Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 1030, 2012, с.4–13

Асиметричні гвинтові потоки, що мінімізують інтегральний відхил між частинами рівняння Больцмана

О. С. Сазонова
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна
sazonovaes@rambler.ru

Для моделі твердих куль побудовано наближені бімодальні розв'язки інтегро-диференціального рівняння Больцмана у випадку, коли максвелівські моди є гвинтовими з різними ступенями мализни їх кутових швидкостей. Здобуто деякі достатні умови для мінімізації інтегрального відхилу між частинами рівняння Больцмана.
Ключові слова: рівняння Больцмана, інтегральний відхил, асиметричні гвинти.

Сазонова Е. С. **Асимметричные винтовые потоки, минимизирующие интегральное отклонение между частями уравнения Больцмана.** Для модели твердых сфер построены приближенные бимодальные решения интегро-дифференциального уравнения Больцмана в случае, когда максвелловские моды являются винтовыми с разными степенями малости их угловых скоростей. Получены некоторые достаточные условия для минимизации интегральной невязки между частями уравнения Больцмана.
Ключевые слова: уравнение Больцмана, интегральная невязка, асимметричные винты.

E. S. Sazonova **Asymmetrical screw flows which minimize the integral remainder between the sides of the Boltzmann equation.** Approximate bimodal solutions for the integro-differential Boltzmann equation for the model of hard spheres are built in the case when the Maxwellian modes are screws with different degrees of infnite-simality of their angular velocities. Some suffcient conditions to minimization of integral remainder between the sides of the Boltzmann equation are obtained.
Keywords: Boltzmann equation, integral remainder, asymmetrical screws.

2000 Mathematics Subject Classification: 76P05; 45K05; 82C40; 35Q55.

1. ВСТУП

Для описання поведінки достатньо розрідженого газу використовується кінетичне рівняння Больцмана. У випадку газу з твердих куль воно має вигляд [1]:

$$D(f) = Q(f, f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha \, |(v - v_1, \alpha)| \, [f(t, v_1', x)f(t, v', x) - \\ - f(t, v_1, x)f(t, v, x)], \end{aligned} \tag{3}$$

де $f = f(t, v, x)$ — функція розподілу молекул, яка шукається; $t \in \mathbb{R}^1$ — час; $x = (x^1, x^2, x^3)$ — координата молекули в $\mathbb{R}^3$; $v = (v^1, v^2, v^3)$ — її швидкість; $d > 0$ — діаметр; $\frac{\partial f}{\partial x}$ — просторовий градієнт функції f (або просто f'). Вектор α належить одиничній сфері $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, а v, v_1 — швидкості молекул до зіткнення, а v', v_1' — після зіткнення, причому

$$v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \qquad v_1' = v + \alpha(v - v_1, \alpha). \tag{4}$$

Добре відомими точними розв'язками рівняння (1)–(4) є максвеліани (глобальні та локальні) [1–4]. Інші точні розв'язки отримано тільки для випадку максвелівських молекул та деяких його узагальнень.

В роботах [5–10] розглянуто бімодальні розподіли (лінійні комбінації двох максвеліанів), зокрема максвеліани спеціального виду, що описують стаціонарні рівноважні стани газу, подібні гвинтам. Такі максвеліани мають вигляд [1, 8–10]:

$$M(v, x) = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v - \overline{v} - [\omega \times x])^2}. \tag{5}$$

З фізичної точки зору розподіл (5) описує обертання газу як цілого з кутовою швидкістю $\omega \in R^3$ навколо осі, що проходить через точку

$$x_0 = \frac{[\omega \times \overline{v}]}{\omega^2}, \tag{6}$$

де $x_0 \in R^3$, а $\beta = 1/2T$ — обернена температура,

$$r^2 = \frac{1}{\omega^2}[\omega \times (x - x_0)]^2 \tag{7}$$

— квадрат відстані до осі обертання, а

$$\rho = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2} \tag{8}$$

— густина газу (ρ_0 — густина на осі обертання, при $r = 0$), $\overline{v} \in R^3$ — лінійна масова швидкість в точках x, для яких $x||\omega$, а $\overline{v} + [\omega \times x]$ — масова швидкість в довільній точці x. Формула (5) крім обертального задає й поступальний рух вздовж осі обертання, що має наступну лінійну швидкість

$$\frac{(\omega, \overline{v})}{\omega^2}\omega.$$

Таким чином, вона дійсно описує гвинтоподібний рух газу в цілому, причому цей розподіл є стаціонарним (не залежить від t), але неоднорідним.

