

Плоска деформація смуги, яка лежить на пружній
півплощині при наявності пружних зв'язків
на їх спільній межі

Н.М. Антоненко, І.Г. Величко

Запорізький національний університет, Україна
AntonenkoNina@mail.ru, wig64@mail.ru,

Розглядається конструкція, яка складається зі смуги, яка лежить на пружній півплощині при наявності пружних зв'язків на їх спільній межі. На верхню межу смуги діє стискаюче навантаження. Пропонується спосіб визначення величини зони контакту та контактних напружень. Задача розв'язується з використанням інтегрального перетворення Фур'є. Отримано сингулярне інтегральне рівняння задачі. Частково досліджено вплив товщини та коефіцієнта пружного зв'язку на величину зони контакту.

Антоненко Н.Н., Величко И.Г., **Плоская деформация полосы, которая лежит на упругой полуплоскости при наличии упругих связей на их общей границе.** Рассматривается конструкция состоящая из полосы лежащей на упругой полуплоскости при наличии на их общей границе упругих связей. К верхней границе полосы приложена сжимающая нагрузка. Предложен способ определения величины зоны контакта и контактных напряжений. Задача решается при помощи интегрального преобразования Фурье. Получено сингулярное интегральное уравнение задачи. Частично исследовано влияние толщины полосы и коэффициента упругой связи на величину зоны контакта.

N.M. Antonenko, I.G. Velichko, **Plane deformation of the strip which lies on an elastic half plane with elastic relations on common boundary** The construction which considered from a strip and an elastic half plane has been considered. The compressing load has been applied to the upper boundary of the strip. The method of the determination of contact zone and contact stresses in the strip which layered on an elastic half-plane has been proposed in the article. Fourier's transformation has been used. The singular integral equation of the problem has been obtained. The influence of the thickness and the coefficient of elasticity on the contact zone has researched partly.

2000 Mathematics Subject Classification: 74B05.

Огляд літератури

У задачах механіки, присвячених деформації смуги, що лежить на півплощині, зазвичай вважається, що загальна межа залишається такою і після деформації. Більш складними є так звані задачі про односторонній контакт, коли смуга може відставати від півплощини. У таких задачах необхідно додатково визначити область контакту, а це призводить до необхідності розв'язання інтегральних рівнянь. Серед перших праць, присвячених дослідженню задачі про відставання шару від півпростору, можна вказати роботи Y. Weitsman [10], S.L. Pu, M.A. Hussain [7] та L. M. Keer, J. Dundurs, K.C. Tsai [5], M.R. Gecit, F. Erdogan [4]. У них отримано розв'язок вказаної задачі в умовах осесиметричної деформації. Розв'язок задач про відставання плити від півпростору було отримано в роботах Oj. Svec [9], L. Ascione, A. Grimaldi [1]. В роботі K. Ma, S. Fan, J. Xiao [6] задача про відставання плити від півпростору розв'язана методом граничних елементів. Серед вітчизняних дослідників, які отримали розв'язок аналогічної задачі, відмітимо праці В.Д. Ламзюка та А. К. Приварникова [14, 18], у яких розглянуто задачі плоскої теорії пружності про відставання шару від багатозв'язної основи в припущенні, що область контакту може бути багатозв'язною. У статті Ю.А. Наумова та В.Д. Нікіфорової [16] розглянуто рівновагу багатозв'язної основи при неутримуючих зв'язках між її шарами в умовах плоскої деформації. Досліджено відставання однорідного шару, вільно покладеного на пружну основу і притиснутого до нього нормальним навантаженням. Серед сучасних робіт, присвячених даній задачі, відмітимо статтю M. Rhimi, S. El-Borgi, W. Ben Saïd, F. Ben Jemaа [8]. Авторами цієї роботи розглянуто задачу про відставання пружного градуйованого шару від однорідного півпростору в умовах осесиметричної деформації. Задача зведена до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Розв'язок знайдено чисельно з використанням ортогональних поліномів Чебишова, для знаходження довжини зони контакту використана інтерактивна схема. В роботі L. Fevzi Cakiroglu, Mehmet Cakiroglu, Ragip Erdol [3] досліджується відставання шарів двошарової основи.

