Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н. Каразiна
Серiя "Математика, прикладна математика i механiка"
УДК 517.5 № 967, 2011, с.63–80

Об одной нестационарной системе бесконечно дифференцируемых вейвлетов с компактным носителем

В.А. Макаричев

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина

В статье рассмотрены пространства V_n, состоящие из конечных линейных комбинаций сдвигов финитных бесконечно дифференцируемых функций $v_n(x)$. Установлено, что $V_n \subset V_{n+1}$. Доказано существование финитной вейвлет-функции $w_n(x)$, сдвиги которой образуют алгебраический базис пространства вейвлетов $W_n = \{\varphi \in V_n : \varphi \perp V_{n-1}\}$.

Макарiчев В.О. **Про одну нестацiонарну систему нескiнченно диференцiйовних вейвлетiв з компактним носiєм.** У статтi розглянутi простори V_n, що складаються зi скiнченних лiнiйних комбiнацiй зсувiв фiнiтних нескiнченно диференцiйовних функцiй $v_n(x)$. Установлено, що $V_n \subset V_{n+1}$. Доведене iснування фiнiтної вейвлет-функцiї $w_n(x)$, зсуви якої складають алгебраїчний базис простору вейвлетiв $W_n = \{\varphi \in V_n : \varphi \perp V_{n-1}\}$.

Makarichev V.A. **On a nonstationary system of infinitely differentiable wavelets with compact support.** The spaces V_n of finite linear combinations of shifts of infinitely differentiable functions $v_n(x)$ are considered. It is proved, that $V_n \subset V_{n+1}$. It is proved, that there exist compactly supported wavelet-function $w_n(x)$, such that the system of shifts of this function forms an algebraic basis of wavelet space $W_n = \{\varphi \in V_n : \varphi \perp V_{n-1}\}$.

2000 Mathematics Subject Classification: 42C40.

Введение

Теория вейвлетов или всплесков (от англ. wavelet) является интенсивно развивающимся направлением как чистой, так и вычислительной математики. Исследованиям в данной области посвящено большое количество работ, среди которых выделим монографии Ж. П. Кахана и П. Ж. Лемарье [1];

И. Я. Новикова, В. Ю. Протасова и М. А. Скопиной [2]; И. Добеши [3]; Ч. К. Чуи [4]. Отметим также обзорные статьи И. Я. Новикова, С. Б. Стечкина [5] и Н. М. Астафьевой [6].

В настоящей работе мы докажем существование одной нестационарной системы бесконечно дифференцируемых вейвлетов с компактным носителем. Для этого мы введем в рассмотрение пространства, которые состоят из линейных комбинаций сдвигов атомарных функций [7, 8, 9], и докажем, что в каждом из этих пространств существует базис, состоящий из сдвигов некоторой функции.

Рассмотрим функции

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot F_n(t) dt \text{ и } g_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot G_n(t) dt,$$

где

$$F_n(t) = \left(\frac{\sin \frac{2t}{4^{n+1}}}{\frac{2t}{4^{n+1}}} \right)^n \cdot F\left(\frac{t}{4^n}\right), G_n(t) = \left(\frac{\sin \frac{t}{4^{n+1}}}{\frac{t}{4^{n+1}}} \right)^{n+1} \cdot F\left(\frac{t}{4^{n+1}}\right)$$

и

$$F(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2t}{4^k}}{\frac{2t}{4^k}} \cdot \cos \frac{t}{4^k},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

В следующем разделе будет показано, что функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми с компактным носителем.

Положим

$$v_{2k}(x) = f_k \left(x - \frac{k+2}{2 \cdot 4^k} \right)$$

и

$$v_{2k+1}(x) = g_k \left(x - \frac{k+2}{4^{k+1}} \right)$$

для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Введем в рассмотрение пространства конечных линейных комбинаций сдвигов функций $v_n(x)$.

Пусть V_n — пространство функций вида

$$\varphi(x) = \sum_{k \in I(\varphi)} c_k \cdot v_n \left(x - \frac{k}{2^n} \right), \ x \in R,$$

где $I(\varphi)$ — конечное подмножество множества целых чисел.

В следующем разделе мы докажем, что

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots .$$

Далее мы будем считать, что $\|f\| = \|f\|_{L_2(R)}$ и $(f,g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ — скалярное произведение в пространстве V_n.

Для любого натурального n пусть $W_n = \{\varphi \in V_n : \varphi \perp V_{n-1}\}$ — ортогональное дополнение к V_{n-1} в пространстве V_n.

Целью статьи является доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Для любого натурального n существует функция $w_n(x)$, такая что:*

1) *система $\left\{w_n\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right)\right\}_{j\in Z}$ образует базис пространства W_n;*

2) *$supp\ w_n(x) \subseteq \left[0, \frac{n+2}{2^{n-1}}\right]$;*

3) *для любого $m = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ имеет место*

$$\int\limits_R x^m \cdot w_n(x)dx = 0.$$

Пространства W_n называются пространствами вейвлетов, а система функций

$$\Omega = \left\{w_n\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right)\right\}_{j\in Z, n\in N}$$

— нестационарной неортогональной системой вейвлетов [2, 10, 11]. Свойство 3) теоремы 1 означает, что функция $w_n(x)$ является вейвлетом $\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right)$-го порядка, что, как отмечается, например, в [6], является существенным для приложений. Кроме того, компактность носителей данных вейвлетов делает их удобными в применении.

В отличие от классических вейвлетов, система финитных бесконечно дифференцируемых функций Ω не является порожденной одной функцией. Здесь, однако, следует отметить, что стационарных бесконечно дифференцируемых вейвлетов с компактным носителем не существует [12].

Ход наших рассуждений будет следующим: сначала мы исследуем функции $f_n(x)$, $g_n(x)$ и $v_n(x)$, докажем, что $V_n \subset V_{n+1}$, после чего установим справедливость теоремы 1.

