Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.518.454 № 1061, 2013, с.45–52

Коэффициенты Фурье борелевских мер на окружности

А. Ф. Гришин, И. В. Поединцева

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
grishin@univer.kharkov.ua, poedintseva@univer.kharkov.ua,

Пусть μ – комплексная борелевская мера на единичной окружности $\mathbf{T}$ и $\hat{\mu}(n)$ – её коэффициенты Фурье. Вычисляется сумма ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(n)}{n+z}$. Существуют различные критерии того, чтобы заданная последовательность c_n, $n \in (-\infty, \infty)$ была последовательностью коэффициентов Фурье некоторой комплексной борелевской меры μ на $\mathbf{T}$. Приводится ещё один критерий такого рода.
Ключевые слова: алгебра $M(\mathbf{T})$, коэффициенты Фурье, формула восстановления, теорема Гёза.

Гришин А.П., Поєдинцева І.В., **Коефіцієнти Фур'є борелівських мір на колі.** Нехай μ – комплексна борелівська міра на одиничному колі $\mathbf{T}$ та $\hat{\mu}(n)$ – її коефіцієнти Фур'є. Обчислюється сума ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(n)}{n+z}$. Існують різні критерії того, щоб задана послідовність c_n, $n \in (-\infty, \infty)$ була послідовністю коефіцієнтів Фур'є деякої комплексної борелівської міри μ на $\mathbf{T}$. Доводиться ще один критерій такого типу.
Ключові слова: алгебра $M(\mathbf{T})$, коефіцієнти Фур'є, формула поновлення, теорема Геза.

A. F. Grishin, I. V. Poedintseva, **Fourier coefficients of borelian measures on the circle.** Let μ be a complex borelian measure on the unit circle $\mathbf{T}$ and let $\hat{\mu}(n)$ be its Fourier coefficients. The sum of the series $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(n)}{n+z}$ is calculated. There are different criteria a sequence c_n, $n \in (-\infty, \infty)$, to be a sequence of Fourier coefficients of some complex borelian measure on $\mathbf{T}$. One more criterion of such type is proved.
Keywords: algebra $M(\mathbf{T})$, Fourier coefficients, reducing formula, Geza theorem.
2010 Mathematics Subject Classification 42A16.

Сейчас за множеством комплексных борелевских мер на единичной окружности $\mathbf{T}$ закрепилось стандартное обозначение $M(\mathbf{T})$. Если произведение мер определить как свёртку этих мер, то множество $M(\mathbf{T})$ становится алгеброй над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если, кроме того, определить норму $\mu \in M(\mathbf{T})$ формулой $\|\mu\| = |\mu|(\mathbf{T})$, где $|\mu|$ – модуль (полная вариация) меры μ, то $M(\mathbf{T})$ становится банаховой алгеброй. Книгу [1] можно рекомендовать как источник для первоначального ознакомления с алгеброй $M(\mathbf{T})$. Меру $\mu \in M(\mathbf{T})$ часто отождествляют известным способом с 2π-периодической радоновой мерой на вещественной оси. Мера на окружности и соответствующая ей мера на вещественной оси – это, конечно, различные меры, тем не менее, многие авторы, в том числе и мы, предпочитают обозначать эти меры одним символом μ.

Коэффициенты Фурье меры μ нам удобно представлять не интегралом по окружности, а интегралом по отрезку вещественной оси

$$\hat{\mu}(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(0,2\pi]} e^{-int} d\mu(t).$$

Если мера μ нагружает точку 0, то интегрирование нужно вести по полуинтервалу $(0, 2\pi]$, если же $\mu(\{0\}) = 0$, то интегрирование можно вести по сегменту $[0, 2\pi]$.