Якщо має місце клейове з'єднання деталей, то в місцях з'єднання, у яких відбувається відставання деталей діють напруження, які намагаються відновити контакт між елементами деталей. Цей процес можна моделювати пружними зв'язками так, як це робиться в [13]. Якщо на смугу діють стискаючі навантаження, то на її нижній межі будуть ділянки як з додатними, так і з від'ємними нормальними напруженнями. Гранична умова на цій межі стає нелінійною. У такій постановці, наскільки відомо авторам, задача про односторонній контакт смуги та півплощини раніше не розглядалася.

Постановка задачі

Розглянемо однорідну невагому ізотропну смугу, яка лежить на пружній півплощині. Смуга знаходиться під дією нормального зосередженого

стискаючого навантаження величини \widehat{Q} та характеризується коефіцієнтом Пуассона ν , модулем зсуву $\widehat{\mu}$ та товщиною \widehat{h} . Між смугою та півплощиною має місце пружний контакт: в зоні контакту різниця нормальних переміщень відповідних точок верхньої межі півпростору і нижньої межі шару рівна нулю, а поза зоною контакту, вказана різниця пропорційна нормальним напруженням у відповідних точках нижньої межі шару. В смугі та півплощині введемо прямокутні системи координат $O_k \widehat{x}_k \widehat{z}_k$ так, як показано на рис. 1. Всі величини, які відносяться до шару позначатимемо нижнім індексом 1, а до півплощини - 2. Введемо безрозмірні величини $x_m = \frac{\widehat{x}_m}{l}$, $z_m = \frac{\widehat{z}_m}{l}$, $Q = \frac{\widehat{Q}}{El}$, $b = \frac{\widehat{b}}{l}$, $h = \frac{\widehat{h}}{l}$, $\mu = \frac{\widehat{\mu}}{E}$, $r = \frac{\widehat{r}E}{l}$, $u = \frac{\widehat{u}}{l}$, $w = \frac{\widehat{w}}{l}$, $\tau_{xzm} = \frac{\widehat{\tau}_{xzm}}{E}$, $\sigma_{xm} = \frac{\widehat{\sigma}_{xm}}{E}$, $\sigma_{zm} = \frac{\widehat{\sigma}_{zm}}{E}$, де l, E – характерні величини ($[l] = \text{м}, [E] = \text{Па}$).

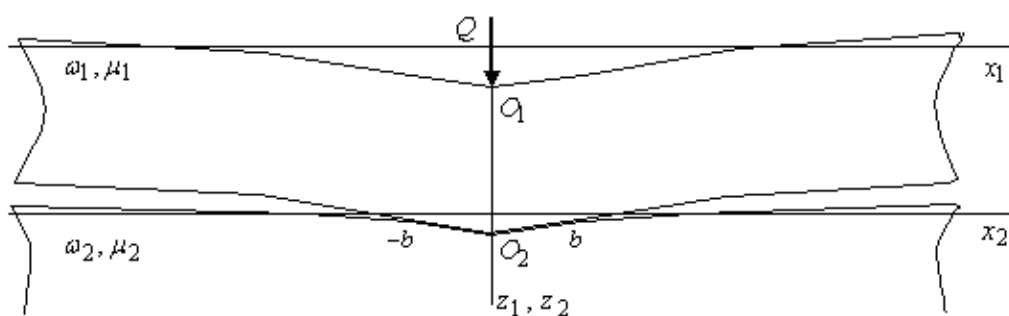


Рис. 1: Пружний контакт смуги з пружною півплощиною.

