

## Численный анализ нелинейных нормальных форм колебаний кусочно-линейных систем

Б.В. Успенский, К.В. Аврамов

*Національний технічний університет  
"Харківський політехнічний інститут" , Україна  
Інститут проблем машиностроєння  
ім. А.Н.Подгорного НАН України  
Uspensky.kubes@gmail.com, kvavr@kharkov.ua,*

В статье рассматривается вопрос поиска нормальных форм Розенберга для колебательных систем с кусочно-линейной упругой характеристикой. Предложены численные методы определения таких форм. Продемонстрирована эффективность этих методов на примере модели крутильных колебаний силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя.

Успенський Б.В., Аврамов К.В. **Чисельний аналіз нелінійних нормальних форм коливань кусково-лінійних систем.** У статті розглянуто питання пошуку нормальних форм Розенберга для коливальних систем з кусково-лінійною пружною характеристикою. Запропоновано чисельні методи для визначення таких форм. Продемонстровано ефективність цих методів на прикладі моделі крутильних коливань силової передачі трьохциліндрового транспортного двигуна.

B.V. Uspensky, K.V. Avramov **Numerical analysis of nonlinear normal modes of piecewise linear systems.** A problem of obtaining Rosenberg nonlinear normal modes for piecewise linear systems is considered in the paper. Numerical methods for computation of such modes are proposed. Efficiency of those methods is demonstrated using a model of torsion oscillations of a power transmission in a triplex transport engine.

*2000 Mathematics Subject Classification 70K45.*

### 1. Введение

Теория нелинейных нормальных форм (ННФ) была предложена и

развивалась в работах Каудерера и Розенберга [1], [2], как подход к анализу колебаний существенно нелинейных механических систем. ННФ существенно развиты в работах Маневича и Михлина [3], а систематическое изложение этой теории представлено в двух монографиях [4], [5].

Много опубликовано работ, посвященных нелинейным колебаниям кусочно-линейных систем. Классической считается статья [6], где полуаналитическими методами исследовано бифуркационное поведение в билинейном осцилляторе с одной степенью свободы. В статье [7] исследованы хаотические колебания в кусочно-линейной системе. Такие движения возникают вследствие последовательности бифуркаций удвоения периода. В статье [8] показано, что появление хаотических колебаний в кусочно-линейных системах может приводить к движениям с большими амплитудами. В статье [9] исследовано взаимное расположение амплитудно-частотных характеристик и скелетных кривых в кусочно-линейных системах. Подробный обзор результатов, касающихся нелинейной динамики кусочно-линейных систем, содержится в статье [10].

Несмотря на большое количество работ, ННФ в кусочно-линейных системах рассматривались только в статье Шоу, Пьера [11]; в этих исследованиях предложено сочетание методов ННФ Шоу-Пьера и гармонического баланса для анализа свободных колебаний кусочно-линейных систем. ННФ Розенберга в кусочно-линейных системах, по-видимому, не исследовались.

В данной статье предлагаются методы численного анализа ННФ Розенберга в системах с конечным числом степеней свободы и кусочно-линейными упругими характеристиками. Для расчета нелинейных нормальных форм уравнения движения системы представляются в конфигурационном пространстве.

Целью статьи является разработка численного метода исследования нелинейных нормальных форм Розенберга в кусочно-линейных системах. Представленные в статье численные результаты подтверждают эффективность предложенного метода.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим консервативную механическую систему с конечным числом степеней свободы и кусочно-линейной упругой характеристикой. Уравнения движения этой системы представим так:

$$M_i \cdot \ddot{x}_i + \Pi_{x_i} = 0, \quad (1)$$

где  $x_i$  – обобщенные координаты системы;  $\Pi$  – потенциальная энергия системы;  $\Pi_{x_i}$  – производные потенциальной энергии; некоторые из производных являются кусочно-линейными функциями обобщенных координат;  $M_i$  – диагональные элементы матрицы масс системы.

Такие кусочно-линейные системы описывают колебания ответственных элементов аэрокосмической техники, силовых передач двигателей внутреннего сгорания, элементов зубчатых передач.