Сначала отметим, что $f_0(x)$ есть функция $mup_2(x)$, которая, согласно [13], является финитным решением функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2(y(4x+3) - y(4x-1) + y(4x+1) - y(4x-3)). \tag{1}$$

В дальнейшем нам понадобятся такие свойства функции $mup_2(x)$:

1) $supp\ mup_2(x) = [-1, 1]$, при этом $mup_2(x)$ является четной [13];

2) $mup_2(x) \in C^{\infty}_{[-1,1]}$ [13];

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} mup_2(x)dx = 1$, а также $mup_2(0) = 1$ [13];

4) преобразование Фурье функции $mup_2(x)$ является целой функцией экспоненциального типа первого порядка роста и убывает на действительной оси при $|t| \to \infty$ быстрей любой степени t [9] (гл. 3, § 1);

5) производная n-го порядка функции $mup_2(x)$ вычисляется по формуле

$$mup_2^{(n)}(x) = 2^{n^2} \cdot \sum_{s=1}^{4^n} \delta_s^{(n)} \cdot mup_2\left(4^n \cdot x + 4^n - 2s + 1\right),$$

причем $\delta_1^{(1)} = \delta_2^{(1)} = 1$, $\delta_3^{(1)} = \delta_4^{(1)} = -1$ и для любого $s = 1, \ldots, 4^{n-1}$ имеет место $\delta_s^{(n)} = \delta_{s+4^{n-1}}^{(n)} = \delta_s^{(n-1)}$, $\delta_{s+2\cdot 4^{n-1}}^{(n)} = \delta_{s+3\cdot 4^{n-1}}^{(n)} = -\delta_s^{(n-1)}$ при $n \geq 2$;

6) значение функции $mup_2(x)$ в точке вида $-1 + \frac{1}{4^k}$ может быть найдено следующим образом: $mup_2\left(-1 + \frac{1}{4^k}\right) = \frac{\nu_{k-1}}{2^{k^2}\cdot(k-1)!}$, где $\nu_k = \int\limits_0^1 x^k \cdot mup_2(x)dx$;

7) величины $\nu_k = \int\limits_0^1 x^k \cdot mup_2(x)dx$, $\mu_s = \int\limits_{-1}^1 x^s \cdot mup_2(x)dx$ могут быть найдены по следующим формулам: $\mu_0 = 1$, $\mu_{2n-1} = 0$,

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{4 \cdot (4^{2n} - 1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 3^{2k+1}}{(2n-2k)! \cdot (2k+1)!} \cdot \mu_{2n-2k},$$

$$\nu_{2n} = \frac{1}{2}\mu_{2n}, \ \nu_{2n-1} = \frac{1}{4^{2n+1}} \cdot \sum_{l=0}^{n} \frac{(2n)! \cdot (1 + 3^{2l})}{(2n-2l)! \cdot (2l)!} \cdot \mu_{2n-2l};$$

8) функция $mup_2(x)$ на промежутке $[-1, 0]$ монотонно возрастает.

Свойство 5) взято из диссертации Г.А. Старца [14]. Его справедливость устанавливается непосредственно путем дифференцирования уравнения (1). Свойства 6)–8) также взяты из [14]. Их доказательство можно найти в [15].

Сделаем некоторое отступление. Пространства V_n появились при следующих обстоятельствах. В диссертации Г.А. Старца [14] были рассмотрены пространства $MUP_n = \left\{\varphi(x) : \ \varphi(x) = \sum\limits_k c_k \cdot mup_2\left(x - \frac{k}{4^n}\right), \ x \in [-1, 1]\right\}$. Эти пространства были использованы для построения базисных функций обобщенного ряда Тейлора для функций неквазианалитического класса

$$H_{\rho,2} = \left\{ f \in C^{\infty}_{[-1,1]} : \ \left| f^{(n)}(x) \right| \leq c(f) \cdot \rho^n \cdot 2^{n^2} \right\}.$$

В ходе исследования аппроксимационных свойств пространств MUP_n было установлено, что система функций

$$\left\{ f_{2n}\left(x - \frac{k}{4^n} + 1 + \frac{n+2}{2 \cdot 4^n}\right) \right\}_{k=1}^{2\cdot 4^n + n + 1}$$

образует базис пространства MUP_n. Для построения вейвлетов можно было бы использовать следующую схему: пусть $\widetilde{V}_n$ — пространства функций вида

$$\varphi(x) = \sum_{k \in I(\varphi)} c_k \cdot f_{2n}\left(x - \frac{2k-n}{2 \cdot 4^n}\right),$$

где $I(\varphi)$ — конечное подмножество множества целых чисел, и $\widetilde{W}_n = \{\varphi \in \widetilde{V}_n : \varphi \perp \widetilde{V}_{n-1}\}$.
Тогда справедливо аналогичное теореме 1 утверждение:
для любого $n \in N$ существуют функции $\varphi_{n1}(x)$, $\varphi_{n2}(x)$ и $\varphi_{n3}(x)$, такие что:

1) *система функций*

$$\left\{\varphi_{n1}\left(x - \frac{s}{4^{n-1}}\right),\ \varphi_{n2}\left(x - \frac{s}{4^{n-1}}\right),\ \varphi_{n2}\left(x - \frac{s}{4^{n-1}}\right)\right\}_{s \in Z}$$

образует базис пространства W_n;

2) *для любого $k = 1, 2, 3$ справедливо включение*

$$supp\ \varphi_{nk} \subseteq \left[-\frac{k+1}{4^n}, \frac{n+1}{4^{n-1}} + \frac{n+1}{4^n}\right];$$

3) *для любого $k = 1, 2, 3$ и любого $s = 0, 1, \ldots, n-1$ имеет место*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^s \cdot \varphi_{nk}(x) dx = 0.$$

Другими словами, в пространстве $\widetilde{W}_n$ существует локальный базис, образованный сдвигами не одной, а трех функций. Для устранения этого "недостатка" в настоящей работе были использованы "промежуточные" пространства, в роли которых выступают V_{2n+1}; при этом $V_{2n} = \widetilde{V}_n$ для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Функции $f_n(x)$, $g_n(x)$ и $v_n(x)$

Поскольку $F_n(t)$ и $G_n(t)$ являются целыми функциями экспоненциального типа, то по теореме Винера – Пэли [16] функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$ являются финитными, причем

$$f_n(x) = 0 \text{ при } |x| > \frac{n+2}{2 \cdot 4^n} \tag{2}$$

и

$$g_n(x) = 0 \text{ при } |x| > \frac{n+2}{4^{n+1}}. \tag{3}$$

Так как $F_n(t)$ и $G_n(t)$ убывают на действительной оси при $|t| \to \infty$ быстрей любой степени t, то функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми.