Граничні умови задачі мають вигляд

$$\sigma_{z1}(x, 0) = -Q\delta(x), \quad (1)$$

$$\tau_{xz1}(x, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\tau_{xz1}(x, h) = \tau_{xz2}(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{z1}(x, h) = \sigma_{z2}(x, 0), \quad (4)$$

$$w_2(x, 0) - w_1(x, h) = \begin{cases} 0, & |x| \leq b, \\ r\sigma_{z1}(x, h), & |x| > b. \end{cases} \quad (5)$$

$$\sigma_{z1}(x, h) \leq 0, |x| \leq b, \sigma_{z1}(x, h) > 0, |x| > b, \sigma_{z1}(x, h) \in C_{[-\infty, \infty]}. \quad (6)$$

Тут r – постійний коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт пружного зв'язку), b – невідома півширина зони контакту смуги та півплощини. Оскільки смуга перебуває в рівновазі, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{z1}(x, h) dx = -Q. \quad (7)$$

Ставиться задача про визначення величини зони контакту b .

Побудова інтегрального рівняння задачі

Замість співвідношення (5) скористаємося його наслідком

$$\frac{dw_2(x, 0)}{dx} - \frac{dw_1(x, h)}{dx} = \begin{cases} 0, & |x| \leq b, \\ r \frac{d\sigma_{z1}(x, h)}{dx}, & |x| > b. \end{cases} \quad (8)$$

Уведемо нову функцію

$$G(x) = \frac{dw_2(x, 0)}{dx} - \frac{dw_1(x, h)}{dx} - r \frac{d\sigma_{z1}(x, h)}{dx}, \quad \forall x \in R. \quad (9)$$

З фізичних міркувань випливає, що функції $\sigma_{z1}(x, h)$ та $w_1(x, h)$ є парними. Умову (8) можна представити через функцію $G(x)$:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & |x| > b, \\ -r \frac{d\sigma_{z1}(x, h)}{dx}, & |x| \leq b. \end{cases} \quad (10)$$

Зі співвідношень (5), (8) та (10) отримуємо інтегральне представлення для нормальних напружень в точках нижньої межі смуги:

$$\sigma_{z1}(x, h) = \begin{cases} \frac{1}{r} \int_{-b}^x \left(\frac{dw_2(z, 0)}{dz} - \frac{dw_1(z, h)}{dz} \right) dz, & |z| > b, \\ -\frac{1}{r} \int_{-b}^x G(z) dz, & |z| \leq b. \end{cases} \quad (11)$$

Задачу будемо розв'язувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (13)$$

Введемо допоміжні функції $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень верхньої межі смуги такими співвідношеннями:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0), \quad \beta = \mu|\xi|\bar{w}(\xi, 0), \quad \gamma = -i\xi\mu\bar{u}(\xi, 0), \quad \delta = -i\text{sgn}(\xi)\bar{\tau}_{xz}(\xi, 0). \quad (14)$$

Як показано в [19], напруження і переміщення точок смуги можна представити у вигляді лінійної комбінації введених допоміжних функцій. Наведемо вирази для знаходження трансформант напружень і нормальних переміщень точок смуги:

$$2\mu p \bar{w}(\xi, z) = ((2 - \omega) \operatorname{sh} pz - \omega pz \operatorname{ch} pz) \alpha + 2(-\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \beta + 2((1 - \omega) \operatorname{sh} pz - \omega pz \operatorname{ch} pz) \gamma - \omega pz \operatorname{sh} pz \delta, \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = (\operatorname{ch} pz - \omega pz \operatorname{sh} pz) \alpha + 2\omega (\operatorname{sh} pz - pz \operatorname{ch} pz) \beta - 2\omega pz \operatorname{sh} pz \gamma - ((1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \delta. \quad (16)$$

$$-\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = (-(1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \alpha + 2\omega pz \operatorname{sh} pz \beta + 2\omega (\operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz) \gamma + (\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \delta, \quad (17)$$

Тут $\omega = \frac{1}{2(1-\nu)}$, $p = |\xi|$.

