Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:532 № 1133, 2014, с.36–47

Малі коливання капілярної рідини в посудині з перфорованими перегородками

Д. І. Борисов, І. Д. Борисов

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
м. Свободи 4, Харків, 61022, Україна
dptmech@univer.kharkov.ua,
borisov@univer.kharkov.ua,

Розглядаються малі рухи капілярної рідини в посудині, секціонованій перфорованими перегородками. Наведено математичне формулювання задачі з усередненими умовами на перфорованих ділянках перегородок. Наведено результати досліджень еволюційної і спектральної задач.
Ключові слова: капілярна рідина, перфоровані перегородки, малі коливання, власні частоти коливань.

Борисов Д. И., Борисов И. Д., **Малые колебания капиллярной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками.** Рассматриваются малые движения капиллярной жидкости в сосуде, секционированном перфорированными перегородками. Дана математическая формулировка задачи с усредненными граничными условиями на перфорированных участках перегородок. Приведены результаты исследования эволюционной и спектральной задач.
Ключевые слова: капиллярная жидкость, перфорированные перегородки, малые колебания, собственные частоты колебаний.

D. I. Borysov, I. D. Borysov, **Small motions of a capillary fluid in the tank with perforated bafflers.** Small motions of a capillary fluid in the tank partitioned by perforated bafflers are considered. A mathematical formulation of the problem with the averaged boundary conditions on perforated sections of the bafflers is formulated. The results of the study of evolutionary and spectral problems are presented.
Keywords: capillary fluid, perforated bafflers, small oscillations, eigenfrequencies of oscillations.

2000 Mathematics Subject Classification: 76B15.

Вступ

Дослідження коливань рідини в частково заповнених баках мають велике прикладне значення. Отримані до цього часу результати відображені в чисельних публікаціях (див., наприклад, монографії [1]–[11] і вказану в них бібліографію). Із статей, які вийшли порівняно недавно, відзначимо [12]–[17].

В більшості робіт розглядаються баки достатньо простої геометрії. Наявність перегородок та інших пристроїв, розташованих всередині бака, значно ускладнює теоретичний і чисельний аналіз процесів коливань. Приклади розрахунків частот і форм вільних коливань рідини в баках з перегородками наведено в [12]–[15].

В [14]–[15] припускається, що перегородки мають перфораційні отвори. Це додатково ускладнює розрахунки гідродинамічних характеристик баків. Для подолання цих труднощів використовуються усереднені умови на перегородках. При цьому вважається, що кількість перфораційних отворів велика, а їхні розміри й відстані між ними достатньо малі.

В даній роботі, як і в [14]–[15], розглядаються коливання ідеальної рідини в нерухомій посудині з перфорованими перегородками; додатково враховуються сили поверхневого натягу (капілярні сили), які відіграють суттєву роль в умовах невагомості. Встановлені загальні властивості спектру частот власних нормальних коливань рідини. Розглянуті питання розв'язності еволюційної задачі про малі рухи рідини в околі рівноважного стану.

1. Постановка задачі

Нехай рідина частково заповнює нерухомій бак, секціонований перфорованими перегородками (див. рис.1). Будемо вважати, що рідина знаходиться під дією сил поверхневого натягу и зовнішнього однорідного полю масових сил. Форма вільної поверхні рідини в стані рівноваги вважається відомою.

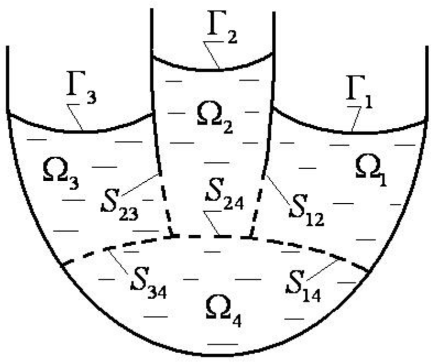

Рис. 1: До постановки задачі

Окремі секції (області) бака позначимо як $\Omega_k,\ k \in \overline{1, N_0}$, де N_0 – загальне число секцій, які містять рідину. Перші N ($N \leq N_0$) секцій вважаються заповнені рідиною лише частково. Нехай Γ позначає вільну поверхню рідини, Γ_k – вільну поверхню рідини в k-й ($k \le N$) частково заповненій секції, так що $\Gamma = \cup_{k=1}^{N} \Gamma_k$. Надалі, для простоти, будемо вважати, що поверхня Γ_k при $\forall k \in \overline{1, N}$ складається з одного компонента зв'язності.

