Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.574 № 1133, 2014, с.56–75

Теоремы о представлении δ-субгармонических функций

А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь, И. В. Поединцева

Механико-математический факультет,
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
grishin@univer.kharkov.ua,
quynhsonla1988@gmail.com,
poedintseva@univer.kharkov.ua

В теории субгармонических и δ-субгармонических функций существенную роль играют теоремы о представлении. В статье предлагается усиление варианта Азарина теоремы о представлении δ-субгармонических функций конечного порядка.
Ключевые слова: δ-субгармоническая функция, полиномы Гегенбауэра, неванлинновская характеристическая функция.

Гришин А. П., Нгуєн Ван Куінь, Поєдинцева І. В., **Теореми про представлення δ-субгармонічних функцій.** У теорії субгармонічних і δ-субгармонічних функцій суттєву роль відіграють теореми про представлення. У статті пропонується посилення варіанту Азаріна теореми про представлення δ-субгармонічних функцій скінченного порядку.
Ключові слова: δ-субгармонічна функція, поліноми Гегенбауера, неванліннівська характеристична функція.

A.F. Grishin, Nguyen Van Quynh, I. V. Poedintseva, **Representation theorems of δ-subharmonic functions.** Representation theorems are important in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. In the article we sharpen Azarin's variant of representation theorem of δ-subharmonic functions of finite order.
Keywords: δ-subharmonic function, Gegenbauer's polynomials, Nevanlinna's characteristic function.

2000 Mathematics Subject Classification: **31A05, 31B05.**

1. Вступление.

Кроме вступления в статье выделены разделы 2–5. В разделах 2–4 помещены известные или по существу известные результаты, причём приводятся такие формулировки, которые используются в дальнейшем.

© Гришин А. Ф., Нгуен Ван Куинь, Поединцева И. В., 2014

В разделе 2 обсуждаются определения субгармонической и δ-субгармонической функций и приводятся некоторые их свойства.

В разделе 3 приводится определение многочленов Гегенбауэра и изучается разложение в ряд Тейлора с центром в нуле функции $\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$, рассматриваемой как функция переменной x.

В разделе 4 для δ-субгармонических функций w из специального класса определяется невалинновская характеристическая функция $T(r, \mathrm{w})$ и обсуждаются некоторые её свойства.

В разделе 5, основном разделе статьи, приводятся четыре теоремы о представлении для δ-субгармонических функций во всём пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Теории субгармонических и δ-субгармонических функций в плоскости и в пространствах $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ различаются. Поэтому теоремы о представлении для случаев $m = 2$ и $m \geq 3$ доказываются отдельно.

В книге Азарина ([1], теорема 2.9.3.1) доказывается теорема о представлении δ-субгармонических функций конечного порядка в пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. В книге Хеймана и Кеннеди ([2], теорема 4.2) доказывается аналогичная теорема для субгармонических функций. Предлагаемые доказательства позволяют несколько усилить результаты из [1] и [2]. Об этом подробнее будет сказано в разделе 5.

2. Субгармонические и δ-субгармонические функции.

Пусть G – область в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Обозначим через $\Phi(G)$ линейное пространство непрерывных финитных в G функций φ, то есть таких функций, что *supp* φ — это компакт, лежащий в G. В пространстве $\Phi(G)$ сходимость определяется следующим образом. Последовательность функций $\varphi_n(x)$ сходится к функции $\varphi(x)$ в пространстве $\Phi(G)$, если существует такой компакт $K \subset G$, что для любого n выполняется соотношение *supp* $\varphi_n \subset K$ и последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$.

Обычно ([3], глава 3, §1, пункт 3 или [4], глава 4) пространство $\mathcal{M}(G)$ радоновых мер в области G определяется как пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве $\Phi(G)$.

Пусть μ_1 и μ_2 – положительные локально конечные борелевские меры в области G. Тогда линейный функционал

$$(\mu, \varphi) = \int\limits_G \varphi(x) d\mu_1(x) - \int\limits_G \varphi(x) d\mu_2(x)$$

непрерывен в пространстве $\Phi(G)$. Мы будем говорить, что функционал μ представляется в виде разности положительных борелевских мер μ_1 и μ_2 и писать $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Известно, что произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве $\Phi(G)$ представляется в таком виде. Представление $\mu = \mu_1 - \mu_2$ не единственно. Например, $\mu = (\mu_1 + \mu_3) - (\mu_2 + \mu_3)$. Однако

([4], теорема 4.3.2), существует единственное представление $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 – положительные локально конечные взаимно сингулярные борелевские меры. Если $\mu = \mu_1 - \mu_2$ – такое представление, то мера μ_1 называется положительной частью радоновой меры μ и обозначается μ_+, мера μ_2 называется отрицательной частью радоновой меры μ и обозначается μ_-. Мера $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ называется модулем меры μ.

