Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.958+536.71 № 1018, 2012, с.30–40

Идентификация системы с распределенными параметрами, описываемой уравнением переноса нейтронов с неизотропным нестационарным интегралом столкновений

А. С. Сохин

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
sokhin@univer.kharkov.ua

В работе изучается задача идентификации линейного нестационарного многомерного уравнения Больцмана с невырожденным генератором нейтронов по заданным начальным и наблюдаемым финальным потокам нейтронов. Установлены взаимно-однозначные связи между плотностью генератора нейтронов и наблюдением, сопоставляющем начальному потоку нейтронов финальное приращение потока нейтронов.
Ключевые слова: Идентификация, уравнение переноса.

Сохін А. С., **Ідентифікація системи з розподіленими параметрами, описуваної рівнянням переносу нейтронів з неізотропним нестаціонарним інтегралом зіткнень.** В роботі вивчається задача ідентифікації лінійного нестаціонарного багатовимірного рівняння Больцмана з невиродженим генератором нейтронів по заданим початковим і спостережуваним кінцевим потокам нейтронів. Встановлені взаємно-однозначні зв'язки між щільністю генератора нейтронів і спостереженням, що відносить початковому потоку нейтронів кінцевий приріст потоку нейтронів.
Ключові слова: Ідентифікація, рівняння переносу.

A. S. Sokhin, **Identification of distributed parameter systems, described by the equation of neutron transport with anisotropic time-dependent collision integral.** In the paper we study the problem of identification of a nonstationary many-dimensional linear Boltzmann equation with a nonsingular generator of neutrons. We identify an equation by the given initial flows of neutrons and the observed final flows of neutrons. We ascertain the one-to-one correspondence between density of the generator of neutrons and the observation which associates inicial increment of neutrons to the final flow of neutrons.
Keywords: Identification, equation of transport.

2000 Mathematics Subject Classification 35Q20, 35R20, 35R30, 82D75.

1. Постановка задачи

Пусть имеем:
– X – вещественное евклидовое пространство $n = 1,\, 2,\, 3$ измерений с нормой $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, $A = \{a: \ a \in X, \ \ |a| \le c\}$, где c – максимальная скорость нейтронов;
– $L_{11} = L_1(X, A)$ – пространство измеримых, абсолютно суммируемых функций на $X \times A$ с нормой $\|f\|_{11} = \int\limits_X \int\limits_A |f(x,a)| dx\, da$;
– $L_1 = L_1(A)$ – пространство измеримых, абсолютно суммируемых на A функций с нормой $\|f\|_1 = \int\limits_A |f(a)| da$;
– L_{11}^+ и L_1^+ – неотрицательные функции, соответственно, в L_{11} и L_1.

Рассмотрим описывающее перенос нейтронов линейное многоскоростное уравнение Больцмана с нестационарным неизотропным потенциалом $u(t,\, x,\, a,\, a')$, имеющее в $x \in X$, $a \in A$ вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \cdot \nabla_x\, y = \int\limits_A u(t,\, x,\, a,\, a')\, y(t,\, x,\, a') da', \quad t > \tau \in T \overset{\triangle}{=} (0, \infty) \tag{1}$$

при начальном условии

$$y(t,x,a) = f_0(x,a) \in L_1^+, \quad t = \tau + 0. \tag{2}$$

Здесь $y(t,x,a)$ – плотность потока нейтронов в момент времени t в точке x пространства X со скоростью $a \in A$.

Правая часть уравнения (2) называется *интегралом столкновений.*
Потенциал $u(t,\, x,\, a,\, a')$ подчиним условиям:
(a) $u(t,\, x,\, a,\, a')$ – ограниченная измеримая неотрицательная функция на $T \times X \times A \times A$;
(b) $u(t,\, x,\, \cdot,\, a') \in L_1(A)$ при $\forall t, x, a'$; $\quad u(t,\, x,\, a,\, \cdot) \in L_1(A)$ при $\forall t, x, a$;
(c) $u_1(t) = \max\limits_{x,a'} \int\limits_A u(t,\, x,\, a,\, a') da \in L_1(T)$;
$u_\infty(t) = \max\limits_{x,a} \int\limits_A u(t,\, x,\, a,\, a') da' \in L_1(T)$.

