Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 1081, 2013, с.21–32

Задача Гурса з імпульсними збуреннями

Є.В. Массалітіна
Національний технічний університет України "КПІ", Київ
masevgeniia@gmail.com

Знайдена оцінка для функції двох змінних, що задовольняє задачі Гурса з даними на характеристиках та отримує імпульсні збурення на заданих кривих.
Ключові слова: інтегральні нерівності, рівняння гіперболічного типу, імпульсні збурення.

Массалитина Е.В., **Задача Гурса с импульсными возмущениями.** Найдена оценка для функции двух переменных, удовлетворяющей задаче Гурса с данными на характеристиках и получающей импульсные возмущения на заданных кривых.
Ключевые слова: интегральные неравенства, уравнения гиперболического типа, импульсные возмущения.

E.V. Massalitina, **The Goursat problem with impulse perturbations.** An estimate for the function of two variables satisfying the Goursat problem with the data on the characteristics and receives a pulse perturbation at defined curves.
Keywords: integral inequalities, hyperbolic equation, impulse perturbation.

2000 Mathematics Subject Classification 34A37, 35L70, 58J45.

Вступ

При дослідженні поведінки розв'язків диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, а також рівнянь в частинних похідних часто використовують інтегральні нерівності [1], [2], [3]. В даній статті приведені результати, що узагальнюють оцінку, отриману в роботі [4] для функції двох змінних, на випадок розривних фунцій та продовжують дослідження, розпочаті в роботах [5], [6].

1. Постановка задачі

Розглянемо функцію $v\left(x,y\right)$, що задовольняє задачі Гурса [7] з даними на характеристиках в деякій області $D^{*}\subset R^{2}$, в припущенні, що функція $v\left(x,y\right)$ на кривих $L_{j}=\left\{(x,y):\ \psi_{j}\left(x,y\right)=0\right\}$ отримує імпульсні збурення, які можуть відбуватися як в фіксованих точках на кривій, так і миттєво на всій довжині кривій, тобто можуть носити як дискретний так і неперервний характер.

Область $D^{*}=D\cup L$, де $L=\bigcup\limits_{j=1}^{n}L_{j}$ – сукупність кривих, на яких функція $v\left(x,y\right)$ має скінченний стрибок, $L_{i}\cap L_{j}=\oslash,\ i\neq j$. Область $D=\bigcup\limits_{j=1}^{n}D_{j}$, де

$$D_{1}=\left\{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ \psi_{1}\left(x,y\right)<0\right\},$$

$$D_{j}=\left\{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ \psi_{j-1}\left(x,y\right)>0,\ \psi_{j}\left(x,y\right)<0\right\},\ j=\overline{2,n}.$$

Нехай еволюція цього процесу описується рівнянням гіперболічного типу з імпульсними збуреннями

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial^{2}v}{\partial x\partial y}=f^{*}\left(x,y\right)v\left(x,y\right)+k^{*}\left(x,y\right)v^{\alpha}\left(x,y\right),\\ v\left(x,y_{0}\right)=g_{1}^{*}\left(x\right),\\ v\left(x_{0},y\right)=g_{2}^{*}\left(y\right),\end{array}\right.\qquad\forall\ (x,y)\notin L_{j},\tag{1}$$

$$\triangle v\left(x,y\right)\Big|_{(x,y)\in L_{j}}=\int\limits_{L_{j}\cap G_{n}}\omega_{j}^{*}\left(M\right)v\left(M\right)d\mu_{\psi_{j}},\tag{2}$$

де задані функції $\omega_{j}^{*}\left(x,y\right),\ f^{*}\left(x,y\right),\ k^{*}\left(x,y\right)$ – неперервні в області D^{*}, дійсне число $\alpha\geq 0$ розглядається в якості параметра. Інтеграл Лебега-Стілтьєса (2) описує умову стрибка $\triangle v\left(x,y\right)$ функції $v\left(x,y\right)$ на заданих кривих L_{j}. Область

$$G_{j}=\left\{(s,t):\ (x,y)\in D_{j},\ (x_{0},y_{0})\in D_{1},\ x_{0}\leq s\leq x,\ y_{0}\leq t\leq y\right\},$$

