}h_{k_0}^{m-1}(s)p_{k_0}^m(s)ds\right)^{\frac{1}{m-1}}}, \quad t\in[t_0,\tau_1).$$

Последняя оценка противоречит (16). Таким образом, решение $u(t)$ определено на отрезке $[t_0,t_q]$ и удовлетворяет там оценке (12). Теорема доказана.

Замечание 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Если для некоторых $q\in\mathbb{N}$ и $\delta\in[0,\omega_1]$ выполнены условия*

$$t_q = t_0 + q\omega_1 < T, \quad (m-1)\alpha C V_q \int\limits_{t_0}^{t_{q-1}+\delta} e^{(m-1)bs}h_q^{m-1}(s)p_q^m(s)ds < 1,$$

то начальная задача (1),(2) имеет единственное решение $u(t)$ на отрезке $[t_0-\omega_N, t_{q-1}+\delta]$, причем

$$||u(t)|| \le \frac{e^{bt}p_q(t)h_q(t)}{\left(1-(m-1)\alpha C V_q\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)bs}h_q^{m-1}(s)p_q^m(s)ds\right)^{\frac{1}{m-1}}}, \quad t\in[t_0,t_{q-1}+\delta].$$

В частном случае явного уравнения

$$\frac{du(t)}{dt}+\sum_{j=0}^{N}B_j u(t-\omega_j)+\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t-\omega_j}\Phi_j(t,\tau)u(\tau)d\tau=f(t)+\varphi(u(t)),\quad t_0\le t<T \tag{19}$$

имеем $P_2=Q_2=0$, $G=E$, функции $p_k(t),h_k(t)$ (5),(6) не зависят от k, причем их конструкции упрощаются:

$$p(t)=p_k(t)=\exp\left(C\sum_{j=1}^{N}e^{-b\omega_j}||B_j||(t-t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{j=0}^{N}K_j^1(t,s)ds\right),$$

$$h(t)=h_k(t)=Ce^{-bt_0}||g(t_0)||+\frac{\beta C}{b}(e^{-bt_0}-e^{-bt})+C\int\limits_{t_0}^{t}e^{-b\tau}||f(\tau)||d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t_0}K_j^1(t,\tau)g_0(\tau)d\tau+C\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_0-\omega_j}^{t_0}e^{-b\omega_j}||B_j||\;g_0(\tau)d\tau.$$

Это позволяет упростить формулировку теоремы 1 для случая явного уравнения (19) следующим образом

Следствие 1. *Пусть $f(t)\in C([t_0,T),\mathbb{R}^n)$, $g(t)\in C([t_0-\omega_N,t_0],\mathbb{R}^n)$, элементы $n\times n$ матриц $\Phi_j(t,\tau)$ непрерывны по совокупности переменных на множествах $\{(t,\tau)\in[t_0,T)\times[t_0-\omega_j,T): t_0-\omega_j\le\tau\le t-\omega_j\}$ $(j=0,...,N)$ соответственно, $\varphi(x)\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ и в каждом шаре $U(0,r)$ выполнено условие Липшица (7) с постоянной M_r, вообще говоря, зависящей от радиуса r. Предположим, что при некоторых постоянных $\alpha,\beta\ge 0$, $m\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$ справедлива оценка*

$$||\varphi(x)||\le\alpha||x||^m+\beta,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Если

$$T_0=\sup\left(t\in[t_0,T):(m-1)\alpha C\int\limits_{t_0}^{t}e^{(m-1)bs}h^{m-1}(s)p^m(s)ds<1\right),$$

то начальная задача (19),(2) имеет единственное решение $u(t)$ на полуинтервале $[t_0-\omega_N,T_0)$, причем

$$||u(t)||\le\frac{e^{bt}p(t)h(t)}{\left(1-(m-1)\alpha C\int\limits_{t_0}^{t}e^{(m-1)bs}h^{m-1}(s)p^m(s)ds\right)^{\frac{1}{m-1}}},\quad t\in[t_0,T_0).$$

Утверждение следствия 1 непосредственно следует из теоремы 1 с учетом замечания 2.