Вважаючи товщину перегородок значно меншою характерного лінійного розміру бака, будемо ототожнювати перегородку між двома суміжними областями Ω_j, Ω_k з її серединною поверхнею $S_{jk}\,(j < k)$. Позначимо через S_k поверхню контакту рідини, яка міститься в Ω_k, $k \ge 1$, із зовнішньою стінкою бака S; до S_k будемо відносити також ділянку перегородки, яка розділяє газову порожнину і область Ω_k, $k \ge 1$. Нормалі $\vec{n}$ до поверхонь S_{jk} умовимося спрямовувати в бік області з більшим номером; нормалі до поверхонь Γ і S_k будемо вважати зовнішніми стосовно області $\Omega := \cup_{k=1}^{N_0} \Omega_k$, яка заповнена рідиною.

Позначимо через I_Ω множину пар цілих чисел (jk), які відповідають суміжним областям Ω_j, Ω_k. Відзначимо, що для деяких номерів $j, k \in \overline{1, N}$ поверхні S_{jk}, S_k можуть бути порожніми множинами.

Позначимо через $\varphi(t, \vec{x})$ потенціал поля швидкостей рідини в області Ω, через $\zeta(t, \xi^1, \xi^2)$ – відхилення вільної поверхні рідини $\Gamma(t)$, яке відраховується по нормалі від рівноважного положення Γ (ξ^1, ξ^2 – координатні параметри на Γ). Припустимо, що кількість отворів у перфорованій ділянці перегородки досить велике, а їхні розміри й відстані між ними малі. При цих припущеннях малі потенціальні рухи рідини поблизу рівноважного стану в лінійному наближенні описуються наступними рівняннями, граничними й початковими умовами [14]–[15]:

$$\Delta\varphi^{(k)}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в } \ \Omega_k, \quad k \in \overline{1, N_0}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \zeta^{(k)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} \quad \text{на } \ \Gamma_k, \quad k \in \overline{1, N}; \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial\, \varphi^{(k)}}{\partial\, t} + \sigma(-\Delta_\Gamma^{(k)} + a^{(k)})\zeta^{(k)} = \rho\, f(t, \vec{x}) + c(t) \quad \text{на } \Gamma_k,\ k \in \overline{1, N}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \zeta^{(k)}}{\partial \nu} + \text{æ}^{(k)}\zeta^{(k)} = 0 \quad \text{на } \ \partial\Gamma_k,\ k \in \overline{1, N}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} = q_{jk}(\varphi^{(k)} - \varphi^{(j)}) \quad \text{на } \ S_{jk}, \quad (jk) \in I_\Omega; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \ S_k, \quad k \in \overline{1, N_0}; \tag{6}$$

$$\zeta^{(k)}\Big|_{t=0} = \zeta_0^{(k)}(\xi^1, \xi^2), \qquad \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n}\bigg|_{t=0} = \zeta_1^{(k)}(\xi^1, \xi^2) \quad \text{на} \quad \Gamma_k, \quad k \in \overline{1, N}; \tag{7}$$

$$a := -\frac{\rho}{\sigma}\vec{g} \cdot \vec{n} - (k_1^2 + k_2^2), \quad \text{æ} := \frac{k_\Gamma\, \cos\alpha\, + k_S}{\sin\alpha}.$$

Тут $\Delta_\Gamma^{(k)}$ – оператор Лапласа—Бельтрамі на поверхні Γ_k; σ – коефіцієнт поверхневого натягу на вільній поверхні Γ; ρ – густина рідини; $q_{jk}(\vec{x})$ – проникність перегородки S_{jk}; k_1, k_2 – головні кривини вільної поверхні Γ; $\partial\Gamma_k$ – контур, який обмежує вільну поверхню Γ_k; k_Γ, k_S – кривина перетинів поверхонь Γ і S площиною, перпендикулярною до контура $\partial\,\Gamma := \cup_{k=1}^N \partial\Gamma_k$; α – кут змочування – двогранний кут, якій створюється рідиною в точках контура $\partial\Gamma$; $\vec{\nu}$ – нормаль до контура $\partial\Gamma$, що розташована в дотичній до Γ площині; $f(t,\vec{x})$ – силова функція збурення зовнішнього поля масових сил; $\vec{g}$ – інтенсивність зовнішнього силового поля; $c(t)$ – довільна функція часу t; $\zeta_0^{(k)}(\xi^1,\xi^2)$, $\zeta_1^{(k)}(\xi^1,\xi^2)$ – задані функції, що визначають початкові відхилення й швидкості точок вільної поверхні рідини.

В (1) – (7) і надалі верхній індекс у круглих дужках означає номер області або поверхні, до якої відноситься та або інша функція.