Застосувавши до межових умов (1) – (4) та співвідношення (9) пряме перетворення Фур'є (12), отримуємо:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{z1}(\xi, 0) = -Q, \\ -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz1}(\xi, 0) = 0, \\ -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz1}(\xi, h) = 0, \\ -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz2}(\xi, 0) = 0, \\ \bar{\sigma}_{z2}(\xi, 0) = \bar{\sigma}_{z1}(\xi, h), \\ -i\xi \bar{w}_2(\xi, 0) + i\xi \bar{w}_1(\xi, h) + i\xi r \bar{\sigma}_{z1}(\xi, h) = M(\xi). \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{Тут } M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\xi t} dt = i \int_{-b}^b G(t) \sin \xi t dt.$$

Використовуючи співвідношення (14), приведемо систему (18) до вигляду:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -Q, \\ \delta_1 = 0, \\ -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz1}(\xi, h) = 0, \\ \delta_2 = 0, \\ \alpha_2 = \bar{\sigma}_{z1}(\xi, h), \\ -i\xi \beta_2 + i\xi \mu_2 p \bar{w}_1(\xi, h) + i\xi \mu_2 p r \bar{\sigma}_{z1}(\xi, h) = \mu_2 p M(\xi). \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення (15), (16), (17) при $z = h$ та співвідношення, яке пов'язує допоміжні функції півпростору [11]

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\omega_2} & \frac{1-\omega_2}{2\omega_2} \\ \frac{1-\omega_2}{2\omega_2} & -\frac{1}{2\omega_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

виразимо із останньої системи $\beta_1 = \beta_1(M(\xi))$, $\gamma_1 = \gamma_1(M(\xi))$. Різниця трансформант переміщень відповідних точок верхньої межі півпростору та нижньої межі шару набуває вигляду:

$$\frac{\beta_2(\xi)}{\mu_2 p} - \bar{w}_1(\xi, h) = \frac{it_1(p)}{\xi} M(\xi) - Qrt_2(p). \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\text{Тут } t_1(p) &= \frac{T_1(p)}{T(p)}, \quad t_2(p) = \frac{T_2(p)}{T(p)}, \quad p_1 = ph, \quad d = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \\
T_1(p) &= d\omega_1 + \omega_2 + 2(2\omega_2 p_1 - d\omega_1 - 2d\omega_1 p_1^2) e^{-2p_1} + (d\omega_1 - \omega_2) e^{-4p_1}, \\
T_2(p) &= 2\omega_2 \left((1 + p_1) e^{-p_1} + (p_1 - 1) e^{-3p_1} \right), \\
T(p) &= d\omega_1 + \omega_2 + 2r\mu_1\omega_1\omega_2 p + \\
&+ 2(-d\omega_1 + 2\omega_2 p_1 - 2d\omega_1 p_1^2 - 4r\mu_1\omega_1\omega_2 p p_1^2 - 2r\mu_1\omega_1\omega_2 p) e^{-2p_1} + \\
&+ (d\omega_1 - \omega_2 + 2r\mu_1\omega_1\omega_2 p) e^{-4p_1},
\end{aligned}$$

Функції $t_1(p)$ та $t_2(p)$, які входять у співвідношення (20), характеризуються такими властивостями:

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow 0} t_1(p) &= 1, \quad \lim_{p \rightarrow 0} t_2(p) = 1, \quad pt_1(p) - \varepsilon \sim_{p \rightarrow 0} O\left(\frac{1}{p}\right), \\
t_2(p) &\sim_{p \rightarrow 0} O(e^{-p_1}), \quad \varepsilon = \frac{\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2}{2\mu_1\mu_2\omega_1\omega_2 r}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Застосуємо обернене перетворення Фур'є (13) до співвідношення (20):

$$\begin{aligned}
w_2(x, 0) - w_1(x, h) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t_1(p)}{\xi} M(\xi) e^{-i\xi x} d\xi - \frac{Qr}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t_2(p) e^{-i\xi x} d\xi = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b G(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t_1(p) \frac{\sin(\xi t)}{\xi} e^{-i\xi x} d\xi \right] dt - \frac{Qr}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t_2(p) e^{-i\xi x} d\xi = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b G(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t_1(p) \frac{\sin(pt) \cos(px)}{p} dp \right] dt - \frac{Qr}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t_2(p) \cos(px) dp. \quad (22)
\end{aligned}$$

