Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977 № 990, 2011, с.48–53

Решение задачи синтеза для одной неуправляемой по первому приближению системы

М.О. Бебия
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл.Свободы 4, 61022, Харьков, Украина
bebiya@rambler.ru

В настоящей работе рассматривается задача синтеза для нелинейной системы вида $\dot{x}_1 = u(x),\ \dot{x}_2 = x_1,\ \dot{x}_3 = x_2^3$. Решение данной задачи проводится на основании метода функции управляемости, введенного В.И. Коробовым. Данный метод позволяет найти множество позиционных управлений, которые переводят рассматриваемую систему из произвольной начальной точки x_0 в начало координат за конечное время $T(x_0)$.

Бебія М.О., **Задача синтезу для однієї некерованої за першим наближенням системи.** У цій роботі розглядається задача синтезу для нелінійної системи $\dot{x}_1 = u(x),\ \dot{x}_2 = x_1,\ \dot{x}_3 = x_2^3$. Розв'язок цієї задачі здійснюється на основі метода функції керованості, введеного В.І. Коробовим. Даний метод дозволяє знайти множину позиційних керувань, які переводять наведену систему із довільної початкової точки x_0 у початок координат за скінченний час $T(x_0)$.

Bebiya M.O., **Solution of a synthesis problem for an uncontrollable with respect to the first approximation system.** The synthesis problem for the nonlinear system $\dot{x}_1 = u(x),\ \dot{x}_2 = x_1,\ \dot{x}_3 = x_2^3$ is considered in this paper. The solution of this problem is given according to the Controllability Function method introduced by V.I. Korobov. This method gives us the possibility to find a set of positional controls that steers our system from arbitrary initial point x_0 to the origin in finite time $T(x_0)$.

2000 Mathematics Subject Classification 47A45.

1. Введение

Настоящая работа посвящена развитию метода функции управляемости для систем, неуправляемых по первому приближению. Рассмотрим управляемую систему следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2^3. \end{cases} \tag{1}$$

Задача синтеза для данной системы состоит в отыскании позиционного управления $u = u(x)$ такого, что траектория замкнутой системы $\dot{x}_1 = u(x)$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_2^3$ начинается в точке $x(0) = x_0$ и оканчивается в нуле за конечное время $T(x_0)$, то есть $x(t) \to 0$ при $t \to T(x_0)$. Отметим, что система (1) нелинеаризуема в 0. В этом состоит её основное отличие от систем, рассматриваемых в [1, 4]. Как будет показано далее, матрица управляемости для данной системы будет неотрицательно определена, в отличии от случая двумерной системы $\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = x_1^3$, рассматриваемой в [8].

2. Основные результаты

Решим задачу синтеза для системы (1). Для этого мы воспользуемся методом функции управляемости В.И.Коробова (см. [1, 2, 4, 5, 6, 7]). Мы найдем функции $\{u(x), \Theta(x)\}$, такие что будут выполнены условия основной теоремы из [1]. Рассмотрим следующее множество позиционных управлений

$$U = \left\{ u(x) : u(x) = \frac{a_1 x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta^2(x)} + \frac{a_3 x_3}{\Theta^7(x)} + \frac{a_4 x_2^3}{\Theta^6(x)}, \text{ где } a_1, a_2, a_3, a_4 < 0 \right\} \tag{2}$$

Данное множество будем рассматривать как множество управлений, возможно решающих задачу синтеза для системы (1). Функция управляемости $\Theta(x)$ определяется как положительный корень уравнения

$$2a_0\Theta^{14} = f_{11}\Theta^{12}x_1^2 + f_{22}\Theta^{10}x_2^2 + f_{33}x_3^2 + 2f_{12}\Theta^{11}x_1x_2 + \\ +2f_{13}\Theta^6 x_1x_3 + 2f_{23}\Theta^5 x_2x_3 \tag{3}$$

для некоторых действительных $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $a_0 > 0$.