Целью настоящего исследования является разработка метода численного определения ННФ Розенберга [2] – [4], которые являются периодическими движениями в кусочно-линейной системе (1). Многие движения, которые исследуются в нелинейных системах, являются нелинейными нормальными формами. Например, в [5] показано, что движения нелинейных систем, полученные методом гармонического баланса, являются нелинейными нормальными формами. В таком режиме колебаний все обобщенные координаты являются однозначной функцией одной обобщенной координаты  $x_k$ :  $x_i(x_k)$ ,  $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N$ . В дальнейшем координату  $x_k$  будем называть ведущей, а все остальные – ведомыми. К динамической системе (1) применим следующую замену переменных:  $x_i \rightarrow \sqrt{M_i}x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Нормальные формы Розенберга строились двумя методами: решением уравнений движения системы в конфигурационном пространстве и численным интегрированием уравнений движения (1).

Уравнения движения (1) в конфигурационном пространстве имеют следующий вид [5]:

$$2x_i'' \frac{h - \Pi}{1 + x_i'^2} - \Pi_{x_k} x_i' = -\Pi_{x_i}, \quad (2)$$

где  $x_i' = dx_i/dx_k$  – производная ведомой координаты по ведущей;  $h$  – параметр, определяющий уровень энергии в системе. Теперь ННФ можно определить как решения уравнения (2), которые представляются так:  $x_i(x_k)$ ,  $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N$ . Система (2) представляет собой систему неавтономных дифференциальных уравнений, имеющих особые точки на линии  $\Pi = h$ . В монографии [2] представлены общие подходы и методы расчета ННФ, а в [3] опубликованы некоторые специфические решения системы (2), близкие к прямолинейным нормальным формам в конфигурационном пространстве.

### 3. Применение метода коллокаций для расчета нелинейных нормальных форм

Метод коллокаций в этом разделе применяется для приближенного решения системы дифференциальных уравнений (2), используя представления о виде ННФ в конфигурационном пространстве. Представим нелинейную нормальную форму, являющуюся решением уравнения (2), так:

$$x_i = p_i(x_k). \quad (3)$$

Функцию (3) представим в виде степенного ряда:

$$p_i(x_k) = c_i^{(0)} + c_i^{(1)}x_k + c_i^{(2)}x_k^2 + \dots \quad (4)$$

Итак, определение ННФ сводится к расчету коэффициентов  $c_i^{(0)}, c_i^{(1)}, \dots$ . Тогда функции  $p_i$  являются решением уравнения (2), которые удовлетворяют неравенству  $\Pi(p_1(x_k), \dots, p_{k-1}(x_k), x_k, p_{k+1}(x_k), \dots, p_N(x_k)) \leq h$ . Выберем

некоторое конечное число точек, координаты  $x_k$  которых обозначим  $x_k^{(j)}$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Предположим, что в точках  $x_k^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, M - 1$  точно выполняется уравнение (2). Тогда справедливо следующее уравнение:

$$2p_i''(x_k^{(j)}) \frac{h - \Pi(x_k^{(j)})}{1 + p_i'^2(x_k^{(j)})} - \Pi_{x_k}(x_k^{(j)}) p_i'(x_k^{(j)}) + \Pi_{x_i}(x_k^{(j)}) = 0;$$

$$j = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N, i \neq k. \quad (5)$$

Точки  $x_k^{(0)}$  и  $x_k^{(M)}$  находятся на эквипотенциальной поверхности. Поэтому в этих точках справедливы следующие соотношения:

$$\Pi(x_k^{(0)}) = h; \quad (6)$$

$$\Pi(x_k^{(M)}) = h; \quad (7)$$

Уравнения (5, 6, 7) являются системой  $(M + 1)N + 2$  нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $c_i^{(0)}, c_i^{(1)}, c_i^{(2)} \dots$ , входящих в разложение (4). Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона-Рафсона. В результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений получаем нелинейную нормальную форму (4).

#### 4. Алгоритмы численного определения нелинейных нормальных форм

Рассмотрим алгоритм расчета ННФ в конфигурационном пространстве. Если производить прямое численное интегрирование системы (2), то возникают трудности около эквипотенциальной поверхности  $\Pi = h$ , где (2) становится близким к уравнению:

$$\Pi_{x_i} x_i' = \Pi_{x_k}. \quad (8)$$

Тогда на эквипотенциальной поверхности значение производной  $x_i'$  определяется так:

$$x_i' = \frac{\Pi_{x_i}}{\Pi_{x_k}}. \quad (9)$$

Для определения ННФ прямое численное интегрирование системы (2) должно сопровождаться следующим алгоритмом.