Условия **(a)**-**(b)** указывают на режим генерации, условие **(c)** указывает на подкритичность режима [1].
Следуя [2], назовем множество функций из L_{11}^+ *пространством состояний.* Решение задачи (1)-(2) является траекторией в пространстве состояний на интервале времени T, $L_{\infty\, 11}^+ = L_\infty(T;\, L_{11}^+)$ – *пространство траекторий.*

Задаче (1)-(2) поставим в соответствие эквивалентную при достаточно гладких $f(\cdot)$, $u(\cdot)$ задачу решения интегрального уравнения Вольтерра

$$\begin{gathered} y(t,x,a) = f_0(x - a(t-\tau),\, a)\, \sigma_\tau(t) + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_A u(t', x - a(t-t'), a, a')\, y(t', x - a(t-t'), a') dt\, da', \end{gathered} \tag{3}$$

где:
$\sigma_\tau(t) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}$, $f(t, x, a, \tau) = E_{t-\tau} f_0(x, a)\, \sigma_\tau(t)$, $E_t f_0 = f_0(x - at, a)$.

Эквивалентность задач следует из совпадения задачи (1)-(2) с результатом применения оператора $\frac{\partial}{\partial t} + a \cdot \nabla_x$ к обеим частям уравнения (3).

Уравнение (3) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра относительно функции $y(t, x)$ со значениями в пространстве скоростей L_1^+:

$$y(t, x) = f(t, x; \tau) + \int_0^t E_{t-t'} \left[U(t', x)\, y(t', x) \right] dt' , \tag{4}$$

где:
– $f(t, x; \tau) = E_{t-\tau} f_0(x)\, \sigma_\tau(t)$,
– оператор $U_{tx} = U(t, x) : \ L_1^+ \ \to \ L_1^+$ вида $U(t, x)\varphi = \int_A u(t, x, a, a')\, \varphi(a') da'$
при $\forall t, x$.

Уравнение (3) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра относительно функции $y(t)$ со значениями в пространстве состояний L_{11}^+ :

$$y(t) = f(t; \tau) + \int_0^t E_{t-t'} \left[U(t')\, y(t') \right] dt' , \tag{5}$$

где:
– $f(t; \tau) = E_{t-\tau}\, f_0\, \sigma_\tau(t)$,
– $U_t = U(t) \ : \ L_{11}^+ \ \to \ L_{11}^+$ вида $U(t)\varphi = U(t, x)\varphi(x) = \int_A u(t, x, a, a')\, \varphi(x, a') da'$
при $\forall t$, то есть является оператором интегрирования по a' и оператором умножения на функцию по x.

Уравнение (3) можно рассматривать также как уравнение в пространстве траекторий $L_{\infty\, 11}^+$:

$$y = f(\tau) + \widehat{\mathcal{U}} y. \tag{6}$$

Обозначим

$$g_0(\tau) \stackrel{\triangle}{=} g_0(x; \tau) = \lim_{t \to \infty} E_{-t+\tau}\, y(t) = f_0 + \int_0^\infty E_{\tau - t'} [U(t') y(t')] dt', \tag{7}$$

где $g_0(t)$ – финальное состояние системы (1)-(2).

При решении задачи идентификации предполагается наличие системы известной структуры с неизвестными параметрами, семейства возмущений (входов или зондирующих сигналов) и соответствующего семейства наблюдений (выходов или реактивных сигналов). В нашем случае:
– *система* - это эволюционное уравнение переноса (1),
– *неизвестные параметры* – ядро интеграла столкновений,

– *возмущения* – функции $f_0(x - a(t-\tau), a)\sigma_\tau(t)$,
– *наблюдения* – финальные состояния $g_0(x, a; \tau)$.

Обозначим через $\bar f_0$ и $\bar g_0(\tau)$ интегралы по пространству X для начального и финального состояний соответственно. Интегрируя равенство (7) по всему пространству X, получим

$$Uy(\tau) = \int\limits_0^\infty \int\limits_X U(t,x)\, y(t,x;\tau) dt dx = \int\limits_0^\infty U(t)\, y(t;\tau) dt = \bar g_0(\tau) - \bar f_0.$$

Оператор $U: L^+_{\infty\, 11} \to L^+_1$ назовем *оператором столкновений.*
Оператором наблюдения назовем отображение $N: \quad f(\tau) \quad \to \quad \bar g_0(\tau) - \bar f_0$, то есть

$$N\, f(\tau) = \int\limits_0^\infty \int\limits_X N(t,x) f(t,x;\tau) dt dx = \int\limits_0^\infty N(t) f(t;\tau) dt = \bar g_0(\tau) - \bar f_0.$$