Рассмотрим теперь задачу Коши для вырожденного полулинейного уравнения

$$\frac{d(A_0u(t))}{dt} + B_0u(t) = f(t) + \varphi(u(t)), \quad t_0 \le t < T; \tag{20}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{21}$$

Уравнение (20) является частным случаем уравнения (1), при этом $p_k(t) \equiv 1$ $(k \in \mathbb{N})$, а функция $h_k(t)$ (6) не зависит от k и ее конструкция упрощается

$$h_0(t) = h_k(t) = Ce^{-bt_0}||u_0|| + \frac{\beta C}{b}(e^{-bt_0} - e^{-bt}) +$$

$$+ \max_{t_0 \le s \le t}(e^{-bs}||G^{-1}Q_2f(s)||) + C\int_{t_0}^{t} e^{-bs}||G^{-1}Q_1f(s)||ds.$$

Непосредственно из теоремы 1 и замечания 2 получаем следующие достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (20),(21).

Следствие 2. *Пусть пучок матриц $\lambda A_0 + B_0$ регулярный индекса не выше 1, $f(t) \in C([t_0,T),\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ и в каждом шаре $U(0,r)$ выполнено условие Липшица (7) с постоянной M_r, вообще говоря, зависящей от радиуса r. Предположим, что выполнено соотношение (8) и при некоторых постоянных $\alpha, \beta \ge 0$, $m \in \mathbb{N}, m \ge 2$ справедлива оценка (9). Если выполнено условие согласования*

$$Q_2B_0u_0 = Q_2f(t_0) \tag{22}$$

на начальный вектор u_0 в (21) и функцию $f(t)$ правой части в (20), то задача Коши (20),(21) имеет единственное решение $u(t)$ на полуинтервале $[t_0, T_0)$, где

$$T_0 = \sup\left\{t \in (t_0,T) : C(m-1)\alpha\int_{t_0}^{t} e^{(m-1)bs}h_0^{m-1}(s)ds < 1\right\}, \tag{23}$$

причем

$$||u(t)|| \le \frac{e^{bt}h_0(t)}{\left(1 - (m-1)\alpha C\int\limits_{t_0}^{t} e^{(m-1)bs}h_0^{m-1}(s)ds\right)^{\frac{1}{m-1}}}, \quad t \in [t_0, T_0).$$

Замечание 3. Отметим, что условие согласования (22) – частный случай соответствующего условия (10), в котором полагается $B_j = 0$, $j = 1, ..., N$. По существу следствие 2 в частном случае явного уравнения (20), когда $A_0 = E$, $f(t) \equiv 0$, $\beta = 0$ содержится в [6, с. 181–182]. Ограничение (11) для такого уравнения переписывается в виде (23) с функцией $h_0(t) = = Ce^{-bt_0}||u_0|| + C\int\limits_{t_0}^{t} e^{-bs}||f(s)||ds$. Как показывает пример ниже, в условиях следствия 2 решение $u(t)$ задачи (20),(21), определенное на промежутке $[t_0, T_0)$, может оказаться непродолжаемым.

Пример. Покажем, как результаты, полученные в теореме 1, применяются к исследованию неявных интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием на примере следующей начальной задачи

$$u_1'(t) - bu_1(t) + c_1u_2(t-1) + \int\limits_0^t \Phi_{01}(t,\tau)u_1(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_{-1}^{t-1} \Phi_{11}(t,\tau)u_2(\tau)d\tau = f_1(t) + au_1^m(t), \quad t \in [0, T); \tag{24}$$

$$u_2(t) + a_1u_1(t-1) + \int\limits_0^t \Phi_{02}(t,\tau)u_2(\tau)d\tau + \int\limits_{-1}^{t-1} \Phi_{12}(t,\tau)u_1(\tau)d\tau = f_2(t), \quad t \in [0, T); \tag{25}$$