Поле швидкостей $\vec{v}^{(k)}(t,\vec{x})$ рідини в області Ω_k визначається через потенціал $\varphi^{(k)}(t,\vec{x})$ згідно співвідношення: $\vec{v}^{(k)} := \nabla\varphi^{(k)}(t,\vec{x})$, $k \in \overline{1,N}_0$. Рівняння (1) є наслідком рівняння неперервності $\operatorname{div}\vec{v}^{(k)} = 0$ і потенціальності руху рідини. Рівняння (2), (3) є лінеаризовані кінематичні і динамічні умови на вільній поверхні рідини. Динамічні умови (3) на поверхнях Γ_k, $k \in \overline{1,N}$ записані в припущенні, що всі газові порожнини сполучені між собою. Коефіцієнт поверхневого натягу $\sigma(=\text{const})$ припускається однаковим для всіх поверхонь Γ_k, $k \in \overline{1,N}$. Кут змочування α вважається заданою функцією точок контуру $\partial\Gamma$. При цьому вважається, що кожний контур $\partial\Gamma_k$ перетинається з поверхнею S_k по її непроникненій ділянці.

Умови (5) отримано усередненням точних (у рамках моделі ідеальної рідини) граничних умов на перегородках S_{jk}, що розділяють суміжні області Ω_j, Ω_k. Функції $q_{jk}(\vec{x})$ в цих умовах вважаються заданими, причому $q_{jk}(\vec{x}) \equiv 0$ на неперфорованих ділянках перегородок. Математичне обґрунтування умов (4) наведено в [18]–[20].

Для відхилень вільної поверхні рідини від рівноважного стану повинна виконуватися умова:

$$\sum_{k\in\overline{1,N}} \int_{\Gamma_k} \zeta^{(k)}(t,\xi^1,\xi^2)d\Gamma = 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{8}$$

Функції $\zeta_0^{(k)}, \zeta_1^{(k)}$ в (7) повинні задовольняти умові (8).

2. Операторно-диференціальне формулювання еволюційної задачі

Зведемо еволюційну задачу (1) – (7) до задачі Коші для операторно-диференціального рівняння другого порядку в гільбертовому просторі. Введемо N-компонентні функції $\zeta := (\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, ..., \zeta^{(N)})^\tau$, де кожна з функцій $\zeta^{(k)}$ визначена на поверхні Γ_k і є елементом гільбертового простору $L_2(\Gamma_k)$, а верхній индекс τ означає операцію транспонування. Функції ζ, які визначені на вільній поверхні рідини $\Gamma := \cup_{k=1}^{N}\Gamma_k$, будемо вважати елементами гільбертового простору $L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2) \oplus ... \oplus L_2(\Gamma_N)$. Скалярний добуток і норма в $L_2(\Gamma)$ мають вигляд:

$$(\zeta,\eta)_0 := \sum_{k\in\overline{1,N}} \int_{\Gamma_k} \zeta^{(k)}\bar{\eta}^{(k)} d\Gamma, \quad \|\zeta\|_0 := (\zeta,\zeta)_0^{1/2} .$$

Позначимо як $H_0(\Gamma)$ підпростір функцій з $L_2(\Gamma)$, що задовольняють умові (8). Підпростір $H_0(\Gamma)$ є ортогональним доповненням у $L_2(\Gamma)$ до одновимірного підпростіру, натягнутому на функцію $e_\Gamma := (1,1,...,1)^\tau$, яка дорівнює тотожно 1 на вільній поверхні Γ, так що $H_0(\Gamma) := L_2(\Gamma) \ominus \{e_\Gamma\}$. Згідно з (8) відхилення вільної поверхні рідини від рівноважного стану є елементом простору $H_0(\Gamma)$, тобто $\zeta(t,\xi^1,\xi^2) \in H_0(\Gamma)\,\forall t \geq 0$.

Розглянемо допоміжну крайову задачу:

$$\Delta\phi^{(k)}(\vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad k \in \overline{1,N}_0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n} = \chi^{(k)} \quad \text{на } \Gamma_k, \quad k \in \overline{1,N}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial\phi^{(j)}}{\partial n} = \frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial n} = q_{jk}\left(\phi^{(k)} - \phi^{(j)}\right) \quad \text{на } S_{jk}, \quad (jk) \in I_\Omega; \tag{11}$$

$$\frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_k, \quad k \in \overline{1,N}_0; \tag{12}$$

де функції $\chi^{(k)}$ вважаються заданими. Будемо вважати, що серединні поверхні перегородок S_{jk}, поверхня посудини S і вільна поверхня рідини Γ є достатньо гладкими й перетинаються один з одним під кутами, відмінними від нуля. Функції $q_{jk}(\vec{x})$ підпорядкуємо умові: $0 \leq q_{jk} \leq q^0\,\forall (jk) \in I_\Omega$, де q^0 – деяка додатна константа.

Уведемо гільбертовий простір $H^1(\Omega) := H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2) \oplus ... \oplus H^1(\Omega_N)$, де $H^1(\Omega_k)$ означає простір Соболєва функцій, що належать $L_2(\Omega_k)$ разом із узагальненими похідними першого порядку. Нагадаємо, що Ω означає об'єднання областей, зайнятих рідиною: $\Omega := \cup_{k=1}^{N_0}\Omega_k$.