Оператор B, преобразующий неотрицательные функции в неотрицательные функции, называем положительным и обозначаем $B \geq 0$.
Задачей наблюдения назовем задачу отыскания свойств оператора наблюдений при известном операторе столкновений.
Задачей идентификации (обратной задачей) назовем задачу отыскания оператора столкновений по известному оператору наблюдений, который находится по результатам наблюдений. Задача идентификации относится к обратным задачам дифференциальных уравнений, которые подвергались изучению в различных постановках многими авторами. Ввиду их значимости для практики они относятся к важнейшим задачам прикладной математики.

В дифференциальных уравнениях, имеющих физический смысл, коэффициенты описывают физические свойства среды, недоступные для измерения. Решение задачи идентификации позволяет эти свойства определить по некоторым косвенным доступным для измерения свойствам решения.

В данной работе находится ядро оператора столкновений как возмущение простейшего уравнения переноса *при максимально общих предположениях* на это возмущение (нестационарное, неизоторопное, пространственно-многоскоростное) по минимально необходимым наблюдениям, имеющим размерность искомого ядра. Работа может найти применение в различных видах диагностики в случае линейных моделей.

Пусть $\widetilde I$ – тождественный оператор в $L^+_{\infty\, 11}$.
Из определения операторов наблюдения и столкновения следует равенство на траекториях $Nf(\tau) = Uy(\tau)$. Из данного равенства и равенства (6) получаем операторное равенство

$$U = N(\widetilde I - \widehat{\mathcal U}), \tag{8}$$

которое назовем *уравнением наблюдений.* Из него, при известном операторе столкновений, можно найти оператор наблюдений и изучить его свойства.

Это же уравнение после некоторого преобразования позволяет найти оператор столкновений по оператору наблюдений.

Укажем некоторые работы, где рассматриваются похожие задачи. Стационарная задача с вырожденным интегралом столкновений изучена в [3], стационарные многомерные задачи изучаются в [4, 5].

2. Решение уравнения переноса

Теорема 1. *Для $f_0 \in L_{11}^+$ существует единственное решение $y(t) = y(t;\tau) \in L_{11}^+$ при $\forall t \in T$ уравнения (5) и это решение удовлетворяет неравенствам*

$$\|y(t;\tau)\|_{11} \le \|f_0\|_{11}\, \exp(\hat{u}_1(t;\tau))\sigma_\tau(t)\,,$$

$$\|y(t;\tau) - f(t;\tau)\|_{11} \le \|f_0\|_{11}\,[\exp(\hat{u}_1(t;\tau)) - 1]\,\sigma_\tau(t)\,,$$

где $\hat{u}_1(t;\tau) = \int\limits_\tau^t u_1(s)ds$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем уравнение (5) в виде

$$y(t;\tau) = f(t;\tau) + \int\limits_0^t U_+(t,t')\, y(t';\tau)dt'\,, \tag{9}$$

где оператор $U_+(t,t') \,:\, L_{11}^+ \;\to\; L_{11}^+$ и определяется равенством

$$U_+(t,t')\, z(t') = \int\limits_A u(t',\, x - a(t-t'), a, a')\, z(t',\, x - a(t-t'), a')da'$$

для $z(t) \in L_{11}^+$ при $\forall t$. Нетрудно получить оценку $\|U_+(t,t')\| \le u_1(t')$.

Обозначим $\widehat{\mathcal{U}}\, y(t;\tau) = \int\limits_0^t U_+(t,t')\, y(t';\tau)dt'$.

Тогда $\|\widehat{\mathcal{U}}\, y(t;\tau)\|_{11} \le \hat{u}_1(t;\tau)\, \|y(\tau)\|_t$, где $\|y(\tau)\|_t = \max\limits_{s\in[0,\,t]} \|y(s;\tau)\|_{11}$.