Замечание 1. *Введем некоторые обозначения*

$$F = \begin{pmatrix} f11 & f12 & f13 \\ f12 & f22 & f23 \\ f13 & f23 & f33 \end{pmatrix}, \quad D_\Theta = \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^{-\frac{13}{2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (3) *можно переписать в виде*

$$2a_0\Theta = (D_\Theta F D_\Theta x, x). \tag{4}$$

И наше позиционное управление $u \in U$ принимает вид

$$u(x) = \Theta^{-\frac{1}{2}}(x) a^T D_{\Theta(x)} x + \frac{a_4 x_2^3}{\Theta^6(x)}, \tag{5}$$

где $a^T = (a_1, a_2, a_3)$.

Доказательство. Следует из непосредственного вычисления.

Ниже будут сформулированы условия на коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 и на элементы матрицы управляемости f_{ij} из (2)-(3), при которых управление вида (5) решает задачу синтеза для системы (1).

Потребуем, чтобы производная функции управляемости $\Theta(x)$ в силу системы (1) равнялась $-\alpha$, где $\alpha > 0$.

Пусть матрица F имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 1 & f_{12} & -a_4 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ -a_4 & f_{23} & a_4^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Продифференцировав уравнение (3) по времени в силу системы (1), получаем

$$\dot{\Theta} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{7}$$

где B_1 и B_2 имеют вид

$$B_1 = (a_1 + f_{12})\Theta^{12}x_1^2 + (a_2 + f_{22} + f_{12}a_1)\Theta^{11}x_1x_2 + (a_3 - a_4a_1 + f_{23})\Theta^6x_1x_3 +$$
$$+(f_{12}a_3 - a_4a_2)\Theta^5x_2x_3 + f_{12}a_2\Theta^{10}x_2^2 - a_4a_3x_3^2 + (f_{23} + f_{12}a_4)\Theta^6x_2^4,$$
$$B_2 = \Theta^{12}x_1^2 + 2f_{22}\Theta^{10}x_2^2 + 7a_4^2x_3^2 + 3f_{12}\Theta^{11}x_1x_2 - 8a_4\Theta^6x_1x_3 + 9f_{23}\Theta^5x_2x_3.$$

Потребовав выполнения равенства $B_1 = -\alpha B_2$, получаем соотношения для a_i и f_{ij}, при которых $\dot{\Theta}(x) = -\alpha$.

Лемма 1. *Пусть матрица управляемости имеет вид*

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+a_1\alpha}{\alpha} & -a_4 \\ -\frac{1+a_1\alpha}{\alpha} & \frac{(1+a_1\alpha)^2}{\alpha^2} & \frac{(1+a_1\alpha)a_4}{\alpha} \\ -a_4 & \frac{(1+a_1\alpha)a_4}{\alpha} & a_4^2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

Тогда производная функции управляемости $\Theta(x)$ *в силу системы* (1) *равна* $-\alpha$.

Доказательство. Из равенства $B_1 = -\alpha B_2$ следует, что

$$f_{12} = -\frac{1 + a_1\alpha}{\alpha},\ f_{22} = \frac{(1 + a_1\alpha)^2}{\alpha^2},\ f_{23} = \frac{(1 + a_1\alpha)a_4}{\alpha},$$
$$a_2 = \frac{2(1 + a_1\alpha)}{\alpha},\ a_3 = \frac{7a_4}{\alpha}. \tag{9}$$

Тогда соотношения (9), очевидно, приводят матрицу (6) к виду (8). Лемма доказана.

Замечание 2. *Отметим, что в случае, когда* $\alpha = 1$, *функция* $\Theta(x)$ *играет роль времени движения. То есть* $T = \Theta(x_0)$ *– время движения из точки* x_0 *в точку* 0.

Доказательство. Следует из $\dot{\Theta}(x) = -1$ (см. [6]).