1. Вектор начальных условий для интегрирования системы (2)  $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,N})$  выбирается на эквипотенциальной поверхности  $\Pi = h$ . Произвольно задается  $N - 1$  компонент вектора  $x_0 : x_{0,\nu}$ ;  $\nu \neq L$ , а  $L$ -ая компонента этого вектора находится из уравнения  $\Pi = h$ .

2. Из уравнения (9) находятся значения производной  $x_i'$ ;  $i = 1, \dots, N$ ;  $i \neq k$ .

3. При начальных условиях  $x_0, x_i', i = 1, \dots, N, i \neq k$  производится интегрирование уравнения (2) до повторного пересечения эквипотенциальной поверхности  $\Pi = h$ .

4. Из этой точки пересечения эквипотенциальной поверхности производится дальнейшее интегрирование уравнения (2) до повторного пересечения поверхности переключения в точке  $x_1$ .

5. Определяется расстояние между точками  $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,N})$  и  $x_1 = (x_{1,1}, \dots, x_{1,N})$  так:  $\Delta = \sqrt{\sum_{i=1, \dots, N} (x_{1,i} - x_{0,i})^2}$ .

6. Находится минимум функции  $\Delta(x_{0,1}, \dots, x_{0,L-1}, x_{0,L+1}, \dots, x_{0,N})$ , который имеет значение  $\Delta = 0$ .

Итак, алгоритм построения ННФ сведен к определению минимума функции  $\Delta(x_{0,1}, \dots, x_{0,L-1}, x_{0,L+1}, \dots, x_{0,N})$ .

Трудности, связанные с реализацией этой методики, вызваны наличием особых точек на поверхности  $\Pi = h$ . В окрестности этой поверхности численное интегрирование уравнения (2) становится вычислительно неустойчивым, а в точках этой поверхности, вообще, невозможно. Для устранения этого недостатка, была разработана методика интегрирования уравнений (2) около эквипотенциальной поверхности  $\Pi = h$ . Суть методики заключается в том, что около поверхности  $\Pi = h$  производится переход к интегрированию уравнений (9). При удалении от эквипотенциальной поверхности производится обратный переход к интегрированию уравнения (2). Выбор момента перехода от интегрирования уравнения (2) к решению уравнения (9) выполняется, используя один из следующих критериев.

1. Близость к эквипотенциальной поверхности описывается условием  $h - \Pi = \epsilon$ , где  $\epsilon$  – параметр, определяющийся в результате численных экспериментов.

2. Переход от интегрирования уравнения (2) к решению уравнения (9) производится, исходя из близости производной  $x_i'$  значению  $\Pi_{x_i} \Pi_{x_k}^{-1}$ .

Оба способа предполагают использование значений, полученных из численных экспериментов, отражающих "близость" между теми или иными значениями.

Теперь рассмотрим алгоритм построения ННФ с помощью численного интегрирования уравнений движения (1) в фазовом пространстве. ННФ (3, 4) можно представить как периодическое движение в фазовом пространстве. Поэтому, предлагаемый далее алгоритм рассчитывает периодические движения в фазовом пространстве, которые являются ННФ в конфигурационном пространстве.

Алгоритм расчета периодических движений имеет следующий вид.

1. Вектор начальных условий  $x_0$  выбирается принадлежащим эквипотенциальной поверхности  $\Pi = h$ . Для этого используется первый пункт алгоритма определения траекторий в конфигурационном пространстве.

2. Из начальных условий  $x(0) = x_0; \dot{x}(0) = 0$  производится численное интегрирование уравнений движения (1) до тех пор, пока знак производной

ведущей координаты не сменится дважды.

3. В результате интегрирования находим вектор обобщенных координат  $x_1$  и обобщенных скоростей  $\dot{x}_1$ .

4. Условия периодичности движения описываются следующими уравнениями:

$$x_1 = x_0; \dot{x}_{1,i} = \dot{x}_{0,i}, i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N$$

Эту систему уравнений можно заменить одним уравнением, которое имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^N (x_{1,i} - x_{0,i})^2 + \sum_{i=1}^N \dot{x}_{1,i}^2 = 0. \quad (10)$$

5. Уравнение (10) решается численно методом Ньютона-Рафсона.