Будем решать уравнение (9) методом последовательных приближений. Рассмотрим ряд

$$y(t;\tau) = f(t;\tau) + \widehat{\mathcal{U}}^1\, f(t;\tau) + \widehat{\mathcal{U}}^2\, f(t;\tau) + \ldots + \widehat{\mathcal{U}}^k\, f(t;\tau) + \ldots\,, \tag{10}$$

полученный формально методом последовательных приближений из уравнения (9). Здесь $\widehat{\mathcal{U}}^k\, f(t;\tau) = \int\limits_0^t U_+(t,s)\widehat{\mathcal{U}}^{k-1}\, f(s;\tau)ds$, $\widehat{\mathcal{U}}^1 = \widehat{\mathcal{U}}$.

Оценим по норме члены ряда (10). Так как $f(s;\tau) = 0$ при $s < \tau$, то

$$\|f(\tau)\|_t \le \|f_0\|_{11}\, \sigma_\tau(t)\,,$$

$$\|\widehat{\mathcal{U}}\, f(t;\tau)\|_{11} \le \hat{u}_1(t;\tau)\, \sigma_\tau(t) \|f_0\|_{11}.$$

Имеем далее

$$\|\widehat{\mathcal{U}}^2 f(t;\tau)\|_{11} \le \int_0^t \|U_+(t,s)\| \cdot \|\widehat{\mathcal{U}} f(s;\tau))\|_{11} ds \le$$
$$\le \int_0^t u_1(s)\, \hat{u}_1(s;\tau)\, \sigma_\tau(s) \|f_0\|_{11} ds = \frac{\hat{u}_1^2(t;\tau)}{2!}\, \sigma_\tau(t) \|f_0\|_{11}\,,$$

а в общем случае

$$\|\widehat{\mathcal{U}}^k f(t;\tau)\|_{11} \le \int_0^t \|U_+(t,s)\| \cdot \|\widehat{\mathcal{U}}^{k-1} f(s;\tau))\|_{11} ds \le$$
$$\le \int_0^t u_1(s)\, \frac{\hat{u}_1^{k-1}(s;\tau)}{(k-1)!}\, \sigma_\tau(s) \|f_0\|_{11} ds = \frac{\hat{u}_1^k(t;\tau)}{k!}\, \sigma_\tau(t) \|f_0\|_{11}\,,$$

при $k = 2,\, 3,\, \ldots$.
Следовательно, ряд (10) сходится, его сумма является решением уравнения (9) и имеет указанную оценку.
Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательство теоремы 1 означает, что оператор $(\widetilde{I} - \widehat{\mathcal{U}})$ в уравнении (8) имеет обратный $(\widetilde{I} - \widehat{\mathcal{U}})^{-1} = \widetilde{I} + \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{U}}^2 + \ldots$ и справедлива оценка $\|(\widetilde{I} - \widehat{\mathcal{U}})^{-1}\| \le \exp\left(\int_0^\infty u_1(s) ds\right)$.

3. Решение задачи наблюдения

Установим некоторые свойства оператора наблюдений.
Пусть $n(t,x,a,a')$ – ядро оператора наблюдений N. Подставляя вместо функции $f(\tau)$ ее выражение, после некоторого преобразования получим равенство

$$\bar{g}_0(a;\tau) - \bar{f}_0(a) = \int_T \int_X N(t,x)\, E_{t-\tau}\, f_0(x)\, \sigma_\tau(t) dt dx = \int_X \check{N}(\tau,x)\, f_0(x) dx\,,$$

в котором ядро $\check{n}(t,x,a,a')$ оператора $\check{N}_{\tau x} = \check{N}(\tau,x): \; L_1^+ \; \to \; L_1^+$ определяется равенством

$$\check{n}(\tau,x,a,a') = \int_\tau^\infty n(t',\, x - a'(t-t'),\, a,a') dt'\,.$$

Поскольку $f_0(\tau)$ – произвольные положительные заданные функции из L_1^+, а функции $\bar{g}_0(a;\tau) - \bar{f}_0(a)$ считаются известными наблюдаемыми положительными функциями, то оператор $\check{N}(\tau,x)$, определяемый своими значениями, является положительным вычисляемым и, значит, известным.