Докажем, что функция $f_n(x)$ может быть представлена в виде конечной линейной комбинации сдвигов функции $g_n(x)$. Для этого запишем $F_n(t)$ в следующем виде:

$$F_n(t) = \left(\frac{\sin \frac{2t}{4^{n+1}}}{\frac{2t}{4^{n+1}}}\right)^{n+1} \cdot \cos \frac{t}{4^{n+1}} \cdot F\left(\frac{t}{4^{n+1}}\right),$$

откуда получаем

$$F_n(t) = \left(\frac{\sin\frac{t}{4^{n+1}}}{\frac{t}{4^{n+1}}}\right)^{n+1} \cdot \left(\cos\frac{t}{4^{n+1}}\right)^{n+2} \cdot F\left(\frac{t}{4^{n+1}}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{t}{4^{n+1}}\right)^{n+2} \cdot G_n(t) = \left(\frac{e^{i\cdot\frac{t}{4^{n+1}}} + e^{-i\cdot\frac{t}{4^{n+1}}}}{2}\right)^{n+2} \cdot G_n(t) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{j=0}^{n+2} C_{n+2}^{j} \cdot e^{i\cdot\frac{n+2-2j}{4^{n+1}}\cdot t} \cdot G_n(t).$$

Из свойств преобразования Фурье следует, что

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{j=0}^{n+2} C_{n+2}^{j} \cdot g_n\left(x + \frac{n+2-2j}{4^{n+1}}\right). \tag{4}$$

Из этого с использованием (3) получаем

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot g_n\left(x + \frac{n+2}{4^{n+1}}\right) \text{ при } x \in \left(-\frac{n+2}{2\cdot 4^n}; -\frac{n+1}{2\cdot 4^n}\right) \tag{5}$$

и

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot g_n\left(x - \frac{n+2}{4^{n+1}}\right) \text{ при } x \in \left(\frac{n+1}{2\cdot 4^n}; \frac{n+2}{2\cdot 4^n}\right). \tag{6}$$

Таким образом, функцию $f_n(x)$ можно представить в виде конечной линейной комбинации сдвигов функции $g_n(x)$.

Применяя аналогичные рассуждения, можно доказать, что

$$g_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^{j} \cdot f_{n+1}\left(x + \frac{n+1-2j}{2\cdot 4^{n+1}}\right), \tag{7}$$

откуда вместе с (2) следует

$$g_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot f_{n+1}\left(x + \frac{n+1}{2\cdot 4^{n+1}}\right) \text{ при } x \in \left(-\frac{n+2}{4^{n+1}}; -\frac{n+1}{4^{n+1}}\right) \tag{8}$$

и

$$g_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot f_{n+1}\left(x - \frac{n+1}{2\cdot 4^{n+1}}\right) \text{ при } x \in \left(\frac{n+1}{4^{n+1}}; \frac{n+2}{4^{n+1}}\right). \tag{9}$$

Далее нам понадобится следующее свойство функций $f_n(x)$ и $g_n(x)$:

Лемма 1. *Для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы высказывания:*

$$f_n(x) > 0 \textit{ при } \frac{n}{2\cdot 4^n} < |x| < \frac{n+2}{2\cdot 4^n}$$

и

$$g_n(x) > 0 \textit{ при } \frac{n}{4^{n+1}} < |x| < \frac{n+2}{4^{n+1}}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что $f_0(x) > 0$ для любого $x \in (-1, 1)$. Напомним, что $f_0(x) \equiv \mathit{mup}_2(x)$.

Пусть $x_0 \in (-1, 0]$. Существует натуральное число l, такое что $-1 + \frac{1}{4^l} \leq \leq x_0$. Тогда в силу свойства 8) функции $\mathit{mup}_2(x)$ справедливо неравенство $\mathit{mup}_2\left(-1 + \frac{1}{4^l}\right) \leq \mathit{mup}_2(x_0)$. Из свойства 7) следует, что $\nu_k > 0$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$. С учетом свойства 6) это дает $\mathit{mup}_2\left(-1 + \frac{1}{4^l}\right) > 0$. Следовательно, $\mathit{mup}_2(x_0) > 0$.

Поскольку функция $\mathit{mup}_2(x)$ является четной, то для любого $x_0 \in (0, 1)$ выполняется неравенство $\mathit{mup}_2(x_0) > 0$.

Итак, $f_0(x) > 0$ для любого $x \in (-1, 1)$.

Предположим, что $f_n(x) > 0$ при $\frac{n}{2\cdot 4^n} < |x| < \frac{n+2}{2\cdot 4^n}$.

Из равенств (5) и (6) получаем

$$g_n(x) = 2^{n+2} \cdot f_n\left(x - \frac{n+2}{4^{n+1}}\right) \text{ при } -\frac{n+2}{4^{n+1}} < x < -\frac{n}{4^{n+1}}$$

и

$$g_n(x) = 2^{n+2} \cdot f_n\left(x + \frac{n+2}{4^{n+1}}\right) \text{ при } \frac{n}{4^{n+1}} < x < \frac{n+2}{4^{n+1}},$$

откуда в силу предположения следует, что

$$g_n(x) > 0 \text{ при } \frac{n}{4^{n+1}} < |x| < \frac{n+2}{4^{n+1}}. \tag{10}$$

Абсолютно аналогично, из (10) вместе с равенствами (8) и (9) следует, что $f_{n+1}(x) > 0$ при $\frac{n+1}{2\cdot 4^{n+1}} < |x| < \frac{n+3}{2\cdot 4^{n+1}}$.