Мы будем иметь дело с рядами вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n$. Под суммой ряда понимается предел $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} a_n$. Мы будем также использовать обозначение

$$\sum{}' a_n = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_n.$$

Теорема 1. *Пусть* $\mu \in M(\mathbf{T})$. *Тогда*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(n)}{n+z} = \frac{i}{e^{2\pi iz} - 1} \int\limits_{(0,2\pi)} e^{itz} d\mu(t) + \frac{1}{2}\mu(\{0\}) \operatorname{ctg} \pi z.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{\hat{\mu}(n)}{n+z} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n+z} \int\limits_{(0,2\pi]} e^{-int} d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(0,2\pi]} \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{-int}}{n+z} d\mu(t).$$

Из известного утверждения о равномерной ограниченности последовательности $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\sin nt}{n}$ на оси $(-\infty, \infty)$ следует, что при нецелых z последовательность

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{-int}}{n+z}$$

равномерно ограничена по t на оси $(-\infty,\infty)$. Теперь из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\hat{\mu}(n)}{n+z}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(0,2\pi]}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-int}}{n+z}d\mu(t).$$

Далее, используя известное равенство, (см., например, [2], глава 1, равенство (4.19))

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-int}}{n+z}=\begin{cases}\frac{\pi}{\sin\pi z}e^{i(t-\pi)z}, & t\in(0,2\pi)\\ \pi\operatorname{ctg}\pi z, & t=2\pi,\end{cases}$$

получим утверждение теоремы.

Пусть $\mu\in M(\mathbf{T})$. Обозначим $\Phi(t)=\mu\left((0,t]\right)$, $t\in(0,2\pi]$. Далее продолжим функцию $\Phi(t)$ с полуинтервала $(0,2\pi]$ как 2π-периодическую функцию на всю вещественную ось. Кроме того, обозначим

$$\widetilde{\Phi}(t)=\begin{cases}\Phi(t), & t\in(0,2\pi]\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть $\mu\in M(\mathbf{T})$. Тогда для любого целого n выполняется равенство*

$$\int\limits_{(0,2\pi]}e^{-int}d\mu(t)=\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-int}d\widetilde{\Phi}(t),$$

где слева стоит интеграл Лебега, а справа – интеграл Стилтьеса.

Доказательство. Пусть $\Pi: 0=t_0<t_1<...<t_N=2\pi$ – произвольное разбиение сегмента $[0,2\pi]$. Имеем

$$J_1=\int\limits_{(0,2\pi]}e^{-int}d\mu(t)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{(t_{k-1},t_k]}e^{-int}d\mu(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}e^{-int_k}\left(\widetilde{\Phi}(t_k)-\widetilde{\Phi}(t_{k-1})\right)+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{(t_{k-1},t_k]}\left(e^{-int}-e^{-int_k}\right)d\mu(t),$$

$$J_2=\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-int}d\widetilde{\Phi}(t)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}e^{-int}d\widetilde{\Phi}(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}e^{-int_k}\left(\widetilde{\Phi}(t_k)-\widetilde{\Phi}(t_{k-1})\right)+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(e^{-int}-e^{-int_k}\right)d\widetilde{\Phi}(t).$$

Каждая из величин J_1 и J_2 представлена в виде суммы двух слагаемых, причём первые слагаемые равны, а вторые стремятся к нулю, когда диаметр разбиения П стремится к нулю. Из этого следует, что $J_1 = J_2$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mu \in M(\mathbf{T})$ и c_n – коэффициенты Фурье меры μ. Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{2}\left(\Phi(t-0)+\Phi(t+0)\right) = d_0 + {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' \frac{c_n - c_0}{in} e^{int}, \tag{1}$$

где d_0 – некоторое комплексное число.