Позначимо через $\gamma_\Gamma^{(k)}$, $k \in \overline{1,N}$ оператор сліду, що зіставляє довільній функції $\varphi^{(k)} \in H^1(\Omega_k)$, $k \in \overline{1,N}$ її значення на поверхні Γ_k: $\gamma_\Gamma^{(k)}\varphi^{(k)} := \varphi^{(k)}\big|_{\Gamma_k}$. Як відомо [21], оператори $\gamma_\Gamma^{(k)}$ обмежено діють із $H^1(\Omega_k)$ в $H^{1/2}(\Gamma_k)$, де $H^{1/2}(\Gamma_k)$ – простір Соболєва—Слободецького. Визначимо оператор $\gamma_\Gamma := \mathrm{diag}(\gamma_\Gamma^{(1)}, \gamma_\Gamma^{(2)}, ..., \gamma_\Gamma^{(N)})$, що зіставляє довільній функції $\varphi \in H^1(\Omega)$ її значення на поверхні $\Gamma:\ \gamma_\Gamma\varphi := \varphi|_\Gamma$. Оператор γ_Γ, внаслідок обмеженості $\gamma_\Gamma^{(k)}\ \ \forall k \in \overline{1,N}$, також є лінійним обмеженим оператором, що діє з гільбертового простору $H^1(\Omega)$ в простір $H^{1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma_1) \oplus H^{1/2}(\Gamma_2) \oplus ... \oplus H^{1/2}(\Gamma_N)$.

Уведемо гільбертовий простір

$$H_0^1(\Omega) := \left\{\varphi :\ \varphi \in H^1(\Omega),\ \gamma_\Gamma\varphi \in H_0^{1/2}(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0(\Gamma)\right\}.$$

Можна показати, що в прийнятих припущеннях існує єдиний узагальнений розв'язок $\phi \in H_0^1(\Omega)$ крайової задачі (9)–(12) для довільних функцій $\chi := (\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, ..., \chi^{(N)})^\tau \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$, де $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ – простір спряжений до $H_0^{1/2}(\Gamma)$ відносно скалярного добутку в $H_0(\Gamma)$. Під узагальненим розв'язком цієї задачі розуміється функція $\phi := (\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, ..., \phi^{(N_0)})^\tau \in H_0^1(\Omega)$, що задовольняє інтегральній тотожності:

$$\sum_{k\in\overline{1,N}_0}\int_{\Omega_k} \nabla\phi^{(k)} \cdot \nabla\bar{\eta}^{(k)} d\Omega + \sum_{(jk)\in I_\Omega}\int_{S_{jk}} q_{jk}(\phi^{(k)} - \phi^{(j)})(\bar{\eta}^{(k)} - \bar{\eta}^{(j)}) dS =$$
$$= (\chi, \gamma_\Gamma \eta)_0 \quad \forall \eta := (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, ..., \eta^{(N)})^\tau \in H_0^1(\Omega). \qquad (13)$$

Тут і далі $(\cdot,\cdot)_0$ означає продовження скалярного добутку в $H_0(\Gamma)$ на спряжені простори $H_0^{1/2}(\Gamma)$ й $H_0^{-1/2}(\Gamma)$.

Позначимо через A оператор, що розв'язує крайову задачу (9)–(12), так що $\phi = A\chi$. Оператор A – лінійний обмежений оператор, що діє з простору $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ в простір $H_0^1(\Omega)$. Уведемо оператор $C := \gamma_\Gamma A$, що обмежено діє з $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ в $H_0^{1/2}(\Gamma)$. В [14] доведено, що звуження C на $H_0(\Gamma)$ є самоспряжений додатний та компактний оператор у $H_0(\Gamma)$.

Зіставляючи еволюційну (1)–(8) і допоміжну (9)–(12) задачі, неважко встановити, що потенціал швидкостей φ і відхилення ζ вільної поверхні рідини від рівноважного положення зв'язані співвідношеннями:

$$\varphi = A\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \varphi|_\Gamma = \gamma_\Gamma A\frac{\partial \zeta}{\partial t} = C\frac{\partial \zeta}{\partial t}. \qquad (14)$$

Позначимо через $L^{(k)}$ еліптичний диференціальний оператор 2-го порядку:

$$L^{(k)}\zeta^{(k)} := (-\Delta_\Gamma^{(k)} + a^{(k)})\zeta^{(k)}, \quad k \in \overline{1,N},$$