$M\left(\xi,\eta\right)$– змінна точка кривої L_{j}. Функції $g_{1}^{*}\left(x\right),\ g_{2}^{*}\left(y\right)$ є диференційовними та задовольняють умові узгодженості $g_{1}^{*}\left(x_{0}\right)=g_{2}^{*}\left(y_{0}\right)$, причому $v\left(x_{0},y_{0}\right)\neq 0$. Тоді, для функції $v\left(x,y\right)$, згідно з [8] (гл. I, § 3, п. 1; гл. II, § 5; гл. III, § 6, пп. 3, 6, 7; гл. IV, § 9) справедливе співвідношення

$$v(x,y)\leq g_{1}^{*}(x)+g_{2}^{*}(y)-g_{1}^{*}(x_{0})+\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{L_{j}\cap G_{n}}\omega_{j}^{*}(M)v(M)d\mu_{\psi_{j}}+$$

$$+\iint\limits_{G_{n}}\left(f^{*}(s,t)v(s,t)+k^{*}(s,t)v^{\alpha}(s,t)\right)dsdt.\tag{3}$$

2. Оцінка функції, що задовольняє задачі Гурса з імпульсними збуреннями

Теорема 1 *Нехай в області* $D^* \subset R^2$, $D^* = D \cup L$ *виконуються умови:*

1. *Невід'ємна функція* $u(x,y)$ *є неперервною в області* D*;*
2. *Криві* $\psi_j(x,y)$ *– є неперервно-диференційовними та монотонно-спадними,* $grad\, \psi_j(x,y) > 0$*;*
3. μ_{ψ_j} *– міра Лебега-Стілтьєса [8], яка зосереджена на кривій* L_j*;*
4. *Функція* $u(x,y)$ *є інтегровною за Лебегом на кривих* L_j, $j = \overline{1,n}$*;*
5. *Функції* $\omega_j(x,y)$, $j = \overline{1,n}$, $f(x,y)$, $k(x,y)$*– неперервні та невід'ємні в області* D^**;*
6. *Функції* $g_1(x)$, $g_2(y)$ *є додатними, диференційовними,* $g\prime_1(x) \geq 0$, $g\prime_2(y) \geq 0$*;*
7. $g_1(x_0) = g_2(y_0)$*;*
8. *Функція* $u(x,y)$ *задовольняє в області* D^* *інтегральну нерівність*

$$u(x,y) \leq R_u(x,y) + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{L_j \cap G_n} \omega_j(M)\, u(M)\, d\mu_{\psi_j}, \tag{4}$$

де

$$R_u(x,y) = g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \iint\limits_{G_n} \left(f(s,t)\, u(s,t) + k(s,t)\, u^{\alpha}(s,t)\right) dsdt. \tag{5}$$

Тоді справджуються оцінки:
при $0 \leq \alpha < 1$

$$u(x,y) \leq \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int\limits_{L_j \cap G_n} \omega_j(M)\, d\mu_{\psi_j}\right) \Biggl\{ F_n^{1-\alpha}(x_0, x, y_0, y) \times$$
$$\times \left[g_1^{1-\alpha}(x) + g_2^{1-\alpha}(y) - g_1^{1-\alpha}(x_0)\right] +$$
$$+ (1-\alpha) \iint\limits_{G_n} \left(k(s,t)\, F_n^{1-\alpha}(x_0, x, t, y) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int\limits_{L_j \cap G_n} \omega_j(M)\, d\mu_{\psi_j}\right)^{\alpha} \right) dsdt \Biggr\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{6}$$

де

$$F_n(x_0,x,y_0,y)=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} f(s,t)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)dsdt\right); \quad (7)$$

при $\alpha=1$

$$u(x,y)\le\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)E_n(x,y)\,\frac{g_1(x)\,g_2(y)}{g_1(x_0)}, \quad (8)$$

де

$$E_n(x,y)=\exp\left(\iint\limits_{G_n}(f(s,t)+k(s,t))\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)dsdt\right); \quad (9)$$

при $\alpha>1$ *оцінка (6) буде справедливою в області*

$$D_{\alpha_n}=\left\{(x,y)\in D_n:\right.$$

$$\iint\limits_{G_n}\left(k(s,t)\,F_n^{\alpha-1}(x_0,x,t,y)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)^{\alpha}\right)dsdt<$$

$$\left.<(\alpha-1)^{-1}[g_1^{1-\alpha}(x)+g_2^{1-\alpha}(y)-g_1^{1-\alpha}(x_0)\,]\right\}.$$