Лемма доказана.

Приведем теперь некоторые свойства функций $v_n(x)$. Сначала отметим, что по построению эти функции являются бесконечно дифференцируемыми. Кроме того, из (2) и (3) следует, что

$$v_{2n}(x) = 0 \text{ при } x \notin \left[0, \frac{n+2}{4^n}\right] \tag{11}$$

и

$$v_{2n+1}(x) = 0 \text{ при } x \notin \left[0, \frac{n+2}{2\cdot 4^n}\right] \tag{12}$$

для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Далее, непосредственным следствием леммы 1 является

Лемма 2. *Для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы высказывания:*

$$v_{2n}(x) > 0 \textit{ при } x \in \left(0, \frac{1}{4^n}\right) \cup \left(\frac{n+1}{4^n}, \frac{n+2}{4^n}\right)$$

и

$$v_{2n+1}(x) > 0 \textit{ при } x \in \left(0, \frac{1}{2\cdot 4^n}\right) \cup \left(\frac{n+1}{2\cdot 4^n}, \frac{n+2}{2\cdot 4^n}\right).$$

Докажем, что пространства $V_0, V_1, V_2, \ldots$ являются вложенными.

Теорема 2. *Для любого* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливо включение* $V_n \subset V_{n+1}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $n = 0, 1, 2, \ldots$.

С использованием (4) получаем

$$v_{2n}(x) = f_n\left(x - \frac{n+2}{2 \cdot 4^n}\right) = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{j=0}^{n+2} C_{n+2}^j \cdot g_n\left(x - \frac{n+2}{2 \cdot 4^n} + \frac{n+2-2j}{4^{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{j=0}^{n+2} C_{n+2}^j \cdot g_n\left(x - \frac{j}{2 \cdot 4^n} - \frac{n+2}{4^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{j=0}^{n+2} C_{n+2}^j \cdot v_{2n+1}\left(x - \frac{j}{2^{2n+1}}\right),$$

откуда имеем $V_{2n} \subset V_{2n+1}$.

Аналогично, из (7) следует, что

$$v_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j \cdot v_{2n+2}\left(x - \frac{j}{2^{2n+2}}\right).$$

Поэтому $V_{2n+1} \subset V_{2n+2}$.

Теорема доказана.

Таким образом, $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, причем элементы этих пространств представляют собой финитные бесконечно дифференцируемые функции.

Базис пространства вейвлетов W_n

В этом разделе мы будем считать, что n — натуральное число.

Мы начнем со следующего простого свойства элементов W_n:

Лемма 3. *Если функция* $\varphi(x)$ *принадлежит пространству* W_n, *то для любого целого* k *функция* $\varphi\left(x - \frac{k}{2^{n-1}}\right)$ *также принадлежит* W_n.

Доказательство. Пусть $\varphi \in W_n$. Тогда для любого $s \in Z$ справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot v_{n-1}\left(x - \frac{s}{2^{n-1}}\right) dx = 0. \qquad (13)$$

Рассмотрим произвольное $k \in Z$. Пусть $\xi(x) = \varphi\left(x - \frac{k}{2^{n-1}}\right)$. Докажем, что $\xi \in W_n$.

Функция $\varphi(x)$ представима в виде $\varphi(x) = \sum\limits_{s \in I(\varphi)} c_s \cdot v_n\left(x - \frac{s}{2^n}\right)$.

Тогда можно записать, что $\xi(x) = \sum\limits_{s \in I(\varphi)} c_s \cdot v_n\left(x - \frac{2 \cdot k + s}{2^n}\right)$. Следовательно, функция $\xi(x)$ принадлежит линейному пространству V_n.

Остается доказать, что $\xi \perp V_{n-1}$.

Для любого $j \in Z$ имеет место

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) \cdot v_{n-1}\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x - \frac{k}{2^{n-1}}\right) \cdot v_{n-1}\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cdot v_{n-1}\left(t - \frac{j-k}{2^{n-1}}\right) dt = 0.$$

Последнее равенство следует из (13). Значит, $\xi \perp V_{n-1}$.

Лемма доказана.

Далее будем использовать следующую форму представления функции $\varphi \in V_n \setminus \{0\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=m(\varphi)}^{M(\varphi)} c_k \cdot v_n\left(x - \frac{k}{2^n}\right),$$

где $m(\varphi)$, $M(\varphi)$ — целые числа, такие что $m(\varphi) \leq M(\varphi)$, причем $c_{m(\varphi)} \neq 0$ и $c_{M(\varphi)} \neq 0$.

Введем в рассмотрение следующие множества:
для всякого $k \in \{0;1\}$ пусть $L_k^{[n]}$ — класс функций $\varphi \in W_n \setminus \{0\}$, таких что $m(\varphi) = 2 \cdot l - k$, где l — некоторое целое число. С использованием этих множеств можно записать, что $W_n = L_{n,0} \cup L_{n,1} \cup \{0\}$.

Отметим ключевые свойства множеств $L_{n,k}$.

Лемма 4. *Множество $L_{n,1}$ является пустым для любого $n \in N$.*

Доказательство. Предположим, что $L_{n,1}$ не является пустым множеством. Тогда существует такая функция $\varphi \in W_n \setminus \{0\}$, что $m(\varphi) = 2 \cdot l - 1$, где l — некоторое целое число.