Оператор $N(\tau,x)$, как нетрудно видеть, находится из равенства

$$\frac{\partial \check{N}_{\tau x}}{\partial \tau} + \frac{\partial \check{N}_{\tau x}}{\partial x}\, \bar{A} = -N_{\tau x}\,, \quad \tau > 0\,;$$

то есть ядро $n(\tau, x, a, a')$ вычисляется дифференцированием

$$-n(\tau, x, a, a') = \frac{\partial \check{n}}{\partial \tau} + \frac{\partial \check{n}}{\partial x} \cdot a' .$$

Лемма 1. *Норма* $U: L^{+}_{\infty 11} \to L^{+}_{1}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|U\| \leq \|\overline{U}\|_1 \triangleq \int\limits_0^\infty u_1(t)dt \triangleq \hat{u}_1(\infty) .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(t) \in L^{+}_{11}$ при $\forall t$ и $\max\limits_t \|\varphi(t)\|_{11} = \|\varphi(t)\|_\infty$, тогда

$$\|U\,\varphi\|_1 = \|\int\limits_0^\infty U(t)\varphi(t)dt\| \leq \int\limits_0^\infty \|U(t)\| \cdot \|\varphi(t)\|dt \leq$$
$$\leq \int\limits_0^\infty u_1(t)\|\varphi(t)\|dt \leq \int\limits_0^\infty u_1(t)dt\,\|\varphi\|_\infty .$$

Лемма доказана.

Из уравнения наблюдений (8) получаем равенство

$$N = U(\widetilde{I} - \widehat{\mathcal{U}}\,)^{-1}, \tag{11}$$

которое в силу $U \geq 0$ и $\widehat{\mathcal{U}} \geq 0$ непосредственно указывает, что $N \geq 0$.

Лемма 2. *Норма* $N: L^{+}_{\infty 11} \to L^{+}_{1}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|N\| \leq \exp(\|\overline{U}\|_1) - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает, что ряд

$$N = U + \sum_{m=1}^{\infty} U\,\widehat{\mathcal{U}}^m \tag{12}$$

сходится равномерно. Оценим нормы членов ряда. Пусть $\varphi(t) \in L^{\infty}_{11}$ при $\forall t$, тогда имеем

$$\|U\,\widehat{\mathcal{U}}^m\,\varphi\| = \left\|\int\limits_0^\infty U(t)\,\widehat{\mathcal{U}}^m\,\varphi(t)dt\right\| \leq \int\limits_0^\infty \|U(t)\| \cdot \|\widehat{\mathcal{U}}^m\,\varphi(t)\|dt \leq$$
$$\leq \int\limits_0^\infty u_1(t)\,\frac{\hat{u}_1^m(t)}{m!}\,\|\varphi(t)\|dt \leq \frac{\hat{u}_1^{m+1}(t)}{(m+1)!}\,\|\varphi(t)\|_\infty .$$

Итак, получено неравенство

$$\|N\| \leq \hat{u}_1(\infty) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_1^m(\infty)}{m!} = \exp(\|\overline{U}\|_1) - 1. \tag{13}$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Если $\|\overline{U}\|_1 \le \ln(2-\varepsilon)$ при $0<\varepsilon<1$, то норма оператора $N:\ L^+_{\infty\,11}\ \to\ L^+_1$ удовлетворяет неравенству $\|N\|\le 1-\varepsilon$.

Запишем уравнение (8) в развернутом виде $N - N\widehat{\mathcal{U}} = U$.
Непосредственно проверяем, что для $\varphi\in L^+_{\infty\,11}$ справедливо равенство

$$N\widehat{\mathcal{U}}\,\varphi = \int\limits_T\int\limits_X \check{N}_{tx}\,U_{tx}\,\varphi(t,x)dtdx\,, \tag{14}$$

которое означает, что $N\widehat{\mathcal{U}}:\ L^+_{\infty\,11}\ \to\ L^+_1$ равносильно $\check{N}_{tx}\,U_{tx}:\ L^+_1\ \to\ L^+_1$.

Уравнение наблюдений запишем в виде

$$(I+\check{N}_{t\,x})\,U_{t\,x} = N_{t\,x} \tag{15}$$

и назовем уравнением *идентификации.*

Пусть $n_1(t) = \max\limits_{x,\,a'}\int\limits_A n(t,x,a,a')da\,,\quad \|\overline{N}\|_1 \triangleq \int\limits_0^\infty n_1(t)dt \triangleq \check{n}_1(0)\,,$ $\|\overline{U}\|_\alpha \triangleq \int\limits_0^\infty u_\alpha(t)dt \triangleq \check{u}_\alpha(0)$ при $\alpha=1,\,\infty$.