Доказательство. Обозначим через d_n коэффициенты Фурье функции $\Phi(t)$. Используя формулу интегрирования по частям для интеграла Стилтьеса и лемму 1, получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-int} d\widetilde{\Phi}(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-int}\widetilde{\Phi}(t)\Big|_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(t)e^{-int}dt = \frac{\mu(\mathbf{T})}{2\pi} + ind_n.$$

Так как $\frac{1}{2\pi}\mu(\mathbf{T}) = c_0$, то

$$d_n = \frac{c_n - c_0}{in}, \qquad n \neq 0. \tag{2}$$

Из теоремы Жордана-Дирихле следует, что

$$\frac{1}{2}\left(\Phi(t-0)+\Phi(t+0)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int}.$$

Из этого равенства и формулы (2) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Формулу (1) можно рассматривать как формулу восстановления меры μ по её коэффициентам Фурье. Действительно, если $t \in (0, 2\pi]$ и t – точка непрерывности функции Φ, то получаем

$$\mu((0,t]) = d_0 + {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' \frac{c_n - c_0}{in} e^{int}.$$

Отметим ещё формулу ([3], глава 1, раздел 7.11)

$$\mu(\{t\}) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int},$$

которая восстанавливает $\mu(\{t\})$ по коэффициентам Фурье меры μ.

Следствием теоремы 2 является теорема единственности.

Теорема 3. *Пусть $\mu \in M(\mathbf{T})$ и пусть все коэффициенты Фурье меры μ равны нулю. Тогда μ – нулевая мера.*

Теорема 4. *Для того, чтобы последовательность c_n была последовательностью коэффициентов Фурье некоторой меры $\mu \in M(\mathbf{T})$, необходимо и достаточно, чтобы:*
1) *последовательность c_n была ограниченной,*
2) *для любого вещественного t сходился ряд*

$$\varphi(t) = {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' \frac{c_n}{in} e^{int}, \tag{3}$$

3) *функция $\varphi(t)$ имела ограниченную вариацию на сегменте $[0, 2\pi]$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть c_n – коэффициенты Фурье меры μ. Тогда $|c_n| \le \frac{1}{2\pi}|\mu|(\mathbf{T})$ и условие 1) теоремы выполняется.

Далее из равенства (1) следует, что

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(t-0) + \Phi(t+0)\right) - d_0 + 2c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}.$$

Поэтому условия 2) и 3) теоремы также выполняются.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняются условия 1) - 3) теоремы. Из ограниченности последовательности c_n следует, что ряд из равенства (3) сходится в пространстве $L_2(0, 2\pi)$. Поэтому этот ряд является рядом Фурье своей суммы. Таким образом

$$\frac{c_n}{in} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\varphi(t)dt = -\frac{1}{2\pi in}e^{-int}\varphi(t)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} e^{-int}d\varphi(t),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}d\varphi_1(t), \qquad \varphi_1(t) = \varphi(t) - \varphi(0). \tag{4}$$

Функция $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на сегменте $[0, 2\pi]$. Поэтому существует 2π-периодическая мера Радона ν на вещественной оси, такая что при $t \in (0, 2\pi]$ будет выполняться равенство $\nu((0,t]) = \varphi_1(t)$. Меру ν можно считать борелевской мерой на окружности $\mathbf{T}$. Пусть h_n – коэффициенты Фурье меры ν.

Если для меры ν построить функцию $\widetilde{\Phi}(t)$ так, как это делается в лемме 1, то окажется, что $\widetilde{\Phi}(t) = \varphi_1(t)$ при $t \in [0, 2\pi]$. Поэтому из леммы 1 следует равенство

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}d\varphi_1(t).$$

Теперь равенство (4) переписывается в виде $c_n = h_n$. Теорема доказана.

Имеются различные критерии того, чтобы заданная комплексная последовательность c_n совпадала с последовательностью коэффициентов Фурье некоторой меры μ из алгебры $M(\mathbf{T})$. Приведём два из них.