Для функции $\varphi(x)$ справедливо представление

$$\varphi(x) = \sum_{k=m(\varphi)}^{M(\varphi)} c_k \cdot v_n\left(x - \frac{k}{2^n}\right),$$

причем $c_{m(\varphi)} \neq 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $n = 2 \cdot m + 1$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Так как $\varphi \perp V_{2m}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot v_{2m}\left(x - \frac{l-m-2}{4^m}\right) dx = 0. \tag{14}$$

Положим $\xi(x) = \varphi(x) \cdot v_{2m}\left(x - \frac{l-m-2}{4^m}\right)$. Из (11) и (12) следует, что носители функций $v_{2m}\left(x - \frac{l-m-2}{4^m}\right)$ и $v_{2m+1}\left(x - \frac{k}{2 \cdot 4^m}\right)$ не пересекаются при $k > m(\varphi)$. Поэтому $\xi(x) = c_{m(\varphi)} \cdot v_{2m}\left(x - \frac{l-m-2}{4^m}\right) \cdot v_{2m+1}\left(x - \frac{m(\varphi)}{2 \cdot 4^m}\right)$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot v_{2m}\left(x - \frac{l-m-2}{4^m}\right) dx =$$

$$= c_{m(\varphi)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v_{2m}\left(x - \frac{l-m-2}{4^m}\right) \cdot v_{2m+1}\left(x - \frac{m(\varphi)}{2 \cdot 4^m}\right) dx.$$

Из леммы 2 следует неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{2m}\left(x-\frac{l-m-2}{4^m}\right)\cdot v_{2m+1}\left(x-\frac{m(\varphi)}{2\cdot 4^m}\right)dx>0,$$

которое с учетом (14) дает $c_{m(\varphi)}=0$, а это противоречит условию $c_{m(\varphi)}\neq 0$. Значит, множество $L_{2m+1,1}$ является пустым.

Применяя аналогичные рассуждения, можно доказать, что для любого натурального m множество $L_{2m,1}$ также является пустым.

Лемма доказана.

Следовательно, $W_n=\{0\}\cup L_{n,0}$.

Лемма 5. *Для любого натурального n множество $L_{n,0}$ не является пустым.*

Доказательство. Из приведенных выше результатов следует, что достаточно доказать существование в пространстве W_n функции, которая тождественно не равна нулю.

Рассмотрим сначала случай $n=2m+1$, где $m=0,1,2,\ldots$. Докажем, что существуют коэффициенты $\{c_k\}$, не все равные нулю, такие что функция

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{3m+4} c_k\cdot v_{2m+1}\left(x-\frac{k}{2^{2m+1}}\right) \tag{15}$$

принадлежит пространству W_{2m+1}.

Из (11) и (12) следует справедливость включений $supp\ \varphi(x)\subseteq\left[0,\frac{2m+3}{2^{2m}}\right]$ и $supp\ v_{2m}\left(x-\frac{j}{2^{2m}}\right)\subseteq\left[\frac{j}{2^{2m}},\frac{m+2+j}{2^{2m}}\right]$, откуда видно, что носители функций $\varphi(x)$ и $v_{2m}\left(x-\frac{j}{2^{2m}}\right)$ не пересекаются, если $j\leq -m-2$ или $j\geq 2m+3$. Следовательно, функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству W_{2m+1}, если для любого $j=-m-1,-m,\ldots,2m+2$ выполняется равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cdot v_{2m}\left(x-\frac{j}{2^{2m}}\right)dx=0,$$

что равносильно следующему:

$$\sum_{k=0}^{3m+4} c_k\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{2m+1}\left(x-\frac{k}{2^{2m+1}}\right)\cdot v_{2m}\left(x-\frac{j}{2^{2m}}\right)dx=0,$$

где $j=-m-1,-m,\ldots,2m+2$.

Таким образом, мы получили однородную систему линейных уравнений относительно $\{c_k\}$. Поскольку эта система состоит из $3m+4$ уравнений и $3m+5$ неизвестных, то существует ненулевое решение. Значит, существует функция $\varphi(x)$ вида (15), которая тождественно не равна нулю и принадлежит пространству W_{2m+1}.

Пусть теперь $n = 2m + 2$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{3m+5} c_k \cdot v_{2m+2}\left(x - \frac{k}{2^{2m+2}}\right). \tag{16}$$

Из (11) и (12) следует, что $supp\,\varphi(x) \subseteq \left[0, \frac{m+2}{2^{2m}}\right]$ и $supp\,v_{2m+1}\left(x - \frac{j}{2^{2m+1}}\right) \subseteq$ $\subseteq \left[\frac{j}{2^{2m+1}}, \frac{m+2+j}{2^{2m+1}}\right]$. Значит, функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству W_{2m+2}, если для любого $j = -m-1, -m, \ldots, 2m+3$ выполняется

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot v_{2m+1}\left(x - \frac{j}{2^{2m+1}}\right) dx = 0,$$

что равносильно однородной системе линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{3m+5} c_k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v_{2m+2}\left(x - \frac{k}{2^{2m+2}}\right) \cdot v_{2m+1}\left(x - \frac{j}{2^{2m+1}}\right) dx = 0,$$

где $j = -m-1, -m, \ldots, 2m+3$.

Эта система состоит из $3m+5$ уравнений и $3m+6$ неизвестных. Поэтому она имеет ненулевое решение. Следовательно, $W_{2m+2} \setminus \{0\} \neq \varnothing$.

Лемма доказана.

Замечание 1. *При доказательстве леммы 5 нами установлено, что для любого натурального n в пространстве W_n содержится функция $\varphi(x) \not\equiv 0$, такая что $supp\,\varphi(x) \subseteq \left[0, \frac{n+2}{2^{n-1}}\right]$.*

Докажем, что множество $L_{n,0}$ содержит функцию $w_n(x)$, которая обладает свойствами, указанными в теореме 1. Поскольку сдвиги этой функции должны составлять базис пространства W_n (заметим, что W_n состоит из финитных функций), то естественно предположить, что ее носитель будет "наименьшим" в классе $L_{n,0}$. Дадим определение возникающему понятию функции с наименьшим носителем.

Определение. *Функцию φ_0 будем называть функцией с наименьшим носителем в $L_{n,0}$, если выполнены следующие условия:*

1) $\varphi_0 \in L_{n,0}$;

2) $M(\varphi_0) - m(\varphi_0) = \min\limits_{\varphi \in L_{n,0}} (M(\varphi) - m(\varphi))$.