визначений на функціях $\zeta^{(k)} \in H^2(\Gamma_k)$, що задовольняють умовам (4) ($H^2(\Gamma_k)$ – простір Соболєва скалярних функцій, що належать $L_2(\Gamma_k)$ разом з узагальненими похідними до другого порядку включно). Уведемо оператор $L := \mathrm{diag}(L^{(1)}, L^{(2)}, ..., L^{(N)})$ і оператор B,

$$B\zeta := P_{H_0}L\zeta = L\zeta - \frac{e_\Gamma}{|\Gamma|}(L\zeta, e_\Gamma)_0, \qquad (15)$$

з областю визначення

$$D(B) := \left\{\zeta : \zeta \in H^2(\Gamma) \cap H_0(\Gamma_k),\ \left(\frac{\partial\,\zeta}{\partial\,\nu} + æ\,\zeta\right)\Big|_{\partial\Gamma} = 0 \text{ на } \partial\Gamma := \bigcup_{k\in\overline{1,N}} \Gamma_k\right\},$$

де P_{H_0} – оператор ортогонального проектування в $L_2(\Gamma)$ на підпростір $H_0(\Gamma)$. Відзначимо, що $|\Gamma|$ в (15) означає площу всієї вільної поверхні Γ, так що $|\Gamma| := \sum_{k=1}^N |\Gamma_k|$.

Як відомо, кожний із операторів $L^{(k)}$, $k \in \overline{1,N}$ – допускає розширення за Фрідріхсом до самоспряженого обмеженого знизу оператора в $L_2(\Gamma)$ з областю визначення $D(L^{(k)}) \subset H^1(\Gamma_k)$ [5, 11]. Звідси випливає, що оператор B можна розширити до самоспряженого обмеженого знизу оператора в $H_0(\Gamma)$ з областю визначення $D(B) \subset H_0^1(\Gamma)$. Надалі це розширення будемо позначати як і раніше через B.

Звертаючись до динамічної умови (3), а також до початкових умов (7), прийдемо до задачі Коші в гільбертовому просторі $H_0(\Gamma)$, що описує малі потенціальні рухи капілярної рідини поблизу рівноважного стану:

$$\rho C \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \sigma B\zeta = \rho f_0(t) \quad (t > 0), \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \frac{d\zeta(0)}{dt} = \zeta_1. \tag{16}$$

$$\zeta_0 := (\zeta_0^{(1)}, \zeta_0^{(2)}, \ldots, \zeta_0^{(N)})^\tau, \quad \zeta_1 := (\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \ldots, \zeta_1^{(N)})^\tau,$$

$$f_0(t) := f(t) - \frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_\Gamma f(t) d\Gamma.$$

Рівноважним станам рідини відповідають стаціонарні значення функціонала потенціальної енергії

$$\Pi := \sum_{k\in\overline{1,N}} \sigma|\Gamma_k| + \sum_{k\in\overline{1,N}_0} (\sigma_g - \sigma_f)|S_k| - \sum_{k\in\overline{1,N}_0} \int\limits_{\Omega_k} \rho(\vec{g}\cdot\vec{x}) d\Omega, \tag{17}$$

так що $\delta\Pi(\Gamma;\zeta) = 0 \quad \forall\zeta \in H_0(\Gamma)$, де $\delta\,\Pi(\Gamma;\zeta)$ – перша варіація функціонала Π ($\sigma_f, \sigma_g = \mathrm{const}$ – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту рідини та газу з твердою стінкою). Неважко показати, що друга варіація потенціальної енергії $\delta^2\Pi(\Gamma;\zeta)$ збігається (з точністю до множника) із квадратичною формою оператора B, так що у випадку малих відхилень вільної поверхні рідини від рівноважного положення можна прийняти

$$\Pi \simeq \frac{1}{2}\delta^2\Pi(\Gamma;\zeta) = \frac{\sigma}{2}\left(B\zeta,\zeta\right)_0 =$$
$$= \frac{\sigma}{2}\sum_{k\in\overline{1,N}} \left[\int\limits_{\Gamma_k} \left(\left|\nabla_\Gamma^{(k)}\zeta^{(k)}\right|^2 + a^{(k)}\left|\zeta^{(k)}\right|^2\right) d\Gamma + \int\limits_{\partial\Gamma_k} æ^{(k)}\left|\zeta^{(k)}\right|^2 ds\right], \tag{18}$$

де $\nabla_\Gamma^{(k)}(\cdot)$ – поверхневий градієнт функцій, визначених на Γ_k, ds – елемент довжини контуру $\partial\Gamma$.