Доведення. Доведення проведемо, використовуючи метод математичної індукції для випадку $0\le\alpha<1$ (при $\alpha>1$ схема доведення не зміниться). Нехай $(x,y)\in D_1$. Тоді

$$u(x,y)\le g_1(x)+g_2(y)-g_1(x_0)+$$

$$+\iint\limits_{G_1}(f(s,t)\,u(s,t)+g(s,t)\,u^{\alpha}(s,t))\,dsdt=R_u(x,y)\,, \quad (10)$$

Оскільки функція $u(x,y)$ в області D_1 не зазнає імпульсного впливу, то за теоремою 1 [4] для нерівності (10) буде справедливою оцінка

$$u(x,y)\le\left\{F_1(x_0,x,y_0,y)\times\ [g_1^{1-\alpha}(x)+g_2^{1-\alpha}(y)-g_1^{1-\alpha}(x_0)\,]+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\iint\limits_{G_1}\big(k\,(s,t)\,F_1^{1-\alpha}\,(x_0,x,t,y)\big)\,dsdt\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{11}$$

де позначено

$$F_1\,(x_0,x,y_0,y)=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x}f\,(s,t)\,dsdt\right).$$

Розглянемо область D_2. Для $(x,y)\in D_2$

$$u\,(x,y)\le\;R_u\,(x,y)+\int\limits_{L_1\cap G_2}\omega_1\,(M)\,u\,(M)\,d\mu_{\psi_1}=R_{1u}\,(x,y)\,. \tag{12}$$

Враховуючи те, що функція $R_u\,(x,y)$ є неспадною по кожній змінній

$$\frac{\partial\;R_u\,(x,y)}{\partial x}\ge 0,\qquad \frac{\partial\;R_u\,(x,y)}{\partial y}\ge 0$$

та нерівність (10), $\forall\,M\,(\xi,\eta)\in L_1$ можемо записати

$$u\,(M)\le\;R_u\,(M)\le\;R_u\,(x,y)\,. \tag{13}$$

З нерівностей (12) та (13) випливає

$$R_1\,(x,y)\le\left(1+\int\limits_{L_1\cap G_2}\omega_1\,(M)\,d\mu_{\psi_1}\right)R_u\,(x,y)\,,$$

Тоді нерівність (12) набуде вигляду

$$u\,(x,y)\le\lambda_1\,(x,y)\,R_u\,(x,y)\,,$$

де позначено

$$\lambda_1\,(x,y)=1+\int\limits_{L_1\cap G_2}\omega_1\,(M)\,d\mu_{\psi_1}.$$

Тоді

$$u\,(x,y)\le\lambda_1\,(x,y)\Bigg(g_1\,(x)+g_2\,(y)-g_1\,(x_0)+$$

$$+\iint\limits_{G_2}\left(f\,(s,t)\,u\,(s,t)+k\,(s,t)\,u^{\alpha}\,(s,t)\right)dsdt\Bigg),$$

$$\frac{u\,(x,y)}{\lambda_1\,(x,y)}\le\Bigg(g_1\,(x)+g_2\,(y)-g_1\,(x_0)+$$

$$+\iint\limits_{G_2}\left(f_1(s,t)\,\frac{u(s,t)}{\lambda_1(s,t)}+k_1(s,t)\,\frac{u^\alpha(s,t)}{\lambda_1^\alpha(s,t)}\right)dsdt\Bigg), \tag{14}$$

де позначено

$$f_1(s,t)=f(s,t)\,\lambda_1(s,t)\,,$$

$$k_1(s,t)=k(s,t)\,\lambda_1^\alpha(s,t)\,.$$

Якщо застосуємо до нерівності (14) теорему 1 [4], то отримаємо

$$u(x,y)\le\lambda_1(x,y)\Bigg\{F_2^{1-\alpha}(x_0,x,y_0,y)\ \left[g_1^{1-\alpha}(x)+g_2^{1-\alpha}(y)-g_1^{1-\alpha}(x_0)\ \right]+$$

$$+(1-\alpha)\iint\limits_{G_2}\left(k_1(s,t)\,F_2^{1-\alpha}(x_0,x,t,y)\right)dsdt\Bigg\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{15}$$

або

$$u(x,y)\le\left(1+\int\limits_{L_1\cap G_2}\omega_1(M)\,d\mu_{\psi_1}\right)\Bigg\{F_2^{1-\alpha}(x_0,x,y_0,y)\times$$

$$\times\ \left[g_1^{1-\alpha}(x)+g_2^{1-\alpha}(y)-g_1^{1-\alpha}(x_0)\ \right]+$$

$$+(1-\alpha)\iint\limits_{G_2}\left(k(s,t)\,F_2^{1-\alpha}(x_0,x,t,y)\left(1+\int\limits_{L_1\cap G_2}\omega_1(M)\,d\mu_{\psi_1}\right)^\alpha\right)dsdt\Bigg\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{16}$$