Теорема 5. *Для того, чтобы заданная последовательность c_n совпадала с последовательностью коэффициентов Фурье некоторой меры μ из алгебры $M(\mathbf{T})$, необходимо и достаточно, чтобы была ограниченной последовательность $\int\limits_0^{2\pi} |\sigma_n(t)|dt$, где $\sigma_n(t)$ – последовательность частичных сумм Фейера ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.*

Теорема 6. *Для того, чтобы заданная последовательность c_n совпадала с последовательностью коэффициентов Фурье некоторой меры μ из алгебры $M(\mathbf{T})$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $f(t)$ ограниченной вариации на сегменте $[0, 2\pi]$ такая, что выполняются равенства*

$$\frac{c_n}{in} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-int} f(t)dt, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Доказательство теоремы 5 можно найти в разделе 12.7.5 книги [1], а теоремы 6 – в разделе 12.5.10 той же книги.

Анализируя доказательство теоремы 2 можно увидеть, что теоремы 4 и 6 выводятся друг из друга.

Гёз [4] доказал, что если n_k – произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin n_k x = \frac{1}{2i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ |n|=n_k}}^{\infty} \operatorname{sign} n \, e^{inx}$$

не является рядом Фурье никакой меры из алгебры $M(\mathbf{T})$. Для этого ряда ряд из формулы (3), представляющий функцию $\varphi(x)$, имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{2i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ |n|=n_k}}^{\infty} \frac{1}{|n|} e^{inx} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos n_k x}{n_k}.$$

В случае, когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ расходится, результат Гёза следует из теоремы 4.

В случае, когда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ сходится, одной теоремы 4 недостаточно, чтобы получить результат Гёза. Заметим, что в этом случае из результата Гёза и теоремы 4 вытекает следующее.

Теорема 7. *Пусть n_k – сторого возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ сходится. Тогда функция*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos n_k x}{n_k}$$

имеет неограниченную вариацию на сегменте $[0, 2\pi]$.

Прямое доказательство теоремы 7 неизвестно. С помощью теоремы 7 можно получить некоторое усиление теоремы Гёза.

Теорема 8. *Пусть n_k – сторого возрастающая последовательность натуральных чисел, $\alpha_n = \operatorname{sign} n$, если $|n| = n_k$ и $\alpha_n = 0$ для других n, $\beta_n = \gamma_n$, где γ_n – последовательность коэффициентов Фурье некоторой функции класса L_1 такой, что $\gamma_0 = 0$. Пусть $\delta_n = \alpha_n + \beta_n$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \delta_n \, e^{inx} \tag{5}$$

не является рядом Фурье никакой меры из алгебры $M(\mathbf{T})$.

Доказательство. Для ряда (5) формула (3) принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos n_k x}{n_k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\gamma_n}{in} \, e^{inx} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Допустим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ расходится. Тогда ряд, определяющий функцию $\varphi(x)$, расходится в точке $x = 0$ и по теореме 4 ряд (5) не является рядом Фурье никакой меры из алгебры $M(\mathbf{T})$.

Допустим теперь, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ сходится. По теореме 7 функция $\varphi_1(x)$ имеет неограниченную вариацию на сегменте $[0, 2\pi]$. По теореме 2.1 ([1], глава 2) функция $\varphi_2(x)$ абсолютно непрерывна и коэффициенты Фурье её производной совпадают с коэффициентами Фурье функции $f(x)$. По теореме единственности для рядов Фурье получаем, что $\varphi_2'(x) = f(x)$. Из этого следует, что функция $\varphi_2(x)$ имеет ограниченную вариацию на сегменте $[0, 2\pi]$, а функция $\varphi(x)$ имеет неограниченную вариацию на этом сегменте. Снова, применяя теорему 4, получим, что ряд (5) не является рядом Фурье никакой меры из алгебры $M(\mathbf{T})$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Том 2. – Москва: Мир, – 1985. – 400 с.

2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Том 1. – Москва: Мир, – 1965. – 616 с.

3. Katznelson Y. An introduction to harmonic analysis. – New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons, – 1968. – 264 p.

4. Goes G. Addendum: Fourier-Stieltjes Series with Finitely Many Distinct Coefficients and Almost Periodic Sequenses. // Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 1968. – **21.** – P. 618.