Кінетична енергія потенціальних рухів рідини представляється у вигляді квадратичної форми, яка сполучена з оператором C:

$$K = \frac{\rho}{2} \sum_{k \in \overline{1,N}} \left(C \frac{\partial \zeta}{\partial t}^{(k)}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}^{(k)} \right)_0 =$$

$$= \frac{\rho}{2} \left[\sum_{k \in \overline{1,N}} \int\limits_{0\Omega_k} \left| \nabla \varphi^{(k)} \right|^2 d\Omega + \sum_{(jk) \in I_\Omega} \int\limits_{S_{jk}} q_{jk} \left| \varphi^{(k)} - \varphi^{(j)} \right|^2 d\,S \right]. \quad (19)$$

Порівняно зі звичайним виразом для кінетичної енергії потенціальних коливань рідини права частина рівності (19) містить додатковий доданок; поява цього доданка пояснюється тим, що кінетична енергія визначена через усереднений потенціал швидкостей рідини.

Внаслідок рівностей (18), (19) оператори B, C будемо називати операторами потенціальної і кінетичної енергій, відповідно.

3. Власні коливання рідини. Розв'язність еволюційної задачі.

Еволюційна задача (16) в точності збігається з операторно-диференціальним формулюванням класичної задачи про малі рухи капілярної рідини в частково заповненої посудині [3, 5, 11]. При цьому зберігаються основні властивості операторів потенціальної і кінетичної єнергій. Це дозволяє перенести результати, отримані в [3, 5, 11], на розглядаємий випадок коливань рідини в посудині з перфорованими перегородками.

Власні нормальні коливання рідини описуються розв'язками однорідного рівняння (16), що залежать від часу t за законом

$$\zeta = \exp{(i\,\omega\,t)} u(\vec{x}),$$

де ω – кругова частота коливань, $u(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma$ – мода коливань вільної поверхні рідини. Рівняння (16) при $f_0 \equiv 0$ приводить до спектральної задачі

$$Bu = \lambda C u, \qquad \lambda := \omega^2 \rho / \sigma. \quad (20)$$

Оператор потенціальної енергії B – обмежений знизу оператор з дискретним дійсним спектром. У загальному випадку B має n від'ємних, n^0 нульових і рахункову множину додатних власних значень $\lambda_k(B)$. Всі власні значення оператора B пронумеруємо, як звичайно, у порядку зростання з урахуванням їх кратностей,

$$\lambda_1(B) \le \lambda_2(B) \le \ldots \le \lambda_n(B) < 0, \quad \lambda_{n+1}(B) = ... = \lambda_{n+n^0}(B) = 0,$$
$$0 < \lambda_{n+n^0+1}(B) \le \lambda_{n+n^0+2}(B) \le \lambda_{n+n^0+3}(B) \le \ldots \quad . \quad (21)$$

Скориставшись результатами [5, 11], сформулюємо загальні властивості власних значень і власних функцій задачі (20).

Теорема 1. *Нехай власні значення оператора потенціальної енергії B задовольняють умовам (21). Тоді задача (20) має дискретний спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$,* *який складається із власних значень λ_k скінченної кратності; усі власні значення дійсні, причому* $\lambda_k := \lambda_k^- < 0 \quad \forall\, k \in \overline{1,n}, \quad \lambda_{n+k} := \lambda_k^0 = 0 \quad \forall\, k \in \overline{1,n^0}, \quad \lambda_{n+n^0+k} := \lambda_k^+ > 0 \quad \forall\, k \in \overline{1,\infty},\ \lambda_k^+ \to +\infty$ при $k \to +\infty$. *Сукупність власних функцій* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} := \left\{u_k^-\right\}_{k=1}^{n} \cup \left\{u_k^0\right\}_{k=1}^{n^0} \cup \left\{u_k^+\right\}_{k=1}^{\infty}$ ($u_k^0, u_k^\pm$ – *власні функції, які відповідають власним значенням* $\lambda_k^0, \lambda_k^\pm$) *повна в* $H_0(\Gamma)$, *створює базис Рисса в цьому просторі і може бути обрана так, щоб виконувалися співвідношення:*

$$(B\,u_j, u_k)_0 = \delta_{jk}\lambda_k, \quad (C\,u_j, u_k)_0 = \delta_{jk}.$$

Спектральна задача (20) допускає варіаційне формулювання. Власні значення цієї задачі можна знайти як послідовні мінімуми співвідношення

$$\frac{(Bu,u)_0}{(Cu,u)_0} = \frac{\sum\limits_{k\in\overline{1,N}} \left[\int\limits_{\Gamma_k} \left(\left|\nabla_\Gamma^{(k)} u^{(k)}\right|^2 + a^{(k)} \left|u^{(k)}\right|^2 \right) d\Gamma + \int\limits_{\partial\Gamma_k} æ^{(k)} \left|u^{(k)}\right|^2 ds \right]}{\sum\limits_{k\in\overline{1,N_0}} \int\limits_{\Omega_k} \left|\nabla\varphi^{(k)}\right|^2 d\Omega + \sum\limits_{(jk)\in I_\Omega} \int\limits_{S_{jk}} q_{jk} \left|\varphi^{(k)} - \varphi^{(j)}\right|^2 d\,S}. \tag{22}$$