$$u_i(t) = u_0^i, \quad i = 1, 2, \ -1 \le t \le t_0 = 0. \tag{26}$$

Здесь постоянные $b < 0$, $T > 1$, $a_1, c_1 \ge 0$, $a, u_0^1, u_0^2 \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$. Предполагается, что вещественнозначные функции $\Phi_{01}(t,\tau), \Phi_{02}(t,\tau)$ непрерывны и ограничены по совокупности переменных на множестве $\{(t,\tau) \in [0,T) \times [0,T) : 0 \le \tau \le t\}$, вещественнозначные функции $\Phi_{11}(t,\tau), \Phi_{12}(t,\tau)$ непрерывны и ограничены по совокупности переменных на множестве $\{(t,\tau) \in [0,T) \times [-1,T) : -1 \le \tau \le t-1 < t < T\}$, вещественнозначные функции $f_1(t), f_2(t)$ непрерывны и ограничены на множестве $[0,T)$, причем функция $f_2(t)$ согласована с начальным условием (26):

$$f_2(0) = a_1u_0^1 + u_0^2. \tag{27}$$

Задача (24)–(26) в пространстве $\mathbb{R}^2$ допускает абстрактное представление (1),(2), где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_0(t,\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_{01}(t,\tau) & 0 \\ 0 & \Phi_{02}(t,\tau) \end{pmatrix}, \quad \Phi_1(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_{11}(t,\tau) \\ \Phi_{12}(t,\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix},\quad g(t)\equiv u_0=\begin{pmatrix} u_0^1\\ u_0^2\end{pmatrix},\quad N=1,\ n=2,\ \omega_j=j\ (j=0,1).$$

Для вектора $u=(u_1,u_2)^{tr}$ нелинейная вектор-функция $\varphi(u)$ в (1) имеет вид $\varphi(u)=(au_1^m,0)^{tr}$ и удовлетворяет условию Липшица (7) в каждом шаре $U(0,r)$. Пучок λA_0+B_0 регулярный и имеет индекс 1. Вычисляем

$$P_1=Q_1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad P_2=Q_2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad G=E,\quad S=\begin{pmatrix} -b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поэтому неравенство (4) выполнено с постоянной $C=1$ и имеет место соотношение (8). Оценка (9) справедлива с постоянными $\alpha=|a|$ и $\beta=0$, а условие согласования (10) вытекает из ограничения (27).
Имеем $||G^{-1}Q_1B_1||=c_1$, $||G^{-1}Q_2B_1||=a_1$, $Q=a_1e^{-b}$, $g_0(t)=e^{-bt}||u_0||$, $U_k=\max\{a_1e^{-b},a_1^ke^{-kb}\}$, $V_k=\sum\limits_{j=0}^{k-1}a_1^je^{-bj}$, $k\in\mathbb{N}$. При некоторой постоянной $M\geq 0$ справедливы неравенства

$$\max\{||\Phi_{01}(t,\tau)||,||\Phi_{02}(t,\tau)||\}\leq M,\quad 0\leq\tau\leq t<T$$

$$\max\{||\Phi_{11}(t,\tau)||,||\Phi_{12}(t,\tau)||\}\leq M,\quad -1\leq\tau\leq t-1<t<T,\ 0\leq t<T.$$

Отсюда с учетом выражений (5),(6) для функций $p_k(t)$, $h_k(t)$ при всех $t\in[0,T)$ и $k\in\mathbb{N}$ получаем оценки

$$p_k(t)\leq\tilde p_k(t)=\exp\Bigg(V_k\Bigg[c_1e^{-b}t+\frac{M(1-e^{-bt})}{b}+\frac{Mt}{b}-\frac{M(1-e^{-bt})}{b^2}+$$

$$+Me^{-b}\min\{t,1\}+\left(\frac{M(b-1)(e^{-b}-e^{-bt})}{b^2}+\frac{M(t-1)e^{-b}}{b}\right)\chi(t-1)\Bigg]\Bigg)$$

$$h_k(t)\leq\tilde h_k(t)=U_k||u_0||+V_k\Bigg[||u_0||\Bigg(1+c_1e^{-b}+\frac{M}{b}\min\{t,1\}e^{-b}-$$

$$-\frac{M}{b^2}(\max\{e^{-bt},e^{-b}\}-e^{-bt-b})+Me^{-b}\max\{1-t,0\}+$$

$$+\frac{M}{b}(\max\{e^{-b},e^{-bt}\}-e^{-bt-b})\Bigg)+\frac{M_1(1-e^{-bt})}{b}+M_2e^{-bt}\Bigg],$$