Для побудови інтегрального рівняння задачі нам знадобляться похідні від різниці нормальних переміщень точок верхньої межі півпростору та нижньої межі шару. Продиференціюємо по x співвідношення (22), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (w_2(x, 0) - w_1(x, h)) &= \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b G(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t_1(p) \sin(pt) \sin(px) dp \right] dt + \frac{Qr}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} pt_2(p) \sin(px) dp. \quad (23)
\end{aligned}$$

Введемо позначення

$$I(t, x) = \int_0^{+\infty} t_1(p) \sin(pt) \sin(px) dp, \quad K(x) = -Qr \int_0^{+\infty} pt_2(p) \sin(px) dp. \quad (24)$$

З урахуванням позначень (24) вираз (23) приймає вигляд:

$$\pi \frac{d}{dx} (w_2(x, 0) - w_1(x, h)) = \int_{-b}^b G(t) I(t, x) dt - K(x). \quad (25)$$

Враховуючи граничні умови (5), отримаємо інтегральне рівняння задачі:

$$\int_{-b}^b G(t) I(t, x) dt = K(x), \quad |x| \leq b. \quad (26)$$

Дослідження інтегрального рівняння задачі

Виділимо в ядрі інтегрального рівняння (26) сингулярну і регулярну частини. Використовуючи властивості (21), представимо ядро у вигляді суми:

$$\begin{aligned} I(t, x) &= \int_0^{+\infty} t_1(p) \sin(pt) \sin(px) dp = \\ &= \int_0^{+\infty} (pt_1(p) - \varepsilon) \frac{\sin(pt) \sin(px)}{p} dp + \varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{\sin(pt) \sin(px)}{p} dp, \\ I(t, x) &= \frac{\varepsilon}{2} (\ln|t+x| - \ln|t-x|) + \int_0^{+\infty} (pt_1(p) - \varepsilon) \frac{\sin(pt) \sin(px)}{p} dp, \end{aligned} \quad (27)$$

З урахуванням (27) та рівності $\int_{-b}^b G(t) \ln|t+x| dt = - \int_{-b}^b G(t) \ln|t-x| dt$, яка виконується у випадку, коли $G(t)$ – непарна функція, інтегральне рівняння (26) набуває вигляду

$$\int_{-b}^b G(t) \left[\varepsilon \ln \frac{1}{|t-x|} + I_1(t, x) \right] dt = K(x). \quad (28)$$

Тут $I_1(t, x) = \int_0^{+\infty} (pt_1(p) - \varepsilon) \frac{\sin(pt) \sin(px)}{p} dp$ – регулярна частина ядра.

Оскільки інтегральне рівняння (28) має логарифмічну особливість, то зручно перейти до інтегрального рівняння з ядром типу Коші, оскільки для рівнянь такого типу розроблено ефективні методи розв'язку. Продиференціюємо по змінній x інтегральне рівняння (28) та отримаємо:

$$\int_{-b}^b G(t) \left[\frac{\varepsilon}{t-x} + L(t, x) \right] dt = K_1(x). \quad (29)$$

$$\text{Тут } L(t, x) = \int_0^{+\infty} (pt_1(p) - \varepsilon) \sin(pt) \cos(px) dp, \quad K_1(x) = \int_0^{+\infty} p^2 t_2(p) \cos(px) dp.$$