Як і в роботах [8–10] ми будемо розглядати неоднорідну, нестаціонарну лінійну комбінацію двох максвеліанів, а саме розподіл

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2 = \sum_{k=1}^{2} \varphi_i(t,x) M_i(v,x), \tag{9}$$

$$M_i(v,x) = \rho_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta_i (v - \widetilde{v_i})^2}, \tag{10}$$

$$\widetilde{v_i} = \widetilde{v_i}(x) = \overline{v_i} + [\omega_i \times x], \;\; i = 1, 2. \tag{11}$$

Передбачається, що коефіцієнтні функції $\varphi_i, i = 1, 2$ є невід'ємними та належать $C^1(R^4)$. Потрібно знайти такі функції φ_i й таку поведінку всіх параметрів, щоб інтегральний відхил [11] прямував при цьому до нуля. Такий відхил має вигляд:

$$\Delta_1 = \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f,f)| dv. \tag{12}$$

Коефіцієнтні функції φ_i будемо шукати у вигляді

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) e^{-\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \; i = 1, 2, \tag{13}$$

а кутові швидкості при цьму будуть дорівнювати

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i} s_i}{\beta_i^{k_i}}, \;\; i = 1, 2, \tag{14}$$

де $s_i > 0$ — сталі величини, ω_{0i} — довільні фіксовані вектори, $k_i > 0, i = 1, 2$ (інші параметри теж довільні і фіксовані).

Деякі наближені розв'язки даного вигляду, для яких максвеліани при $i = 1$ та $i = 2$ поводять себе однаково, отримані в роботі [10]. Обидві кутові швидкості ω_1 та ω_2 при цьому прямують до нуля однаково швидко при β_1, $\beta_2 \to +\infty$ (сама швидкість їх прямування до нуля різна й задається певними степенями β_i в (14), а саме 1, $\frac{1}{2}$ або $\frac{1}{4}$).

Метою даної роботи є пошук наближених розв'язків рівняння (1)–(4) при інших можливих значеннях k_i, $i = 1, 2$, та асиметричної (тобто для різних степеней при $i = 1$ та $i = 2$) поведінки кутових швидкостей. На цьому шляху вже вдалося знайти деякі розв'язки зазначеної задачі, але для звичайного рівномірно-інтегрального ("змішаного") відхилу [9].

2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Перед формулюванням та доведенням основних результатів роботи введемо наступні позначення, які введені в роботі [10] та будуть надалі використані:

$$A_i(u,t,x) = \psi_i \psi_j \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{R^3} dw e^{-w^2} \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \right.$$
$$\left. + (\overline{v_i} - \overline{v_j}) + [(\omega_i - \omega_j) \times x] - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \tag{15}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v_i} - [\omega_i \times x] \right) + 2\psi_i \sqrt{\beta_i} \{ (u, [\omega_i \times \overline{v_i}]) -$$
$$- [\omega_i \times u][\omega_i \times x] \}. \tag{16}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (13), (14), а наступні функції належать простору $L_1(R^4)$:*

$$\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|, |[\omega_{0i} \times x]| \psi_i, \left([\omega_{0i} \times x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right), \ i = 1,2 \tag{17}$$