Лемма 2. *Пусть матрица управляемости принимает вид* (8), *тогда уравнение* (3) *для всех ненулевых* $x \in R^n$ *имеет положительный корень при* $a_0 > 0$ *и* $a_1 \neq -\frac{1}{\alpha}$.

Доказательство. Пусть матрица F имеет вид (8), тогда уравнение (3) примет следующий вид

$$2a_0\Theta^{14} = (\Theta^6 x_1 - \frac{(1+a_1\alpha)}{\alpha}\Theta^5 x_2 - a_4 x_3)^2 .$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\Theta) = 2a_0\Theta^{14} - (\Theta^6 x_1 - \frac{(1+a_1\alpha)}{\alpha}\Theta^5 x_2 - a_4 x_3)^2 = 0 . \qquad (10)$$

При $x_3 \neq 0$, $\lim\limits_{\Theta\to+\infty}\Phi(\Theta) = +\infty$, $\lim\limits_{\Theta\to+0}\Phi(\Theta) = -(a_4 x_3)^2 < 0$. Таким образом, из непрерывности функции $\Phi(\Theta)$ следует существование положительного корня уравнения $\Phi(\Theta) = 0$.

При $x_3 = 0$ уравнение (10) принимает вид

$$\Phi(\Theta) = 2a_0\Theta^4 - (\Theta x_1 - \frac{(1+a_1\alpha)}{\alpha}x_2)^2 = 0 .$$

Тогда при $x_2 \neq 0$, $\lim\limits_{\Theta\to+\infty}\Phi(\Theta) = +\infty$, $\lim\limits_{\Theta\to+0}\Phi(\Theta) = -(\frac{(1+a_1\alpha)}{\alpha}x_2)^2 < 0$ при $a_1 \neq -\frac{1}{\alpha}$ и уравнение $\Phi(\Theta) = 0$ имеет положительный корень в силу непрерывности функции $\Phi(\Theta)$.

При $x_2 = 0$ уравнение (10) принимает вид $\Phi(\Theta) = 2a_0\Theta^2 - x_1^2 = 0$ и, очевидно, имеет положительный корень при $x_1 \neq 0$.
Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $u(x)$ *имеет вид* (5) *и* a_i *удовлетворяют четвёртому и пятому равенствам из* (9), $\theta(x)$ *является положительным корнем уравнения* (3), *а матрица управляемости* F *имеет вид* (8), *где* $a_1 \neq -\frac{1}{\alpha}$. *Тогда пара* $\{u(x), \Theta(x)\}$ *решает задачу синтеза для системы* (1).

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что условия основной теоремы из [1] выполнены, что доказывает теорему 1.

Пример 1. Пусть $x_0 = (10, -2, 2)$ – начальная точка. Возьмем $a_1 = -12$, $a2 = -10$, $\alpha = 100$. Тогда из выражений (2) и (9) получаем, что

$$u(x) = -\frac{12x_1}{\Theta(x)} - \frac{1119x_2}{5000\Theta^2(x)} - \frac{7x_3}{10\Theta^7(x)} - \frac{10x_2^3}{\Theta^6(x)} . \qquad (11)$$

Пусть $a_0 = 171.791$, тогда уравнение (3) примет вид

$$343.582\,{\Theta_0}^{14} - 100\,{\Theta_0}^{12} - \frac{1437601}{2500}\,{\Theta_0}^{10} - 400 + \frac{2398}{5}\,{\Theta_0}^{11} - 400\,{\Theta_0}^6 + \frac{4796}{5}\,{\Theta_0}^5 = 0.$$