де позначено

$$F_2(x_0,x,y_0,y)=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x}f(s,t)\left(1+\int\limits_{L_1\cap G_2}\omega_1(M)\,d\mu_{\psi_1}\right)dsdt\right).$$

Припустимо, що нерівність (4)–(5) є справедливою для $(x,y)\in D_k$. Доведемо, що вона буде справедливою і для $(x,y)\in D_{k+1}$. $\forall\ (x,y)\in D_{k+1}$

$$u(x,y)\le R_u(x,y)+\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{L_j\cap G_{k+1}}\omega_j(M)\,u(M)\,d\mu_{\psi_j}\le$$

$$\le R_{k-1}(x,y)+\int\limits_{L_k\cap G_{k+1}}\omega_k(M)\,u(M)\,d\mu_{\psi_k}=R_{ku}(x,y)\,. \tag{17}$$

Звідси, враховуючи властивості функції $R_{k-1u}(x,y)\,,\ \forall\,M(\xi,\eta)\in L_k$ можемо записати

$$u(M)\le R_{k-1}(M)\le R_{k-1}(x,y)\,. \tag{18}$$

Оскільки

$$R_{k-1}(x,y) \le R_u(x,y) \prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j(x,y), \tag{19}$$

де

$$\lambda_j(x,y) = 1 + \int\limits_{L_j \cap G_{k+1}} \omega_j(M)\, d\mu_{\psi_j},$$

то з нерівностей (18) та (19) випливає

$$R_{ku}(x,y) \le R_{k-1}(x,y)\, \lambda_k(x,y) \le$$

$$\le R(x,y)\, \lambda_k(x,y) \prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j(x,y) = R_u(x,y) \prod_{j=1}^{k} \lambda_j(x,y).$$

Тоді нерівність (17) набуде вигляду

$$u(x,y) \le R_u(x,y) \prod_{j=1}^{k} \lambda_j(x,y)$$

або

$$u(x,y) \le \prod_{j=1}^{k} \lambda_j(x,y) \Bigg(g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) +$$

$$+ \iint\limits_{G_{k+1}} \left(f(s,t)\, u(s,t) + k(s,t)\, u^{\alpha}(s,t) \right) ds dt \Bigg).$$

Тоді

$$\frac{u(x,y)}{\prod\limits_{j=1}^{k} \lambda_k(x,y)} \le \Bigg(g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) +$$

$$+ \iint\limits_{G_{k+1}} \left(f_k(s,t) \frac{u(s,t)}{\prod\limits_{j=1}^{k} \lambda_k(s,t)} + k_k(s,t) \frac{u^{\alpha}(s,t)}{\prod\limits_{j=1}^{k} \lambda_k^{\alpha}(s,t)} \right) ds dt \Bigg), \tag{20}$$

де позначено

$$f_k(s,t) = f(s,t) \prod_{j=1}^{k} \lambda_k(s,t),$$

$$k_k(s,t) = k(s,t) \prod_{j=1}^{k} \lambda_k^{\alpha}(s,t).$$

За теоремою 1 [4] для нерівності (20) буде справедливою оцінка

$$u\left(x,y\right)\le\prod_{j=1}^{k}\lambda_j\left(x,y\right)\left\{F_{k+1}^{1-\alpha}\left(x_0,x,y_0,y\right)\ \left[g_1^{1-\alpha}\left(x\right)+g_2^{1-\alpha}\left(y\right)-g_1^{1-\alpha}\left(x_0\right)\ \right]+\right.$$

$$\left.+\left(1-\alpha\right)\iint\limits_{G_{k+1}}\left(k\left(s,t\right)F_{k+1}^{1-\alpha}\left(x_0,x,t,y\right)\prod_{j=1}^{k}\lambda_j^{\alpha}\left(s,t\right)\right)dsdt\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}},\qquad(21)$$

де

$$F_{k+1}\left(x_0,x,y_0,y\right)=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x}f_k\left(s,t\right)dsdt\right)=$$

$$=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x}f\left(s,t\right)\prod_{j=1}^{k}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_{k+1}}\omega_j\left(M\right)d\mu_{\psi_j}\right)dsdt\right),$$

Тобто, отримана нерівність (6)–(7) для $n=k+1$. Отже, нерівність справедлива $\forall\,n\in N$.