При деформації смуги нормальним зосередженим стискаючим навантаженням форма лінії її нижньої межі не має кутових точок, отже, нормальні напруження поблизу меж області контакту мають особливість такого ж типу, як і в контактній задачі про деформацію смуги штампом без кутових точок, а отже, похідна від нормальних напружень повинна мати кореневу особливість. Звідси випливає, що невідому функцію можна шукати у вигляді:

$$G(t) = \frac{u(t)}{\sqrt{b^2 - t^2}}. \quad (30)$$

З врахуванням представлення (30) інтегральне рівняння (29) набуває вигляду:

$$\int_{-b}^b \frac{u(t)}{\sqrt{b^2 - t^2}} \left[\frac{\varepsilon}{t - x} + L(t, x) \right] dt = K_1(x). \quad (31)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (31) задовольнятиме інтегральному рівнянню (28), за умови виконання додаткової умови [15]. Для її побудови помножимо інтегральне рівняння (28) на $(b^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ та проінтегруємо отриману рівність по проміжку $(-b, b)$. З урахуванням (30) додаткова умова набуває вигляду:

$$\int_{-b}^b \frac{u(t)}{\sqrt{b^2 - t^2}} [B + F(t)] dt - A = 0. \quad (32)$$

$$\text{Тут } F(t) = \int_{-b}^b \frac{I_1(t, x)}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx, \quad A = \int_{-b}^b \frac{K(x)}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx, \quad B = \varepsilon \pi \ln \frac{2}{b}.$$

Для побудови розв'язку інтегрального рівняння перейдемо до проміжку інтегрування $(-1, 1)$. Уведемо нові змінні

$$t = bs, \quad x = by. \quad (33)$$

З врахуванням (33) рівняння (31) та умова (32) набувають вигляду:

$$\int_{-1}^1 \frac{\tilde{u}(s)}{\sqrt{1 - s^2}} \left[\frac{\varepsilon}{s - y} + \tilde{L}(s, y) \right] ds = \tilde{K}(y). \quad (34)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\tilde{u}(s)}{\sqrt{1 - s^2}} [\tilde{B} + \tilde{F}(s)] ds - A = 0. \quad (35)$$

$$\text{Тут } \tilde{u}(s) = \frac{u(bs)}{b}, \quad \tilde{F}(s) = bF(bs), \quad \tilde{L}(s, y) = bL(bs, by), \quad \tilde{K}(y) = K_1(by), \quad \tilde{B} = \varepsilon b \pi \ln \frac{2}{b}.$$

Розв'язок отриманого інтегрального рівняння (34) шукатимемо методом механічних квадратур. Згідно із вказаним методом [17] отримане рівняння з додатковою умовою еквівалентне системі алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \tilde{u}(s_i) \left[\frac{\varepsilon}{s_i - y_j} + \tilde{L}(s_i, y_j) \right] = \tilde{K}(y_j), \\ \sum_{i=1}^n \tilde{u}(s_i) \left[\tilde{B} + \tilde{F}(s_i) \right] - A = 0. \end{cases} \quad (36)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad s_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad y_j = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)$$

Після визначення $\tilde{u}(s_i)$ відновлюємо функцію $G(x)$. Використавши співвідношення (11) та (25), знаходимо нормальні напруження в точках нижньої межі смуги:

$$\sigma_{z1}(x, h) = \begin{cases} \frac{1}{r\pi} \int_{-b}^x \left[\int_{-b}^b G(t) I(t, z) dt - K(z) \right] dz, & |z| > b \\ -\frac{1}{r} \int_{-b}^x G(z) dz, & |z| \leq b. \end{cases} \quad (37)$$

Величину b визначаємо з умови, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{z1}(x, h) = 0$, яка є наслідком умови рівноваги смуги.

Чисельні результати

Аналіз інтегрального рівняння задачі дозволяє зробити висновок, що ширина зони контакту $2\hat{b}$ не залежить від величини прикладеного навантаження \hat{Q} . Такий же ефект було отримано для одностороннього контакту смуги з півплощиною в роботі [16].