Введемо позначення:

$$\gamma_k := |\lambda_k^- \sigma/\rho|^{1/2} > 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}, \quad \omega_k^0 := 0 \quad \forall k \in \overline{1,n^0},$$

$$\omega_k^+ := (\lambda_k^+ \sigma/\rho)^{1/2} > 0 \quad \forall k \in \overline{1,\infty}.$$

У загальному випадку спектр $\{\omega_k\}$ власних частот коливань рідини містить n пар уявних "частот"$\{\pm\, i\gamma_k\}_{k=1}^{n}$, а також n^0 нульових $\left\{\omega_k^0 = 0\right\}_{k=1}^{n^0}$ і рахункову множину від'ємних і додатних частот $\pm\left\{\omega_k^+\right\}_{k=1}^{\infty}$. Точно кажучи, фізичний смисл кругової частоти коливань мають тільки величини ω_k^+. Забігаючи вперед, відзначимо також, що величини γ_k, ω_k^0 відповідають нестійкому стану рівноваги рідини, при цьому γ_k є інкременти росту збурень при втраті стійкості рівноваги.

Узагальненим розв'язком задачі Коші (16) *на відрізку часу* $[0,T]$ *будемо називати функцію* $\zeta(t)$, *неперервну по* $t \in [0,T]$ *у нормі простору* $H_0^1(\Gamma)$, *з неперервною першою похідною по* $t \in [0,T]$ *у нормі простору* $H_0^{-1/2}(\Gamma)$,

$$\zeta(t) \in C([0,T]; H_0^1(\Gamma)), \quad \zeta'(t) \in C([0,T]; H_0^{-1/2}(\Gamma)) \quad ({}' := d/dt),$$

яка задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int_0^T \big(\rho(C\zeta'(t), \eta'(t))_0 - \sigma(B\zeta(t), \eta(t))_0 + \rho(f_0(t), \eta(t))_0\big)\,dt + \rho(C\zeta_1, \eta(0))_0 = 0,$$

$$\forall\, \eta(t) \in L_2([0,T]; H_0^1(\Gamma)), \quad \eta'(t) \in L_2([0,T]; H_0^{-1/2}(\Gamma)), \quad \eta(T) = 0. \tag{23}$$

Теорема 2. *Нехай виконані умови:* $\zeta_0 \in H_0^1(\Gamma), \zeta_1 \in \mathcal{H}_0^{-1/2}(\Gamma)$, $f_0(t) \in L_2([0,T]; H_0(\Gamma))$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі Коші (16).*

Доведення теореми неважко одержати, слідуючи схемі наведеній в [5, 11].

Узагальнений розв'язок задачі (16) можна представити у вигляді:

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j^-(t)u_j^- + \sum_{j=1}^{n^0} c_j^0(t)u_j^0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^+(t)u_j^+, \tag{24}$$

$$c_j^-(t) := \alpha_j^- \mathrm{ch}\,(\gamma_j t) + \frac{\beta_j^-}{\gamma_j}\mathrm{sh}\,(\gamma_j t) + \frac{1}{\gamma_j}\int_0^t \mathrm{sh}(\gamma_j(t-\tau))f_j^-(\tau)d\tau,$$

$$c_j^0(t) := \alpha_j^0 + \beta_j^0 t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau f_j^0(s)ds,$$

$$c_j^+(t) := \alpha_j^+ \cos(\omega_j^+ t) + \frac{\beta_j^+}{\omega_j^+}\sin(\omega_j^+ t) + \frac{1}{\omega_j^+}\int_0^t \sin(\omega_j^+(t-\tau))f_j^+(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_j^\pm := (C\zeta_0, u_j^\pm)_0, \quad \beta_j^\pm := (C\zeta_1, u_j^\pm)_0, \quad f_j^\pm(t) := (f_0(t), u_j^\pm)_0,$$

$$\alpha_j^0 := (C\zeta_0, u_j^0)_0, \quad \beta_j^0 := (C\zeta_1, u_j^0)_0, \quad f_j^0(t) := (f_0(t), u_j^0)_0.$$

На закінчення даного розділу розглянемо умови стійкості рівноважного стану капілярної рідини. Будемо називати ***рівноважний стан стійким***, *якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *можна вказати* $\delta > 0$ *таке, що для будь-яких початкових збурень* ζ_0, ζ_1, *що задовольняють умовам* $\|\zeta_0\|_{H_0^1(\Gamma)} < \delta$, $\|\zeta_1\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma)} < \delta$, *виконуються нерівності:*

$$\|\zeta(t)\|_{H_0^1(\Gamma)} < \varepsilon, \quad \left\|\zeta'(t)\right\|_{H_0^{-1/2}(\Gamma)} < \varepsilon \quad \text{при}\, \forall t > 0.$$