Тоді визначений згідно з (12) відхил Δ_1 має сенс й існує така величина Δ_1', що

$$\Delta_1 \leq \Delta_1', \tag{18}$$

причому якщо

$$\frac{1}{2} < k_i \leq 1, \ i = 1,2, \tag{19}$$

або

$$\frac{1}{4} < k_i \leq \frac{1}{2}, \ i = 1,2, \tag{20}$$

та

$$[\omega_{0i} \times \overline{v_i}] = 0, \ i = 1,2, \tag{21}$$

то існує скінченна границя

$$L = \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta_1' = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} \rho_i \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \overline{v_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \rho_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 |\overline{v_1} - \overline{v_2}| \right| +$$
$$+ 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\overline{v_1} - \overline{v_2}| \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx (\psi_1 \psi_2). \tag{22}$$

Доведення. Згідно з (15), (16) запишемо нерівність, отриману в [10]:

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f,f)| dv \leq \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + B_i(u,t,x) + A_i(u,t,x) \right| + \right. \\ \left. + A_i(u,t,x) \right] \cdot \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} e^{-u^2} du. \tag{23}$$

Існування інтегрального відхилу Δ_1 випливає з (12), (15), (16), (23) та вимоги приналежності виразів (17) до $L_1(R^4)$, причому має місце наступна нерівність:

$$\Delta_1 \leq \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + B_i(u,t,x) + A_i(u,t,x) \right| + \right. \\ \left. + A_i(u,t,x) \right] e^{-u^2} du. \tag{24}$$

Якщо підставити (14) в (15), (16) і ввести нові позначення:

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \right), \tag{25}$$

то

$$A_i(u,t,x) = \psi_i \psi_j \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{R^3} dw e^{-w^2} |\gamma_i u + (\overline{v_i} - \overline{v_j}) + s_i \gamma_i^{2k_i} [\omega_{0i} \times x] - \\ - s_j \gamma_j^{2k_j} [\omega_{0j} \times x] - \gamma_j w|, \tag{26}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \Big(\gamma_i u + \overline{v_i} + s_i \gamma_i^{2k_i} [\omega_{0i} \times x] \Big) + \\ + 2\psi_i s_i \gamma_i^{2k_i - 1} \Big\{ (u, [\omega_{0i} \times \overline{v_i}]) - s_i \gamma_i^{2k_i} [\omega_{0i} \times u][\omega_{0i} \times x] \Big\}, \tag{27}$$

де $i = 1, 2$, $i \neq j$.

З (26), (27), (17) та гладкості коефіцієнтних функцій, що передбачена з самого початку, ми бачимо, що всі підинтегральні вирази в (24) — неперервні функції за змінними t, x, u, γ. Тоді інтеграл (24) збігається рівномірно відносно змінної γ на будь-якому компакті завдяки (17) та наявності множника e^{-u^2}. Отже, величина Δ_1' — неперервна по γ, і ми можемо в (24) перейти до границі при $\gamma \to 0$ (тобто $\beta_i \to +\infty, i = 1, 2$). Це означає те ж саме, що просто покласти $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Після інтегрування за змінними w та u отримаємо (22). Теорему доведено.

В цій теоремі поведінка кутових швидкостей при $i = 1$ та $i = 2$ однакова. Далі ми наведемо деякі результати для асиметричної поведінки ω_1 та ω_2

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (14) та (17) Теореми 1 при*

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Тоді має місце нерівність (18), причому

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ i=1,2}}\Delta_1' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\rho_2 s_2 |[\omega_{02}\times\overline{v_2}]| \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx\psi_2. \tag{29}$$

Доведення. Використаємо оцінку (24), причому позначення Δ_1' для її правої частини поки що не вводимо. Знову використовуючи (25), підставимо в (15) та (16) вираз (14). Тепер замість виразів (26), (27) отримаємо

$$A_1(u,t,x) = \psi_1\psi_2\rho_2\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{R^3} dw e^{-w^2}|\gamma_1 u + (\overline{v_1}-\overline{v_2}) + s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times x] - \\ - s_2\gamma_2^2[\omega_{02}\times x] - \gamma_2 w|, \tag{30}$$