Нехай $\alpha=1$. Знов скористаємося методом математичної індукції. $\forall\ (x,y)\in D_1$ нерівність (4) має такий вигляд

$$u(x,y)=g_1(x)+g_2(y)-g_1\left(x_0\right)+\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x}(f(s,t)+k(s,t))u(s,t)dsdt=H_u(x,y).\qquad(22)$$

За теоремою 1 [4] для нерівності (22) буде справедливою оцінка

$$u(x,y)\le\frac{g_1(x)g_2(y)}{g_1(x_0)}E_1(x,y),\qquad(23)$$

де

$$E_1(x,y)=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x}(f(s,t)+k(s,t))dsdt\right).$$

Припустимо, що нерівність (8)–(9) є справедливою для $(x,y)\in D_k$. Доведемо, що вона буде справедливою і для $(x,y)\in D_{k+1}$. $\forall\ (x,y)\in D_{k+1}$

$$u(x,y)\le H_{k-1u}(x,y)+\int\limits_{L_k\bigcap G_{k+1}}\omega_k(M)u(M)d\mu_{\psi_k}=H_{ku}(x,y).\qquad(24)$$

Функція $H_{ku}(x,y)$ є неспадною по кожній змінній, тому $\forall\,M\,(\xi,\eta)\in L_k$

$$u(M)\le H_{k-1u}(M)\le H_{k-1u}(x,y).\qquad(25)$$

Оскільки

$$H_{k-1u}(x,y) \le H_u(x,y)\prod_{j=1}^{k-1} h_j(x,y), \tag{26}$$

де позначено

$$h_j(x,y) = 1 + \int\limits_{L_j \bigcap G_{j+1}} \omega_j(M)d\mu_{\psi_j},$$

то з нерівностей (25)–(26) випливає

$$H_{ku}(x,y) \le H_{k-1u}(x,y)h_k(x,y) \le$$

$$\le H_u(x,y)h_k(x,y)\prod_{j=1}^{k-1} h_j(x,y) = H_u(x,y)\prod_{j=1}^{k} h_j(x,y).$$

Тоді нерівність (23) прийме такий вигляд

$$u(x,y) \le H_u(x,y)\prod_{j=1}^{k} h_j(x,y).$$

Звідси

$$\frac{u(x,y)}{\prod\limits_{j=1}^{k} h_j(x,y)} \le g_1(x) + g_2(y) - g_1(x_0) + \int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} (f_k(s,t) + k_k(s,t))\frac{u(s,t)}{\prod\limits_{j=1}^{k} h_j(s,t)} dsdt,$$

де позначено

$$f_k(s,t) + k_k(s,t) = (f(s,t) + k(s,t))\prod_{j=1}^{k} h_j(s,t).$$

Скористаємося теоремою 1 [4] та отримаємо

$$u(x,y) \le \frac{g_1(x)g_2(y)}{g_1(x_0)}\prod_{j=1}^{k} h_j(x,y)E_{k+1}(x,y),$$

де

$$E_{k+1}(x,y) = \exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x}(f(s,t)+k(s,t))\prod_{j=1}^{k}\left(1 + \int\limits_{L_j \bigcap G_{k+1}} \omega_j(M)d\mu_{\psi_j}\right)dsdt\right).$$

Тобто, отримана нерівність (8)–(9) для $n = k+1$. Отже, нерівність справедлива $\forall\, n \in N$. Теорему доведено.

Для знаходження оцінки розв'язків задачі Гурса з імпульсними збуреннями, зробимо деякі припущення. Нехай в області $D^* \subset R^2$ для неперервних функцій $\omega_j^*(x,y)\,,\, j=\overline{1,n},\, f^*(x,y)\,,\, k^*(x,y)$ виконуються такі співвідношення

$$\left|\omega_j^*(x,y)\right| \le \omega_j(x,y)\,, \quad |\, f^*(x,y)| \le \; f(x,y)\,, \quad |\, k^*(x,y)| \le \; k(x,y)\,. \qquad (27)$$

Покладемо $u(x,y) = |v(x,y)|$ та припустимо

$$|g_1^*(x)| \le g_1(x)\,, \quad |g_2^*(y)| \le g_2(y)\,, \qquad (28)$$

де функції $g_1(x)\,,\, g_2(y)$ задовольняють умовам теореми 1.