Поскольку $L_{n,0}$ не является пустым, то в этом классе существует функция с наименьшим носителем.

Пусть $w_n(x)$ — функция с наименьшим носителем в $L_{n,0}$.

Согласно замечанию 1, длина носителя функции $w_n(x)$ не превышает $\frac{n+2}{2^{n-1}}$. Кроме того, из леммы 3 следует, что для любого $j \in Z$ функция $\xi(x) = w_n\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right)$ также принадлежит W_n. Более того, взятая таким образом функция $\xi(x)$ также является функцией с наименьшим носителем в $L_{n,0}$. Значит, мы можем считать, что

$$supp\ w_n(x) \subseteq \left[0, \frac{n+2}{2^{n-1}}\right]. \tag{17}$$

Докажем, что в пространстве W_n существует базис, состоящий из сдвигов функции $w_n(x)$.

Введем в рассмотрение систему функций

$$\left\{w_n\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right)\right\}_{j\in Z}. \tag{18}$$

Докажем сначала справедливость следующего свойства функций данной системы:

Лемма 6. *Если*

$$\sum_{j\in I} \lambda_j \cdot w_n\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right) \equiv 0,$$

где I — конечное подмножество множества целых чисел, то для любого $j \in I$ выполняется

$$\lambda_j = 0.$$

Доказательство. Пусть I — конечное подмножество множества целых чисел. Предположим, что функция

$$\varphi(x) = \sum_{j\in I} \lambda_j \cdot w_n\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right)$$

тождественно равна нулю.

Представим множество I следующим образом: $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \{z_k\}$, где $z_k < z_{k+1}$ для любого $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Докажем, что для любого k имеет место равенство $\lambda_{z_k} = 0$.

Пусть $k = 1$. Возьмем любую точку $x_0 \in \left(\frac{z_1}{2^{n-1}}, \frac{z_1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right)$. Из (17) следует, что $w_n\left(x_0 - \frac{z_k}{2^{n-1}}\right) = 0$ при $k > 1$. Значит, $\varphi(x_0) = \lambda_{z_1} \cdot w_n\left(x_0 - \frac{z_1}{2^{n-1}}\right)$.

Для функции $w_n(x)$ справедливо представление

$$w_n(x) = \sum_{j=m(w_n)}^{M(w_n)} c_j \cdot v_n\left(x - \frac{j}{2^n}\right),$$

где $c_{m(w_n)} \neq 0$.

Тогда

$$\varphi(x_0) = \lambda_{z_1} \cdot \sum_{j=m(w_n)}^{M(w_n)} c_j \cdot v_n\left(x_0 - \frac{z_1}{2^{n-1}} - \frac{j}{2^n}\right),$$

откуда в силу (11) и (12) получаем $\varphi(x_0) = \lambda_{z_1} \cdot c_{m(w_n)} \cdot v_n\left(x_0 - \frac{z_1}{2^{n-1}}\right)$.

Из леммы 2 следует, что $v_n\left(x_0 - \frac{z_1}{2^{n-1}}\right) > 0$. Так как $c_{m(w_n)} \neq 0$, то равенство $\varphi(x_0) = 0$ возможно в том и только в том случае, когда $\lambda_{z_1} = 0$.

Применяя абсолютно аналогичные рассуждения, можно доказать, что $\lambda_{z_2} = \ldots = \lambda_{z_N} = 0$.

Лемма доказана.

Таким образом, только тривиальная конечная линейная комбинация сдвигов функции $w_n(x)$ обращается в ноль.

Теперь мы можем доказать основную теорему относительно системы функций (18).

Теорема 3. *Система функций (18) образует базис пространства W_n.*

Доказательство. Чтобы установить справедливость теоремы, нам нужно доказать, что любая функция $\varphi \in W_n$ может быть единственным образом представлена в виде конечной линейной комбинации функций системы (18). Если мы докажем существование такого представления, то его единственность будет следовать из леммы 6.

Докажем, что любой ненулевой элемент линейного пространства W_n может быть представлен в виде конечной линейной комбинации функций системы (18). Для этого положим $I = \bigcup\limits_{\varphi \in W_n \setminus \{0\}} \{M(\varphi) - m(\varphi)\}$. Отметим, что I является подмножеством множества неотрицательных целых чисел.

Представим множество I в следующем виде:

$$I = \bigcup_{j=0}^{\infty} \{d_j\}, \text{ где } d_j < d_{j+1},\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Необходимо доказать следующее утверждение: для любого $j = 0, 1, 2, \ldots$ каждая функция $\varphi \in W_n$, такая что $M(\varphi) - m(\varphi) = d_j$, может быть представлена в виде линейной комбинации функций системы (18).

Доказательство будем проводить с использованием метода математической индукции.

База индукции. Пусть $j = 0$. Рассмотрим любую функцию $\varphi \in W_n \setminus \{0\}$, такую что $M(\varphi) - m(\varphi) = d_0$. Для функции $\varphi(x)$ справедливо разложение

$$\varphi(x) = \sum_{k=m(\varphi)}^{M(\varphi)} x_k \cdot v_n\left(x - \frac{k}{2^n}\right). \tag{19}$$

Так как $\varphi(x) \not\equiv 0$, то $\varphi \in L_{n,0}$.