$$B_1(u,t,x) = \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\left(\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times x]\right) + \\ + 2\psi_1 s_1\gamma_1\left\{(u,[\omega_{01}\times\overline{v_1}]) - s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times u][\omega_{01}\times x]\right\}, \tag{31}$$

$$A_2(u,t,x) = \psi_1\psi_2\rho_1\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{R^3} dw e^{-w^2}|\gamma_2 u + (\overline{v_2}-\overline{v_1}) + s_2\gamma_2[\omega_{02}\times x] - \\ - s_1\gamma_1[\omega_{01}\times x] - \gamma_1 w|, \tag{32}$$

$$B_2(u,t,x) = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\left(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\gamma_2[\omega_{02}\times x]\right) + \\ + 2\psi_2 s_2\left\{(u,[\omega_{02}\times\overline{v_2}]) - s_2\gamma_2[\omega_{02}\times u][\omega_{02}\times x]\right\}. \tag{33}$$

Після підстановки (30)–(33) в праву частину виразу (24) ми можемо отримати настпну оцінку

$$\Delta_1 \le \Delta_1' =$$

$$= \frac{\rho_1}{\pi^{3/2}}\int\limits_{R^1} dt\int\limits_{R^3} dx\int\limits_{R^3}\Bigg[\Bigg|\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + A_1(u,t,x) + \frac{\partial\psi_1}{\partial x}(\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times x]) + \\ + 2\psi_1\gamma_1 s_1\left\{(u,[\omega_{01}\times\overline{v_1}]) - s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times u][\omega_{01}\times x]\right\}\Bigg| + \\ + A_1(u,t,x)\Bigg]e^{-u^2}du + \frac{\rho_2}{\pi^{3/2}}\int\limits_{R^1} dt\int\limits_{R^3} dx\int\limits_{R^3}\Bigg[\Bigg|\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + A_2(u,t,x) + \\ + \frac{\partial\psi_2}{\partial x}(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\gamma_2[\omega_{02}\times x]) - 2\psi_2 s_2^2\gamma_2[\omega_{02}\times u][\omega_{02}\times x]\Bigg| + \\ + A_2(u,t,x) + 2\psi_2 s_2|u|\,|[\omega_{02}\times\overline{v_2}]|\Bigg]e^{-u^2}du. \tag{34}$$

Далі перейдемо до границі при $\gamma\to 0$ (можливість такого переходу обгрунтовується так само, як і в доведенні теореми 1). Отриманий результат буде відрізнятися від (22) лише останнім доданком, який не залежить від γ. Інтеграл від цього доданку легко обчислюється за допомогою переходу до сферичної системи координат. Все це приводить до виразу (29). Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (14) при*

$$k_1 = \frac{1}{2}, \qquad k_2 = \frac{1}{4}, \tag{35}$$

а також

$$[\omega_{02} \times \overline{v_2}] = 0. \tag{36}$$

Тоді, якщо виконуються умови (17), має місце нерівність (18), причому справедлив наступний аналог твердження (22)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta_1' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_1 s_1 |[\omega_{01} \times \overline{v_1}]| \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \psi_1 + \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2^2 |\omega_{02}| \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx (|[\omega_{02} \times x]| \psi_2). \end{aligned} \tag{37}$$

Доведення. Знову використаємо оцінку (24) без позначення Δ_1' для її правої частини. Далі підставимо вираз (14) при $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{4}$ в (15) та (16), враховуючи позначення (25).