где $\chi(t)$ – функция Хевисайда, $M_j=\sup\limits_{0\leq t<T}|f_j(t)|$, $j=1,2$. Если для некоторого $q\in\mathbb{N}\cap[0,T)$ имеет место оценка

$$(m-1)|a|V_q\int\limits_0^q e^{(m-1)bs}\tilde h_q^{m-1}(s)\tilde p_q^m(s)ds<1,\qquad (28)$$

то в силу теоремы 1 задача (24)–(26) имеет единственное решение, определенное на $[-1, q]$. Если $T = \infty$ и оценка (28) выполнена при всех $q \in \mathbb{N}$, то это решение определено на всем интервале $[-1, \infty)$. Условия (27),(28) выполняются, например, при $T = \infty$, $a_1 = 1$, $c_1 = 0.01$, $q = m = 2$, $b = -1$, $a = 0.01e^{-3}$, $\Phi_{01}(t,\tau) = \Phi_{12}(t,\tau) = 0.01\sin(t-\tau)$, $\Phi_{11}(t,\tau) = \Phi_{02}(t,\tau) = 0.01\cos^2(t-\tau)$, $f_1(t) = f_2(t) = 0.01\cos t$, $u_0^1 = 0, u_0^2 = 0.01$, при этом $M = M_1 = M_2 = 0.01$.

В частном случае $a_1 = c_1 = 0, \Phi_{ij}(t,\tau) \equiv 0$ $(i = 0,1; j = 1,2)$ начальная задача (24)–(26) сводится к задаче Коши (20),(21) на промежутке $[0, T)$. Если $T = \infty$, $f_j(t) \equiv 0$ $(j = 1,2)$, $a > 0$, m – нечетное, то в силу следствия 2 существует единственное решение указанной задачи (20),(21), определенное на $[0, T_0)$, где T_0 вычисляется по формуле (23):

$$T_0 = \begin{cases} \infty, & |u_0|^{m-1} \le -\frac{b}{a}, \\ \frac{1}{b(m-1)} \ln\left(1 + \frac{b}{a|u_0|^{m-1}}\right), & |u_0|^{m-1} > -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Эту величину можно вычислить и непосредственно, исходя из явного вида решения

$$u_1(t) = \frac{u_0 e^{bt}}{\sqrt[m-1]{1 + \frac{a}{b} u_0^{m-1}\left(1 - e^{bt(m-1)}\right)}}, \quad u_2(t) \equiv 0,$$

непродолжаемого за промежуток времени $[0, T_0)$ в случае $T_0 < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations. // Nonlinear Analysis. TMA. – 2003. – V. 55,**1-2**. – P. 125–139.

2. Власенко Л.А., Мышкис А.Д., Руткас А.Г. Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями.// Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т.44, **2**. – С. 222–231.

3. Власенко Л.А., Руткас А.Г. Переходные процессы в цепях с диспергирующими многопроводными линиями передачи. // Радиотехника. – 2010. – **161**. – С. 105–114.

4. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmisson lines and lumped elements. // Proceedings of IEEE 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals,–Sevastopol, Ukraine, September 6–10. – 2010. – P. 102–104.

5. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. Об интегральных неравенствах. I// Математический сборник. – 1962. – Т.56, **3**. – С. 325–342.

6. Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – К.: Наукова думка,1989. – 272 с.

7. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра. // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. – М.: ВИНИТИ. – 1977. – Т. 15. – С. 131–198.

8. Кюн О.И. О продолжаемости решений уравнений с запаздывающим аргументом. // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т.7, **10**. – С. 1914–1917.

9. Логунов А.И. К вопросу об интегральных неравенствах для уравнений типа Вольтерра с запаздывающим аргументом.// Докл. АН СССР –1 963. – Т.150, **2**. – С. 256–258.

10. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$. // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, **11**. – С. 1996–2010.

11. Гантмахер Ф. Теория матриц. – М. Наука, 1966. – 576 с.

12. Stachurska B. On a nonlinear integral inequality. // Zeszyty Nauk. Univ. Jagiellonskiego, 252, Prace Mat. – 1971. – V. 15. – P.151–157.

Статья получена: 11.02.2011; окончательный вариант: 01.04.2011; принята: 08.04.2011.