Тогда $\dot{\Theta}(x) = -\frac{1}{100}$ и время движения из точки x_0 в 0 равно $100\Theta_0$. Решая последнее уравнение, получаем, что $\Theta_0 = \Theta(x_0) = 0.9193473939$ и $T = 91.93473939$ – время движения из точки $x_0 = (10, -2, 2)$ в 0.
Из (11) и условия $\dot{\Theta}(x) = -\frac{1}{100}$ получаем, что система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{12x_1}{(\Theta_0 - \frac{1}{100}t)} - \frac{1119x_2}{5000(\Theta_0 - \frac{1}{100}t)^2} - \frac{7x_3}{10(\Theta_0 - \frac{1}{100}t)^7} - \frac{10x_2^3}{(\Theta_0 - \frac{1}{100}t)^6}, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2^3 \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -2$, $x_3(0) = 2$, $\Theta(x_0) = 0.9193473939$. Решая данную систему, мы получаем графики компонент траектории и управления, которые будут иметь вид:

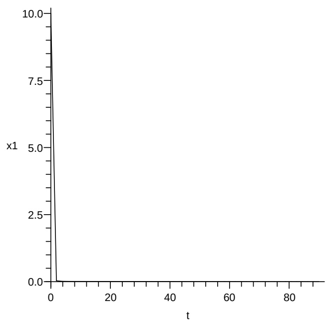

Рис. 1: Компонента $x_1(t)$.

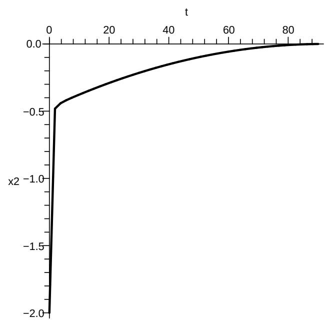

Рис. 2: Компонента $x_2(t)$.

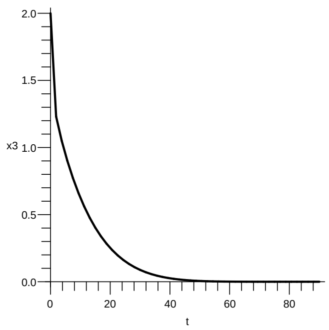

Рис. 3: Компонента $x_3(t)$.

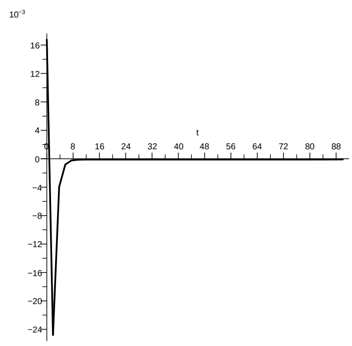

Рис. 4: Управление $u(x(t))$.

Благодарности. Автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Коробову В.И. за ценные советы при написании работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / Математический сборник. – 1979. – т. 109(151), № 4(8). – С. 582-606.

2. Коробов В.И. Метод функции управляемости / М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2007. – 576 с.

3. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов / Математический сборник. – 1987. – т. 134, № 2, С. 186-206.

4. Коробов В.И., Скляр Г.М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума / Дифференц. уравнения. – 1990. – т. 26, № 11, С. 1914-1924.

5. Коробов В.И., Скорик В.А. Синтез инерционных управлений для треугольных систем / Вісник Харківського національного університету, сер. Математика, прикладна математика і механіка. – 2003. – № 602, С. 13–22.

6. Коробов В.И., Скорик В.А., А.Е. Чоке Риверо. Функция управляемости как время движения I / Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – т. 11. – № 2 , С. 208–225.

7. Коробов В.И., Скорик В.А., А.Е. Чоке Риверо. Функция управляемости как время движения II / Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – т. 11. – № 3, С. 341–354.

8. Choque Rivero A.E.Solution of a Synthesis Problem of a Nonlinear Control System / Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. – 2009. – Vol. 59. – No. 850, P 45-51.

9. Korobov V.I., Ivanova T.I.. Nonsmooth Mapping of Linear Control Systems / J. of Optim. Theory and Applications. – 2001. – Vol. 108. – No. 2, P 389-405.

10. Korobov V.I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case / Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 342. – No. 2, P. 1426-1439.