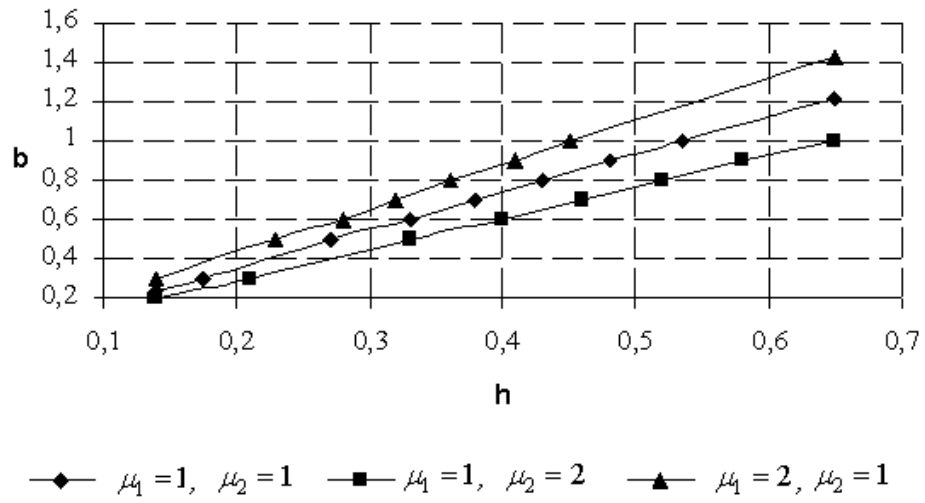
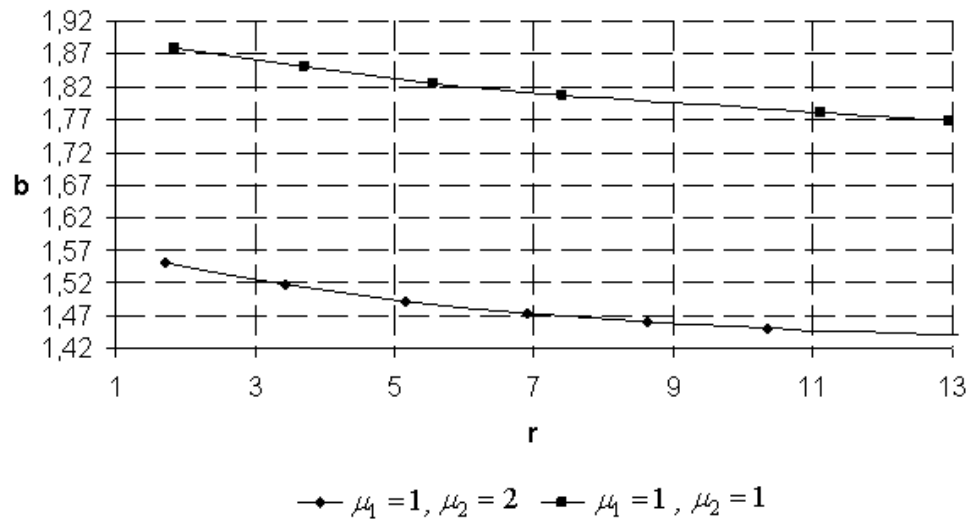
Аналіз розмірностей дозволяє зробити наступні висновки:

1) Якщо модулі зсуву смуги $\hat{\mu}_1$ та півплощини $\hat{\mu}_2$, збільшити в k раз, а коефіцієнт пружного зв'язку \hat{r} зменшити в k раз, то ширина зони контакту не зміниться;

2) Якщо товщину смуги \hat{h} та модулі зсуву смуги та півплощини $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ збільшити в k раз, то і ширина зони контакту збільшиться в k раз;

3) Якщо товщину смуги \hat{h} та коефіцієнт пружного зв'язку \hat{r} збільшити в k раз, то і ширина зони контакту $2\hat{b}$ збільшиться в k раз.

Якщо товщину смуги \hat{h} та коефіцієнт пружного зв'язку \hat{r} збільшити в k раз, то ширина зони контакту $2\hat{b}$ збільшиться в k раз. Оскільки півширина зони контакту \hat{b} слабо залежить від коефіцієнта пружного зв'язку \hat{r} , як видно з рис. 3, то отримуємо наступний висновок: якщо збільшити товщину смуги \hat{h} в k раз, а інші параметри залишити незмінними, то ширина зони контакту $2\hat{b}$ повинна збільшитися в k раз. Цей висновок ілюструє рис. 2.