Таким образом, численно находятся периодические движения, которые являются ННФ Розенберга.

### 5. Численный анализ нелинейных нормальных форм

Исследуем ННФ колебаний в модели, которая описывает крутильные колебания силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя. Эта модель представлена на рис. 1.

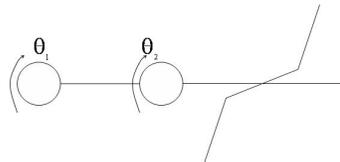


Рис. 1. Эскиз динамической системы

Система состоит из двух дисков с моментами инерции  $I_1$  и  $I_2$ . Движения этих дисков описываются их углами поворотов  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Эти два диска связаны линейным валом, жесткость которого на кручение  $c''$ . Между диском с моментом инерции  $I_2$  и заделкой установлен нелинейный элемент с упругой характеристикой  $f(\theta_2)$ . Тогда колебания системы опишем двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 - c''(\theta_2 - \theta_1) &= 0; \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + c''(\theta_2 - \theta_1) + f(\theta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c' \theta_2 + (c'' - c') \Delta & \text{при } \Delta < \theta_2; \\ c'' \theta_2 & \text{при } -\Delta \leq \theta_2 \leq \Delta; \\ c' \theta_2 - (c'' - c') \Delta & \text{при } \theta_2 < -\Delta. \end{cases}$$

К системе (11) применим следующую замену переменных:  $\theta_1 \rightarrow \sqrt{I_1} \theta_1$ ;  $\theta_2 \rightarrow \sqrt{I_2} \theta_2$ . Тогда потенциальная энергия системы примет следующий вид:

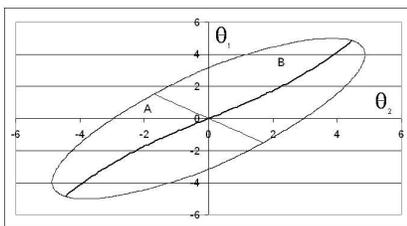
$$\Pi = \frac{c''}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{I_2}} \theta_2 - \frac{1}{\sqrt{I_1}} \theta_1 \right)^2 + g\left(\frac{\theta_2}{I_2}\right),$$

$$\text{где } g(\theta_2) = \begin{cases} c'\theta_2^2/2 + (c'' - c')\Delta\theta_2 - \frac{1}{2}(c'' - c')\Delta^2 & \text{при } \Delta < \theta_2; \\ c''\theta_2^2/2 & \text{при } -\Delta \leq \theta_2 \leq \Delta; \\ c'\theta_2^2/2 + (c' - c'')\Delta\theta_2 - \frac{1}{2}(c'' - c')\Delta^2 & \text{при } \theta_2 < -\Delta. \end{cases}$$

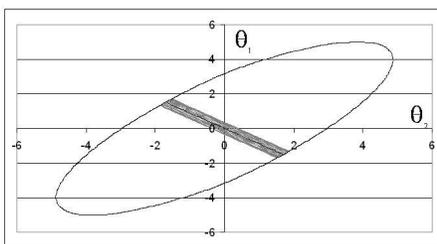
В качестве ведущей координаты выберем  $\theta_2$ . Тогда уравнение движения системы в конфигурационном пространстве представится в виде:

$$2\theta_1'' \frac{h - \Pi}{1 + \theta_1'^2} + \theta_1'(-\Pi_{\theta_2}) = -\Pi_{\theta_1}. \quad (12)$$

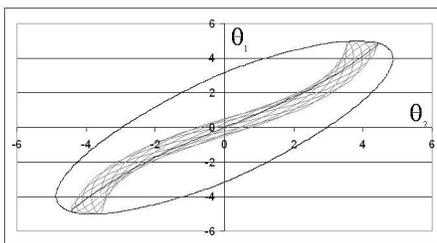
В расчетах использовались следующие численные значения параметров системы [5]:  $I_1 = 0.3$ ;  $I_2 = 0.45 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $c' = 150 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $c'' = 300 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $\Delta = 1.04 \text{ м} \cdot \text{рад}$ .



а.



б.



с.