У відсутності збурень зовнішнього поля масових сил ($f \equiv 0$) рівноважний стан капілярної рідини є стійкий, якщо найменше власне значення оператора потенціальної енергії B додатне, тобто $\lambda_1(B) > 0$, і нестійкий, якщо $\lambda_1(B) < 0$. Дійсно, якщо $\lambda_1(B) > 0$, то, звертаючись до (24), неважко переконатися в тому, що при $f \equiv 0$ рівноважний стан стійкий. Якщо $\lambda_1(B) < 0$, то з (24) легко випливає, що в цьому випадку існують як завгодно малі (по нормі простору $H_0^1(\Gamma)$) початкові збурення рівноважного стану такі, що $\|\zeta(t)\|_{H_0^1(\Gamma)} \to \infty$ при $t \to \infty$.

Спектральна ознака стійкості: $\lambda_1(B) > 0$ (або нестійкості: $\lambda_1(B) < 0$) у деяких випадках допускає достатньо ефективну перевірку. Приклади її використання можна знайти в [6], [17].

Згідно (18) у рівноважному стані рідини функціонал потенціальної енергії буде мати локально мінімальне значення, якщо оператор потенціальної енергії B є додатно визначений і отже $\lambda_1(B) > 0$. З (18) випливає також, що у випадку $\lambda_1(B) < 0$ друга варіація потенціальної енергії може приймати від'ємні значення. Таким чином, має місце наступна

Теорема 3. *У відсутності збурень зовнішнього поля масових сил* ($f \equiv 0$) *рівноважний стан капілярної рідини є стійким, якщо йому відповідає ізольований локальний мінімум потенціальної енергії* Π *(див.(17)). Якщо рівноважному стану відповідає стаціонарне значення функціонала потенціальної енергії, що не є локальним мінімумом, і при цьому друга варіація потенціальної енергії може приймати від'ємні значення, то рівноважний стан рідини є нестійким.*

Дана теорема є аналогом відомої теореми Лагранжа (і її обернення) про стійкість рівноваги консервативних систем зі скінченним числом ступенів вільності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М: Машиностроение, 1971.– 563 с.

2. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.

3. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. – М.: Наука, 1976. – 504 с.

4. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – К.: Наукова думка, 1984. – 232 с.

5. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

6. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидродинамики для условий невесомости. – К.: Наукова думка, 1992. – 592 с.

7. Лимарченко О. С., Ясинский В. В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – К.: НТТУ КПІ, 1997. – 338 с.

8. Богомаз Г.И., Сирота С.А. Колебания жидкости в баках (методы и результаты экспериментальных исследований). – Днепропетровск: Инст. технической механики НАН Украины и НКА Украины, 2002. – 306 с.

9. Богомаз Г.И. Динамика железнодорожных вагонов – цистерн. – К: Наукова думка, 2004. – 224 с.

10. Высоцкий М.С., Плескачевский Ю.М., Шимановский А.О. Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн.– Минск: Белавтотракторостроение, 2006. – 320 с.

11. Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. Приложения индефинитной метрики. – Симферополь: ДІАЙПІ, 2014. – 276 с.

12. Галицин Д. А., Троценко В. А. К расчету частот и присоединенных масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикладна гідромеханіка, 2000, № 1. – С. 20–27.

13. Троценко В. А О влиянии кольцевых перегородок на эффективность гашения волновых движений жидкости в сосуде //Доповіді НАНУ, 2005, № 6. – С. 50–56.

14. Борисов Д. И. Малые движения идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка", 2006. – № 749. – С. 86–95.

15. Борисов Д. И., Руднев Ю.И. Собственные колебания идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками // Прикладна гідромеханіка, – 2010. – № 2. – С. 8–19.

16. Газиев Э.Л., Копачевский Н.Д., Малые движения и собственные колебания гидросистемы "жидкость–баротропный газ"// Український математичний вісник, 2013. – Т.10, №1. – С.16–53.

17. Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З. Равновесие и устойчивость капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью в открытом сосуде // Нелинейные колебания, 2014. – Т.17, № 1. – С. 46–59.

18. Марченко В. А., Сузиков Г. В. Вторая краевая задача в областях со сложной границей //Матем. сборник, 1966.– Т. 69 (111), № 1. – С. 35–60.

19. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – К.: Наукова думка, 1974. – 280 с.

20. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Усредненные модели микронеоднородных сред. – К.: Наукова думка, 2005. – 550 с.

21. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 455 с.

Стаття одержана: 10.09.2014; перероблений варіант: 10.10.2014; прийнята: 15.10.2014.