Тоді ми отримаємо

$$\begin{aligned} A_1(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{R^3} dw e^{-w^2} |\gamma_1 u + (\overline{v_1} - \overline{v_2}) + s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times x] - \\ - s_2 \gamma_2 [\omega_{02} \times x] - \gamma_2 w|, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} B_1(u,t,x) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} (\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times x]) + \\ + 2\psi_1 s_1 \left\{ (u, [\omega_{01} \times \overline{v_1}]) - s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times u][\omega_{01} \times x] \right\}, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} A_2(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_1 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{R^3} dw e^{-w^2} |\gamma_2 u + (\overline{v_2} - \overline{v_1}) + s_2 \sqrt{\gamma_2} [\omega_{02} \times x] - \\ - s_1 \sqrt{\gamma_1} [\omega_{01} \times x] - \gamma_1 w|, \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} B_2(u,t,x) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} (\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2 \sqrt{\gamma_2} [\omega_{02} \times x]) - \\ - 2\psi_2 s_2^2 [\omega_{02} \times u][\omega_{02} \times x]. \end{aligned} \tag{41}$$

Далі підставимо (38)–(41) в (24) та отримаємо наступну оцінку:

$$\Delta_1 \le \Delta_1' =$$

$$= \frac{\rho_1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^3} \Big[\Big| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + A_1(u,t,x) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1\gamma_1[\omega_{01} \times x]) -$$
$$- 2\psi_1 s_1^2 [\omega_{01} \times u][\omega_{01} \times x] \Big| + A_1(u,t,x) +$$
$$+ 2\psi_1 s_1 |u| \big| [\omega_{01} \times \overline{v_1}] \big| \Big] e^{-u^2} du + \frac{\rho_2}{\pi^{3/2}} \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^3} \Big[\Big| \frac{\partial \psi_2}{\partial t} +$$
$$+ A_2(u,t,x) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\sqrt{\gamma_2}[\omega_{02} \times x]) \Big| +$$
$$+ A_2(u,t,x) + \big| 2\psi_2 s_2^2 [\omega_{02} \times u][\omega_{01} \times x] \big| \Big] e^{-u^2} du. \tag{42}$$

З виразів (38) та (40) ми бачимо, що границя при $\gamma \to 0$ величини $A_2(u,t,x)$ така, як і границя величини $A_1(u,t,x)$, а оцінка для модуля, що входить до (23) та включає $B_i(u,t,x)$ приводить до виділення двох доданків, які не залежать від γ. Ці доданки містять вирази

$$2s_1 \int\limits_{R^3} \Big| \psi_1 |u| \big| [\omega_{01} \times \overline{v_1}] \big| \Big| \frac{\rho_1}{\pi^{3/2}} e^{-u^2} du, \tag{43}$$

$$2s_2^2 \int\limits_{R^3} \Big| \psi_2 |\omega_{02}| |u| \big| [\omega_{02} \times x] \big| \Big| \frac{\rho_2}{\pi^{3/2}} e^{-u^2} du. \tag{44}$$

Подальше обчислення (43) та (44) приводить до твердження (37). Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (14) при*

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = \frac{1}{4}. \tag{45}$$

Тоді, якщо виконуються умови (17) та (36), має місце нерівність (18), де

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta_1' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2^2 |\omega_{02}| \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx (|[\omega_{02} \times x]| \psi_2). \tag{46}$$

Доведення проводиться аналогічно доведенню Теореми 2, але тепер, враховуючи (14) зі степенями $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{4}$ й умову (36), замість виразів (32), (33) ми отримаємо (40), (41) з (15) та (16). Завдяки виразам (40), (41) ми бачимо, що границя при $\gamma \to 0$ величини $A_2(u,t,x)$ така, як і в Теоремі 3, а для величини $A_1(u,t,x)$ така, як в Теоремі 2. Зокрема, оцінка для модуля, що входить до виразу (23) і містить $B_2(u,t,x)$, здобута в доведенні

Теореми 3. Отже, отриманий результат відрізнятиметься від (22) тільки останнім доданком, визначеним у (44). Подальше обчислення приводить до (46). Теорему доведено.

Завдяки цим результатам щодо границь при $\beta_i \to +\infty, i = 1, 2$ ми можемо сформулювати наслідки з теорем 1–4, які дають певні достатні умови для прямування інтегрального відхилу Δ_1 до нуля.