Рис. 2: Залежність півщини зони контакту b від товщини шару h Рис. 3: Залежність півщини зони контакту b від коефіцієнту пружного зв'язку r

Наведені графіки, які ілюструють залежність величини зони контакту від товщини смуги (рис. 2) та коефіцієнту пружного зв'язку (рис. 3), для смуги, яка перебуває під дією нормального стискаючого навантаження величини Q , прикладеного до точки верхньої межі шару, яка співпадає з

початком декартової системи координат введеної в шарі. Чисельні результати приведено при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ascione L., Grimaldi A. Anilateral contact between a plate and an elastic foundation // *Meccanica*. – 1987. – **19**. – P. 223–233.
2. Fabrikant V. Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation // *Journal of Engineering Mathematics*. – 2010. – **6**. – P. 1–26.
3. Fevzi L., Cakiroglu, Mehmet Cakiroglu, Ragip Erdol Contact Problems for Two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane // *Journal of Engineering Mechanics*. – 2001. – Vol. 127, N 2. – P. 113–118.
4. Gecit M.R., Erdogan F. Frictionless contact problem for an elastic layer under axisymmetric loading // *International Journal of Solids and Structures*. – 1987. – Volume 14, Issue 9, – P. 771–785.
5. Keer L. M., Dundurs J., Tsai K. C. Problems involving a receding contact between a layer and a half space // *I. Appl. Mech. Trans. ASME*. – 1972. – Vol. E 39, № 4. – P. 1115–1120.
6. Ma K., Fan S., Xiao J. A BEM solution for plates on elastic half-space with unilateral contact // *Engineering Analysis with boundary Elements*. – 1999. – **23**. – P. 189–197.
7. Pu S.L., Hussain M.A. Note on unbounded contact between plates and elastic half-space // *Trans. ASME, Ser.E.J.Appl.Mech.* - 1970. - № 3. - P. 859-861.
8. Rhimi M. A., El-Borgi S., Ben Said W. , Jemaa F. Ben receding contact axisymmetric problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate // *International Journal of Solids and Structures*. – 2009. – Vol. 46, Issue 20, 1. – P. 3633–3642.
9. Svec Oj. The unbounded contact problem of a plate on the elastic half-space // *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1973. – **3** – P. 105–113.
10. Weitsman Y. On the unbonded contact between plates and an elastic half space // *Journal of Applied Mechanics, ASME*. – 1969. – **36**. – P. 198–202.
11. Антоненко Н.Н., Величко И.Г. Плоская деформация многослойного основания при наличии касательных и нормальных упругих связей между слоями // *Вісник Запорізького національного університету: Математичне*

- моделивання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 1. – С. 9–14.
12. Вильданова С.И. Критическая скорость движения нагрузки по упругому многослойному основанию // Вісник Донецького університету. Сер. А.: Природничі науки. – 2002. – Вип.2. – С. 212–216.
 13. Годес Ю.Я. Функции податливости многослойного основания с упругими связями между слоями // Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости. – Днепропетровск: ДГУ, 1987. – С. 92–97.
 14. Ламзюк В.Д., Приварников А.К. Плоская задача о неполном контакте полосы с основанием // Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск, 1971. – С. 78–100.
 15. Лифанов И.К. Особые интегральные уравнения и методы их численного решения. – М. : МАКС-Пресс, 2006. – 520 с.
 16. Наумов Ю.Я., Никифорова Ю.Д. Об отставании упругого слоя // Прикл. Мех. – 1971. – Т. 7, вып. 11. – С. 33–40.
 17. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наукова думка, 1976. – 443 с.
 18. Приварников А.К. О контакте слоя с упругим полупространством // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 4. – С. 163–167.
 19. Ткаченко І.Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 70–78.

Стаття одержана: 03.05.2011; перероблений варіант: 09.06.2011;
прийнята: 17.06.2011.