Рис. 2. Нелинейные нормальные формы

Для расчета ННФ использовался метод коллокаций, который рассматривается в разделе 3. Тогда нелинейная нормальная форма представлялась в виде функции  $\theta_1 = p(\theta_2)$ . В численных расчетах нами использовались четыре точки коллокаций. Результаты расчета представлены на рис.2а, где изображены две ННФ и эквипотенциальная поверхность. Для проверки этих нормальных форм производилось прямое численное интегрирование системы (11) из начальных условий, соответствующих точке пересечения эквипотенциальной поверхности и ННФ. Результаты прямого численного интегрирования представлены на рис.2 б,с. Они близки к ННФ (рис.2а).

ННФ (рис.2а) удалось найти с помощью численных алгоритмов, представленных в разделе 4.

Исследовались скелетные кривые нелинейных нормальных форм А и В. Скелетные кривые нормальных форм А, В представлены на рис. 3, 4, соответственно.

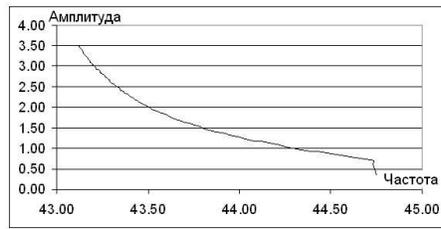


Рис. 3. – Скелетная кривая нелинейной нормальной формы А

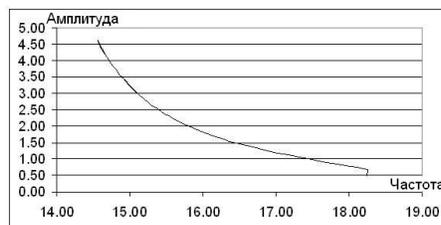


Рис. 4. – Скелетная кривая нелинейной нормальной формы В

Полученные скелетные кривые совпадают с результатами метода гармонического баланса [9]. Скелетные кривые колебаний являются мягкими, то есть с увеличением амплитуды частота колебаний уменьшается.

## 6. Заключение

В статье предложены несколько численных методов определения нелинейных нормальных форм в кусочно-линейных системах. Как следует

из проведенных численных экспериментов, все предложенные алгоритмы с достаточной точностью описывают нелинейные нормальные формы в кусочно-линейных системах.

В механической системе с двумя степенями свободы обнаружены синфазная и антифазная нелинейные нормальные формы. Антифазная нелинейная нормальная форма является прямой, а синфазная несколько искривлена.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каудерер Г. Нелинейная механика.– М.: ИЛ, – 1961. – 778 с.
2. Rosenberg R.M. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. // J. of Appl. Mech., – 1962. – **29**.
3. Л.И.Маневич, Ю.В. Михлин, В.Н. Пилипчук. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем.– М.: Наука, – 1989. – 250 с.
4. Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V. and Zevin A.: Normal modes and localization in nonlinear systems.– New-York: Wiley, – 1996.
5. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. т.1. Модели, методы, явления.– М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" , Институт компьютерных исследований, – 2010. – 704 с.
6. Shaw S.W., Holmes P.J. A periodically forced piecewise linear oscillator. // Journal of Sound and Vibration, – 1983. – **90**. – P. 129-155.
7. Аврамов К.В., Беломытцев А.С., Карабан В.Н. Области хаотических колебаний дискретных механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. // Прикладная механика.– Киев, – 1994. – Т. 30, **5**. – С. 81-88.
8. Аврамов К.В., Карабан В.Н. Резонанс при хаотических колебаниях дискретных динамических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. // Прикладная механика.– Киев, – 1997. – Т. 33, **7**. – С. 84-88.
9. Аврамов К.В., Карабан В.Н. Особенности развития вынужденных колебаний нелинейных силовых передач. // Известие вузов. Машиностроение, – 1994. – **4-6**. – С. 3-7.
10. Mahfouz I.A., F. Badrakhn. Chaotic behavior of some piecewise linear systems. Part I: Systems with set-up spring or with unsymmetric elasticity. // J. of Sound and Vibration, – 1990. – **143**. – P. 255-288.

11. Jiang D., Pierre C., S.W. Shaw. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. // J. of Sound and Vibration, – 2004. – **272**. – P. 869-891.

Статья получена: 21.02.2011; окончательный вариант: 04.05.2011;  
принята: 07.05.2011.