Лемма 3. *Норма* $\check{N}_{tx}:\ L^+_1\ \to\ L^+_1$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|\check{N}_{tx}\|_1 \le \|\overline{N}\|_1\,.$$

Доказательство вытекает из очевидных неравенств

$$\max_x \|\check{N}_{tx}\|_1 \le \int\limits_t^\infty n_1(t')dt' \triangleq \check{n}_1(t) \triangleq \check{n}_1(0).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Норма* $\check{N}_{tx}:\ L^+_\alpha\ \to\ L^+_\alpha$ *при* $\alpha=1,\infty$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|\check{N}_{tx}\|_\alpha \le \exp(\|\overline{N}\|_\alpha)-1 \quad \text{для } \forall t,\,x.$$

Доказательство. Из разложения оператора N_{tx} в ряд (12) следуют при учете равенства (14) такие ряды

$$\begin{array}{l} N_{tx} = U_{tx} + \check{U}_{tx}U_{tx} + (\check{U}_{tx}U_{tx})^\vee U_{tx} + \ldots \\ \check{N}_{tx} = \check{U}_{tx} + (\check{U}_{tx}U_{tx})^\vee + \big((\check{U}_{tx}U_{tx})^\vee U_{tx}\big)^\vee + \ldots \end{array} \tag{16}$$

Нетрудно получить оценки норм членов рядов (16):

$$\begin{array}{l} \|N_{tx}\|_\alpha \le u_\alpha(t) + \check{u}_\alpha(t)\,u_\alpha(t) + \dfrac{\check{u}^2_\alpha(t)}{2!}\,u_\alpha(t) + \ldots = u_\alpha(t)\,\exp(\check{u}_\alpha(t)) \\ \|\check{N}_{tx}\|_\alpha \le \check{u}_\alpha(t) + \dfrac{\check{u}^2_\alpha(t)}{2!} + \dfrac{\check{u}^3_\alpha(t)}{3!} + \ldots = \exp(\check{u}_\alpha(t)) - 1 \end{array}$$

и, следовательно, искомые оценки норм в лемме.
Лемма доказана.

Подействовав на уравнение идентификации слева оператором $I - \check{N}_{tx}$, получим тождество

$$N_{tx} - \check{N}_{tx}\, N_{tx} = U_{tx} - \mathcal{N}(\check{U}_{tx})\, U_{tx}\,, \tag{17}$$

где $\mathcal{N}(\check{U}_{tx}) \triangleq \check{N}_{tx}^2 = \Big[\check{U}_{tx}) + (\check{U}_{tx}U_{tx})^\vee + \big((\check{U}_{tx}U_{tx})^\vee U_{tx}\big)^\vee + \ldots\Big]^2$.

4. Решение задачи идентификации

При решении задачи наблюдения при условиях $U_{tx} \ge 0$, $\|\overline{U}\|_1 \le \ln(2-\varepsilon)$ для $0 < \varepsilon < 1$, $U_{tx} - \mathcal{N}(\check{U}_{tx})U_{tx} \ge 0$ на оператор столкновений получены из (11), (13), (17) следующие свойства оператора наблюдений:

$$N_{tx} \ge 0, \quad \|\check{N}_{tx}\|_1 \le 1-\varepsilon\,, \quad N_{tx} - \check{N}_{tx}\, N_{tx} \ge 0 \ \text{ при } \forall t,\, x.$$

Покажем, что аналогичные свойства достаточны для решения задачи идентификации.

Теорема 2. *Если* $N_{tx} \ge 0$, $\|\overline{N}\|_1 \le 1-\varepsilon_0$ *при* $1/2 < \varepsilon_0 < 1$, $N_{tx} - \check{N}_{tx}\, N_{tx} \ge 0$ *для* $\forall t,\, x$, *то* $U_{tx} \ge 0$, $\|\check{U}_{tx}\|_1 \le \ln(2-\varepsilon)$ *при* $0 < \varepsilon = 2 - \dfrac{1}{\varepsilon_0} < 1$, $U_{tx} - \mathcal{N}(\check{U}_{tx})U_{tx} \ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при $\forall t,\, x$ норма $\|\check{N}_{tx}\|_1 \le \|\overline{N}\|_1$, то $\|\check{N}_{tx}\|_1 \le 1-\varepsilon_0$ при $\forall t,\, x$. Из уравнения идентификации (15) находим оператор столкновений

$$U_{tx} = (I - \check{N}_{tx})^{-1}\, N_{tx}. \tag{18}$$

Из равенства (18) непосредственно следует такое равенство и неравенство

$$N_{tx} - \check{N}_{tx}\, N_{tx} \le U_{tx} = (I - \check{N}_{tx}^2)^{-1}\, (N_{tx} - \check{N}_{tx}\, N_{tx}). \tag{19}$$