Наслідок. *Нехай в області D^* виконуються співвідношення (27)–(28) та функції $\omega_j(x,y)\,,\; f(x,y),\, k(x,y)$ задовольняють умовам теореми 1. Тоді для розв'язків задачі (1)–(2) справедливі оцінки (6)–(9).*

Теорема 2 *Нехай в області $D^* \subset R^2,\;\; D^* = D \cup L$ виконуються 1-6 умови теореми 1 та функція $u(x,y)$ задовольняє інтегральну нерівність (4), де*

$$R_u(x,y) = g_1(x) + g_2(y) + \iint\limits_{G_n} \left(f(s,t)\,u(s,t) + k(s,t)\,u^{\alpha}(s,t)\right) dsdt.$$

Тоді справджуються оцінки:

при $0 \le \alpha < 1$

$$u(x,y) \le \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 + \int\limits_{L_j \cap G_n} \omega_j(M)\, d\mu_{\psi_j}\right)\Bigg\{F_n^{1-\alpha}(x_0,x,y_0,y)\times$$

$$\times\left[(g_1(x)+g_2(y_0))^{\,1-\alpha} + (g_1(x_0)+g_2(y))^{1-\alpha} - (g_1(x_0)+g_2(y_0))^{1-\alpha}\right] +$$

$$+\,(1-\alpha)\iint\limits_{G_n}\left(k(s,t)\,F_n^{1-\alpha}(x_0,x,t,y)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{L_j \cap G_n}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)^{\alpha}\right) dsdt\Bigg\}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

де

$$F_n(x_0,x,y_0,y) = \exp\left(\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} f(s,t)\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{L_j \cap G_n}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right) dsdt\right);$$

при $\alpha = 1$

$$u(x,y) \le \prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\int\limits_{L_j \cap G_n}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right) E_n(x,y)\times$$

$$\times \frac{(g_1(x) + g_2(y_0))(g_1(x_0) + g_2(y))}{g_1(x_0) + g_2(y_0)},$$

де

$$E_n(x,y) = \exp\left(\iint\limits_{G_n} (f(s,t) + k(s,t)) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int\limits_{L_j \cap G_n} \omega_j(M)\, d\mu_{\psi_j}\right) dsdt\right);$$

при $\alpha > 1$ *оцінка (6) буде справедливою в області*

$$D_{\alpha_n} = \left\{(x,y) \in D_n : \right.$$

$$\iint\limits_{G_n} \left(k(s,t)\, F_n^{\alpha-1}(x_0,x,t,y) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \int\limits_{L_j \cap G_n} \omega_j(M)\, d\mu_{\psi_j}\right)^{\alpha}\right) dsdt <$$

$$\left. < \frac{1}{\alpha - 1}\left((g_1(x) + g_2(y_0))^{1-\alpha} + (g_1(x_0) + g_2(y))^{1-\alpha} - (g_1(x_0) + g_2(y_0))^{1-\alpha}\right)\right\}.$$

Висновок. Характерною особливістю отриманих результатів є те, що при знаходженні оцінок для розривних функцій двох змінних були використані теорія міри та інтеграл Лебега-Стілтьєса. Цей підхід дозволив об'єднати в одному результаті два випадки:

1. μ_{ψ_j} – міра Лебега-Стілтьєса, яка зосереджена на кривій L_j – дискретна;
2. μ_{ψ_j} – міра Лебега-Стілтьєса, яка зосереджена на кривій L_j – абсолютно-неперервна.

References

1. Мартынюк А.А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. – К.: Наук. думка, 1979. – 249 с.

2. Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.

3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк., 1987. – 287 с.

4. Массалітіна Є.В. Оцінка функції, яка задовольняє задачі Гурса // Вісник Харківського університету. Серія: Математика, прикладна математика і механіка – 2005. – №711. – С. 8–16.

5. Массалітіна Є.В. Про інтегро-сумарну нерівність Перова для функцій двох змінних // Укр. мат. журн. 2004. – Т. 56, №11. – С. 1569–1575.

6. Массалітіна Є.В. Багатовимірні нелінійні інтегральні нерівності // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2000. – №6. – С. 149–155.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, – 1977. – 737 с.

8. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. – М.: Наука, – 1967. – 220 с.

Стаття одержана: 25.09.2013; перероблений вариант: 17.11.2013; прийнята: 19.11.2013.