Наслідок 1. *Нехай виконуються всі припущення Теореми 1. Тоді співвідношення*

$$\Delta_1 \to 0 \tag{47}$$

має місце, якщо виконується хоча б одна із наступних умов:

1) Для будь-яких функцій $\psi_i(x)$, що задовільняють умовам (17),

$$\overline{v_1} = \overline{v_2} = 0, \qquad \psi_i = \psi_i(x), i = 1, 2; \tag{48}$$

2) Нехай функції $\psi_i, i = 1, 2$ мають вигляд фінітних плато [11], тобто згладжених спеціальним чином характеристичних функцій деяких обмежених областей в R^4 таких, що міра проекцій їх носіїв на гіперплощину $t = 0$ прямує до нуля, і добуток величин $\overline{v_i}^k$ та мір проекцій їх носіїв на гіперплощини $x^k = 0, k = 1, 2, 3$ також прямує до нуля. Крім того, нехай виконана хоча б одна із вимог

$$a)\ \ d \to 0, \tag{49}$$

$$b)\ \ \overline{v_1} = \overline{v_2} \neq 0, \tag{50}$$

$$c)\ \ mes\left(supp\psi_1 \bigcap supp\psi_2\right) \to 0, \tag{51}$$

зокрема, може бути

$$supp\psi_1 \bigcap supp\psi_2 = \emptyset. \tag{52}$$

Доведення спирається на (22) та результати роботи [11]. Воно зводиться до перевірки того, що функції $\psi_i, i = 1, 2$, для яких виконуються умови Наслідку 1, задовольняють вимогам (17).

Наслідок 2. *Нехай виконуються всі припущення Теореми 2. Тоді твердження (47) має місце, якщо виконується хоча б одна з умов 1), 2) Наслідку 1, а також принаймні одна з наступних вимог:*

1. $s_2 \to 0$;

2. Умова (21) при $i = 2$.

Доведення очевидне й спирається на (29).

Наслідок 3. *Нехай виконуються всі припущення Теореми 3. Тоді має місце твердження (47), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 1, і, крім того, одна з вимог:*

1. $s_i \to 0, i = 1, 2$;

2. $s_2 \to 0$, умова (21) при $i = 1$.

Доведення очевидне й спирається на (37).

Наслідок 4. *Нехай виконуються всі припущення Теореми 4. Тоді має місце твердження (47), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 1, і, крім того, перша вимога Наслідку 2.*

Доведення легко проводиться, спираючись на твердження (46).

Подяки. Автор виражає подяку доктору фіз.-мат. наук, професору Гордевському В.Д. за цінні поради при написанні статті.

Робота здійснена при частковій фінансовій підтримці Фонду імені Н.І. Ахієзера.

ЛІТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978. – 495 с.

2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. – М.: ИЛ, 1960. – 118 с.

3. Grad H. On the Kinetic theory of rarefied gases // Comm. Pure and Appl. Math. – 1949. – V. 2, **4**, P. 331–407.

4. Коган М.Н. Динамика разреженного газа // – М.: Наука, 1967. – 440 с.

5. Gordevskyy V. D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. (MMA 455). – 2004. – V. 27, **2**. – P. 231–247.

6. Гордевский В. Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер // Матем. физ., анализ, геом. – 1995. – Т. 2, **1**. – С. 168–176.

7. Гордевский В. Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана // Теор. мат. физ. – 1998. – Т. 114, **1**. – С. 126–136.

8. Гордевский В. Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами // Теор. мат. физ. – 2001. – Т. 126, **2**. – С. 283–300.

9. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Asymmetrical bimodal distributions with screw modes// Math. Phys., Anal., Geom. – 2011. – V. 7, **3**. – P. 212–224.

10. Gordevskyy V. D. Transitional regime between vortical states of a gas // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (NA 3752). – 2003. – V. 53, **3–4**. – P. 481–494.

11. Gordevskyy V. D. Trimodal Approximate Solution of the Non-linear Boltzmann Equation // Math. Meth. Appl. Sci.. – 1998. – V. 21. – P. 1479–1494.

Стаття одержана: 26.06.2012; перероблений вариант: 13.11.2012; прийнята: 15.11.2012.