Далее, поскольку $w_n(x)$ — функция с наименьшим носителем, то имеет место равенство $M(w_n) - m(w_n) = \min\ I = d_0 = M(\varphi) - m(\varphi)$. Для функции $w_n(x)$ справедливо представление

$$w_n(x) = \sum_{i=m(w_n)}^{M(w_n)} c_i \cdot v_n\left(x - \frac{i}{2^n}\right). \tag{20}$$

Положим $\xi(x) = \varphi(x) - \frac{x_{m(\varphi)}}{c_{m(w_n)}} \cdot v_n\left(x - \frac{l}{2^{n-1}}\right)$, где $l = \frac{m(\varphi)-m(w_n)}{2}$. Число l является целым, так как функции $w_n(x)$ и $\varphi(x)$ принадлежат классу $L_{n,0}$. Из леммы 3 следует, что $\xi(x) \in W_n$. Используя разложения (19) и (20), получаем

$$\xi(x) = x_{m(\varphi)} \cdot v_n\left(x - \frac{m(\varphi)}{2^n}\right) + \sum_{k=m(\varphi)+1}^{M(\varphi)} x_k \cdot v_n\left(x - \frac{k}{2^n}\right) -$$

$$-\frac{x_{m(\varphi)}}{c_{m(w_n)}} \cdot c_{m(w_n)} \cdot v_n\left(x - \frac{l}{2^{n-1}} - \frac{m(w_n)}{2^n}\right) -$$

$$-\frac{x_{m(\varphi)}}{c_{m(w_n)}} \cdot \sum_{i=m(w_n)+1}^{M(w_n)} c_i \cdot v_n\left(x - \frac{l}{2^{n-1}} - \frac{i}{2^n}\right) =$$

$$= x_{m(\varphi)} \cdot v_n\left(x - \frac{m(\varphi)}{2^n}\right) + \sum_{k=m(\varphi)+1}^{M(\varphi)} x_k \cdot v_n\left(x - \frac{k}{2^n}\right) -$$

$$-x_{m(\varphi)} \cdot v_n\left(x - \frac{m(\varphi) - m(w_n)}{2^n} - \frac{m(w_n)}{2^n}\right) -$$

$$-\frac{x_{m(\varphi)}}{c_{m(w_n)}} \cdot \sum_{i=m(w_n)+1}^{M(w_n)} c_i \cdot v_n\left(x - \frac{m(\varphi) - m(w_n)}{2^n} - \frac{i}{2^n}\right) =$$

$$= \sum_{k=m(\varphi)+1}^{M(\varphi)} y_k \cdot v_n\left(x - \frac{k}{2^n}\right),$$

где $y_k = x_k - \frac{x_{m(\varphi)}}{c_{m(w_n)}} \cdot c_{k-m(\varphi)+m(w_n)}$. Значит, если функция $\xi(x)$ тождественно не равна нулю, то $M(\xi) - m(\xi) \le M(\varphi) - m(\varphi) - 1 < d_0$, что противоречит условию $d_0 = \min\ I$. Следовательно, $\xi(x) \equiv 0$ и

$$\varphi(x) = \frac{x_{m(\varphi)}}{c_{m(w_n)}} \cdot w_n\left(x - \frac{l}{2^{n-1}}\right).$$

Итак, при $j = 0$ утверждение доказано.

Предположим, что для любого $j = 0, 1, \ldots, m$ всякая функция $\varphi(x) \in W_n$, такая что $M(\varphi) - m(\varphi) = d_j$, может быть представлена в виде конечной линейной комбинации функций системы (18). Докажем, что это утверждение справедливо и для $j = m + 1$.

Рассмотрим любую функцию $\varphi \in W_n$, для которой выполняется условие $M(\varphi) - m(\varphi) = d_{m+1}$.

Пусть $\xi(x) = \varphi(x) - \frac{x_{m(\varphi)}}{c_{m(w_n)}} \cdot v_n\left(x - \frac{m(\varphi)-m(w_n)}{2^n}\right)$. Используя проведенные выше преобразования, получаем

$$\xi(x) = \sum_{k=m(\varphi)+1}^{M(\varphi)} y_k \cdot v_n\left(x - \frac{k}{2^n}\right),$$

откуда видно, что возможны два случая:

1) $M(\xi)-m(\xi) \leq M(\varphi)-m(\varphi)-1 < d_{m+1}$, если функция $\xi(x)$ тождественно не равна нулю;

2) $\xi(x) \equiv 0$.

В первом случае мы воспользуемся тем, что, согласно предположению, функция $\xi(x)$ может быть представлена в виде линейной комбинации функций системы (18). Следовательно, функция $\varphi(x)$ также может быть представлена в виде линейной комбинации функций системы (18).

Во втором случае мы имеем $\varphi(x) \equiv \frac{x_{m(\varphi)}}{c_{m(w_n)}} \cdot w_n \left(x - \frac{m(\varphi)-m(w_n)}{2^n}\right)$.

Таким образом, мы доказали, что любая функция $\varphi \in W_n \setminus \{0\}$ может быть представлена в виде линейной комбинации функций системы (18).

Теорема доказана.

Итак, нами установлено существование в пространстве W_n локального базиса, состоящего из сдвигов функции $w_n(x)$.

Чтобы установить справедливость утверждения теоремы 1, остается доказать следующее:

Теорема 4. *Для любого $i = 0, 1, 2, \ldots$ и любого $m = 0, 1, \ldots, i$ имеют место равенства*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \cdot w_{2i+1}(x)dx = 0 \ \ и \ \int_{-\infty}^{\infty} x^m \cdot w_{2i+2}(x)dx = 0.$$

Чтобы доказать теорему, нам понадобится следующий факт:

Лемма 7. *Для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ существуют коэффициенты $\{a_s\}$, такие что*

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s \cdot mup_2\left(x - \frac{s}{4^m}\right) \equiv x^m.$$

Доказательство. Для проверки справедливости утверждения леммы будем использовать метод математической индукции.

1. База индукции. Докажем наше утверждение для случая, когда $m = 0$. Для этого воспользуемся тем, что

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} mup_2(x-s) \equiv 1. \tag{21}$$

Это свойство взято из [14]. Для полноты изложения приведем его доказательство.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} mup_2(x-s)$. Из свойства 1) функции $mup_2(x)$ получаем, что $\varphi(x) = mup_2(x) + mup_2(x-1)$ для любого $x \in [0, 1]$. Откуда, с учетом уравнения (1), получаем $\varphi'(x) = 0$ на $[0, 1]$. Из свойств 1) и 3) функции $mup_2(x)$ следует равенство $\varphi(0) = 1$. Значит, $\varphi(x) \equiv 1$ на $[0, 1]$.