Так как правая часть неравенства (19) есть произведение положительных операторов, то $U_{tx} \ge 0$ при $\forall t,\, x$. Из положительности оператора $N_{tx} - \check{N}_{tx}\, N_{tx}$ и тождества (17) следует положительность оператора $U_{tx} - \mathcal{N}(\check{U}_{tx})U_{tx}$. Из равенства (18) находим

$\check{U}_{tx} = N_{tx} - (\check{N}_{tx}\, N_{tx})^\vee + (\check{N}_{tx}^2\, N_{tx})^\vee - \ldots \|\check{U}_{tx}\| \le \check{n}_1(t) + \dfrac{\check{n}_1^2(t)}{2} + \dfrac{\check{n}_1^3(t)}{3} + \ldots =$
$= -\ln(1-\check{n}_1(t)) \le -\ln(1-\check{n}_1(0)) = -\ln(1-\|\overline{N}_1\|)$. Полагая $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2-\varepsilon}$, получаем $\|\check{U}_{tx}\|_1 \le \ln(2-\varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < 1$.
Теорема доказана.

Укажем теперь в прямой задаче более простое достаточное условие, при котором выполняется неравенство $N_{tx} - \check{N}_{tx}\, N_{tx} \ge 0$ при $\forall t, x$. Обозначим

$$u^-(t,x) = \min_{a,\,a'} u(t,x,a,a'), \quad u^+(t,x) = \max_{a,\,a'} u(t,x,a,a')\,,$$

$$n^-(t,x)=\min_{a,\,a'} n(t,x,a,a'), \quad n^+(t,x)=\max_{a,\,a'} n(t,x,a,a')\,.$$

Теорема 3. *Если* $U_{tx}\geq 0$, $\|\overline{U}\|_\infty \leq \ln(2-\varepsilon)$ *при* $0<\varepsilon<1$ *и*

$$u^-(t,x)-(1-\varepsilon)^2\,u^+(t,x)>0, \tag{20}$$

то найдется $\bar\varepsilon\in(0,\varepsilon)$ *такое, что выполняются неравенства*

$$n^-(t,x)-(1-\varepsilon)n^+(t,x)>0\,, \tag{21}$$

$$(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)<(\varepsilon-\bar\varepsilon)(2-\varepsilon-\bar\varepsilon). \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать $U_{tx}: L_1^+ \to L_\infty^+$ и $N_{tx}: L_1^+ \to L_\infty^+$. Тогда из леммы 4, тождества (17) и уравнения идентификации (15) получим неравенство в ядрах

$$\begin{aligned}&U_{tx}(a,a')-\int\limits_A \check N_{tx}^2(a,\bar a)\,U_{tx}(\bar a,a')d\bar a\leq\\&\leq N_{tx}(a,a')=U_{tx}(a,a')+\int\limits_A \check N_{tx}(a,\bar a)\,U_{tx}(\bar a,a')d\bar a,\end{aligned}$$

из которого, в силу оценки для $\check N_{tx}$, следует неравенство

$$u^-(t,x)-(1-\varepsilon)^2u^+(t,x)\leq N_{tx}(a,a')\leq u^+(t,x)+(1-\varepsilon)u^+(t,x)=(2-\varepsilon)u^+(t,x)$$

при $\forall a,a'$ и, значит, такие неравенства

$$u^-(t,x)-(1-\varepsilon)^2u^+(t,x)\leq n^-(t,x)\,, \qquad n^+(t,x)\leq(2-\varepsilon)u^+(t,x).$$

Очевидно, найдется $\bar\varepsilon\in(0,\varepsilon)$ такое, что $u^-(t,x)-(1-\bar\varepsilon)^2u^+(t,x)\geq 0$ при $\forall t,x$. Следовательно, $[(1-\bar\varepsilon)^2-(1-\varepsilon)^2]\,u^+(t,x)\leq n^-(t,x)$. На числа ε и $\bar\varepsilon$ наложим условия такие, чтобы верхняя оценка для $(1-\varepsilon)n^+(t,x)$ была меньше нижней оценки для $n^-(t,x)$, то есть потребуем выполнения неравенства (22); убедимся, что это неравенство имеет решения при $\varepsilon\in(0,\,1)$ и $\bar\varepsilon\in(0,\,\varepsilon)$, а значит, выполнено неравенство (21), из которого следует, что $N_{tx}-\check N_{tx}N_{tx}\geq 0$ и, в силу тождества (17), также $U_{tx}-\mathcal{N}(\check U_{tx})U_{tx}\geq 0$. *Теорема доказана.*

Укажем в обратной задаче более простое достаточное условие, при котором правая часть тождества (17) неотрицательна.