Аналогично, $\varphi(x) \equiv 1$ на $[s, s+1]$ для любого $s \in Z$.

Справедливость (21) установлена.

2. Предположим, что существуют коэффициенты $\{c_s\}$, такие что

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s \cdot mup_2\left(x - \frac{s}{4^{m-1}}\right) \equiv x^{m-1}.$$

3. Докажем, что существуют коэффициенты $\{a_s\}$, такие что

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s \cdot mup_2\left(x - \frac{s}{4^{m}}\right) \equiv x^{m}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} a_s \cdot mup_2\left(x - \frac{s}{4^m}\right)$. Из свойства 5) функции $mup_2(x)$ получаем

$$\varphi'(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \nu_l \cdot mup_2\left(4x - \frac{l}{4^{m-1}}\right),$$

где

$$\nu_l = 2 \cdot \sum_{s=1}^{4} \delta_s^{(1)} \cdot a_{l+4^{m-1}(5-2s)}. \tag{22}$$

Согласно предположению индукции, существуют коэффициенты $\{c_k\}$, такие что $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot mup_2\left(4x - \frac{k}{4^{m-1}}\right) \equiv (4 \cdot x)^{m-1}$.

Положим $\nu_l = m \cdot \frac{c_l}{4^{m-1}}$. Используя (22), мы можем найти набор коэффициентов $\{a_k\}$, таких что $\varphi'(x) \equiv n \cdot x^{m-1}$. Из этого вместе с (21) следует утверждение леммы.

Итак, *лемма доказана.*

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 4.

По построению $v_0(x) = mup_2(x-1)$. Из леммы 7 следует, что для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ существуют коэффициенты $\{a_s\}$, такие что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_s \cdot v_0\left(x - \frac{s - 2^{2s}}{2^{2m}}\right) \equiv x^m,$$

откуда в силу теоремы 2 получаем: для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ существуют коэффициенты b_k, такие что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot v_{2m}\left(x - \frac{k}{2^{2m}}\right) \equiv x^m. \tag{23}$$

Рассмотрим произвольные $i = 0, 1, 2, \ldots$ и $m = 0, 1, \ldots, i$. Из (17) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \cdot w_{2i+1}(x)dx = \int_A x^m \cdot w_{2i+1}(x)dx,$$

где $A = \left[0, \frac{2i+3}{2^{2i}}\right]$. Кроме того, из (23) следует, что существуют такие целые числа k_1 и k_2, что $\sum\limits_{k=k_1}^{k_2} b_k \cdot v_{2m}\left(x - \frac{k}{2^{2m}}\right) = x^m$ для любого $x \in A$.

Далее, введем в рассмотрение функцию $\xi(x)$, которую для любого $x \in R$ определим формулой $\xi(x) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} b_k \cdot v_{2m}\left(x - \frac{k}{2^{2m}}\right)$. Отметим, что $\xi(x) = x^m$ для любого $x \in A$. Поскольку эта функция принадлежит пространству V_{2m} и $2m < 2i+1$, то $(\xi, w_{2i+1}) = 0$. Следовательно,

$$0 = (\xi, w_{2i+1}) = \int\limits_A x^m \cdot w_{2i+1}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^m \cdot w_{2i+1}(x)dx = 0.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^m \cdot w_{2i+2}(x)dx = 0.$$

Теорема доказана.

Из (17) и теорем 3, 4 следует утверждение теоремы 1.

Итак, мы доказали, что в пространстве вейвлетов W_n существует базис, который образован сдвигами финитной бесконечно дифференцируемой вейвлет-функции $\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right)$-го порядка.

Замечание 2. *Система функций (18) может быть ортогонализована, в результате чего будут получены нефинитные вейвлеты, которые убывают на бесконечности экспоненциально.*

Замечание 3. *Если пространства $\{V_n\}$ пополнить по норме $L_2(R)$, то система функций, образованная сдвигами $w_n(x)$, также будет базисом в соответствующем ортогональном дополнении W_n.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Kahane J.P., Lemarie-Rieusset P.G. Fourier series and wavelets. – London: Gordon and Breach, 1995. – 394 p.

2. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 616 с.

3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ РХД, 2001. – 464 с.

4. Chui C.K. An Introduction to Wavelets. – New York: Academic Press, 1992. – 366 p.

5. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // Усп. мат. наук. – 1998. – Т. 53, вып. **6(324).** – С. 53–128.

6. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Усп. физ. наук. – 1996. – Т. 161, вып. **11.** – С. 1145–1170.

7. Рвачев В. А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение // Усп. мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. **1(271).** – С. 77–103.

8. Rvachev V. A. Compactly supported solutions of functional differential equations and their applications // Russ. Math. Surveys. – 1990. – V. 45, No. **1.** – P. 87–120.

9. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наукова думка, 1979. – 196 с.

10. Lemarie-Rieusset P. G. Fonctions d'echelle interpolantes, polynomes de Bernstein et ondelettes non stationnaires // Rev. Mat. Iberoamericana. – 1997. – V. 13, No. **1.** – P. 91–188.

11. Берколайко М. З., Новиков И. Я. О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, вып. **3.** – Р. 3—12.

12. Lemarie-Rieusset P. G. Existence de "fonction-pere" pour les ondolettes a support compact // C.R. Acad.Sci. Paris Ser. 1. – 1992. – V. 314, № **1.** – P. 17–19.

13. Рвачев В. А., Старец Г. А. Некоторые атомарные функции и их применение // Докл. АН УССР, сер. А. – 1983. – **11.** – С. 22–24.

14. Старец Г. А. Один класс атомарных функций и его применение // Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1985.

15. Макаричев В. А. Асимптотика базисных функций обобщенного ряда Тейлора для класса $H_{\rho,2}$ // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2008. – **826.** – С. 67–86.

16. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

Статья получена: 4.12.2009; окончательный вариант: 15.03.2011; принята: 27.04.2011.