Теорема 4. *Если* $N_{tx}\geq 0$, $\|\overline{N}\|_\infty\leq 1-\varepsilon_0$ *при* $0<\varepsilon<1$ *и*

$$n^-(t,x)-(1-\varepsilon_0)\,n^+(t,x)>0\,, \tag{23}$$

то найдется $\bar\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)$ *такое, что выполняются неравенства*

$$u^-(t,x)-(1-\varepsilon_0)^2\,u^+(t,x)>0\,, \tag{24}$$

$$\frac{(1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0}<(\varepsilon_0-\bar\varepsilon_0)\,. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (23) и $\|\check{N}_{tx}\|_\infty \le \|\overline{N}\|_\infty$ непосредственно следует неравенство $N_{tx} - \check{N}_{tx}\, N_{tx} \ge 0$. Согласно (19) и условий теоремы получим неравенства в ядрах

$$n^-(t,x) - (1-\varepsilon_0)\, n^+(t,x) \le N_{tx}(a,a') - \int\limits_A \check{N}_{tx}(a,\bar{a})\, N_{tx}(\bar{a},a') d\bar{a} <$$
$$< U_{tx}(a,a') = (I + N_{tx})^{-1}\, N_{tx}(a,a')\,,$$

из которых следуют неравенства $n^-(t,x) - (1-\varepsilon_0)\, n^+(t,x) \le n^-(t,x)$, $u^+(t,x) \le \dfrac{n^+(t,x)}{1-\|\check{N}_{tx}\|_\infty} \le n^+(t,x)\,\varepsilon_0^{-1}$. Очевидно, найдется $\bar{\varepsilon}_0 \in (0,\varepsilon_0)$ такое, что $n^+(t,x) - (1-\bar{\varepsilon}_0)\, n^+(t,x) \ge 0$ при $\forall t,x$. Следовательно, имеем для $u^-(t,x)$ оценку снизу и для $u^+(t,x)$ оценку сверху

$$(\varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}_0)\, n^+(t,x) \le u^-(t,x)\,, \qquad u^+(t,x) \le \varepsilon_0^{-1}\, n^+(t,x)\,.$$

На числа ε_0 и $\bar{\varepsilon}_0$ наложим условие, чтобы верхняя оценка для $(1-\varepsilon_0)^2\, u^+(t,x)$ была меньше нижней оценки для $u^-(t,x)$, то есть потребуем выполнения неравенства (25). Убедимся, что это неравенство имеет решения при $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и $\bar{\varepsilon}_0 \in (0,\varepsilon_0)$. Значит, выполняется неравенство (24) и, следовательно, $U_{tx} - \mathcal{N}(\check{U}_{tx})U_{tx} \ge 0$, а в силу тождества (17) – неравенство $N_{tx} - \check{N}_{tx}N_{tx} \ge 0$.
Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – Т. 3 : Теория рассеяния. – М. : Мир, 1982. – 443с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М. : Мир, 1972. – 414с.
3. Козаков А.Я. Обратная задача линейной теории переноса излучения. / Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1984. – Т. 24, № 2. – С.261-271.
4. Аниконов Д.С. Об одной обратной задаче для уравнения переноса излучения. / Сибирский математический журнал. – 1975. – Т. 16, вып. 3. – С. 432-439.
5. Аниконов Д.С. Многомерные обратные задачи для уравнения переноса. / Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 5. – С. 817-824.

Статья получена: 29.02.2012; окончательный вариант: 05.05.2012; принята: 08.05.2012.

3 сентября 2012 года ушел из жизни автор этой статьи

Сохин Анатолий Семенович,

принимавший активное участие в научной жизни механико-математического факультета. Редакционная коллегия выражает глубокое соболезнование родным и всем его близким.