При использовании радоновых мер μ часто удобно считать μ функцией множеств : $\mu(E) = \mu_+(E) - \mu_-(E)$. Конечно, эта функция множеств не обязана быть борелевской мерой. Она не определена на борелевских множествах E, которые удовлетворяют условию $\mu_+(E) = \mu_-(E) = \infty$. Однако функция множеств μ обладает свойством счётной аддитивности на классе борелевских множеств, компактно вложенных в G. Это позволяет корректно определить $\int\limits_G \varphi(x)d\mu(x)$ для функций φ из класса $\Phi(G)$ и тогда имеем

$$(\mu, \varphi) = \int\limits_G \varphi(x)d\mu(x).$$

Мы будем использовать такие обозначения

$$\begin{aligned} B(x_0, R) &= \{x \in \mathbb{R}^m : \ \|x - x_0\| \le R\}, \ m \ge 2; \\ C(x_0, R) &= \{x \in \mathbb{R}^m : \ \|x - x_0\| < R\}, \ m \ge 2; \\ S(x_0, R) &= \{x \in \mathbb{R}^m : \ \|x - x_0\| = R\}, \ m \ge 2. \end{aligned}$$

В случае $m = 2$ точки x из $\mathbb{R}^2$ мы иногда будем отождествлять с комплексными числами z, а само $\mathbb{R}^2$ будет отождествляться с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Поэтому также будут использоваться обозначения

$$\begin{aligned} B(z_0, R) &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \le R\}; \\ C(z_0, R) &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}; \\ S(z_0, R) &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = R\}. \end{aligned}$$

Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m, \ m \ge 2$. Известно, что функция $v(x)$ локально интегрируема в области G и что если сфера $S(x_0, R)$ лежит в области G, то функция $v(x)$ интегрируема по этой сфере.

Так как функция $v(x)$ локально интегрируема по области G, то её можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{D}'(G)$. Поэтому мы можем рассмотреть обобщённую функцию

$$\frac{1}{2\pi} \bigtriangleup v, \ m = 2, \ \frac{1}{(m-2)\sigma_{m-1}} \bigtriangleup v, \ m \ge 3,$$

где $\bigtriangleup$ – оператор Лапласа, σ_{m-1} – площадь сферы $S(0, 1)$.

Известно, что эта обобщённая функция представляется положительной локально конечной борелевской мерой μ в области G. Мера μ называется риссовской мерой субгармонической функции v.

В качестве источника по теории субгармонических функций можно использовать книгу [2]. В качестве источника по теории обобщённых функций можно использовать книгу [5]. Нам будут нужны следующие теоремы о представлении для субгармонических функций ([2], раздел 3.7).

Теорема 1. *Пусть $v(z)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{C}$, которая содержит круг $B(0,R)$. Пусть μ – риссовская мера функции v. Тогда при $|z| < R$ выполняется равенство*

$$\begin{aligned} v(z) =& \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rrcos(\varphi - \theta) + r^2} v(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &+ \int\limits_{B(0,R)} \ln \left| \frac{R(z-\zeta)}{R^2 - z\bar{\zeta}} \right| d\mu(\zeta). \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, которая содержит шар $B(0,R)$. Пусть μ – риссовская мера функции v. Тогда при $\|x\| < R$ выполняется равенство*

$$\begin{aligned} v(x) =& \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int\limits_{S(0,R)} \frac{R^2 - \|x\|^2}{R\|x-y\|^m} v(y) d\sigma_{m-1}(y) \\ &- \int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} - \frac{1}{\left(\frac{\|y\|}{R} \left\| x - y\frac{R^2}{\|y\|^2} \right\| \right)^{m-2}} \right) d\mu(y), \end{aligned} \tag{2}$$

где $d\sigma_{m-1}(y)$ – $(m-1)$-мерная мера Хаусдорфа на сфере $S(0,R)$.

Важны также частные случаи формул (1), (2), когда в качестве точки x (z) берётся точка 0.

$$v(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v(Re^{i\varphi}) d\varphi - \int\limits_0^R \frac{\mu(t)}{t} dt, \ m = 2, \tag{3}$$

$$v(0) = \frac{1}{\sigma_{m-1} R^{m-1}} \int\limits_{S(0,R)} v(y) d\sigma_{m-1}(y) - (m-2) \int\limits_0^R \frac{\mu(t)}{t^{m-1}} dt, \ m \geq 3. \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) $\mu(t) = \mu(B(0,t))$.

Удобно иметь аналоги формул (1), (2), когда центр шара (круга) произволен.

Теорема 3. *Пусть $v(z)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{C}$, содержащей круг $B(z_0, R)$. Пусть μ – риссовская мера функции $v(z)$. Тогда в круге $C(z_0, R)$ справедливо представление*

$$\begin{aligned} v(z) =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} v(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &+ \int_{B(z_0,R)} \ln \left| \frac{R(z-\zeta)}{R^2 - (z - z_0)(\overline{\zeta - z_0})} \right| d\mu(\zeta),\ z = z_0 + re^{i\theta}. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 4. *Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, содержащей шар $B(x_0, R)$. Пусть μ – риссовская мера функции $v(x)$. Тогда в шаре $C(x_0, R)$ справедливо представление*

$$v(x) = \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_{S(0,R)} \frac{R^2 - \|x - x_0\|^2}{R\|x - x_0 - y\|^m} v(x_0 + y) d\sigma_{m-1}(y)$$

$$- \int_{B(x_0,R)} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} - \frac{1}{\left(\frac{\|y - x_0\|}{R} \left\| x - x_0 - (y - x_0) \frac{R^2}{\|y-x_0\|^2} \right\| \right)^{m-2}} \right) d\mu(y). \tag{6}$$

Напишем ещё аналоги равенств (3) и (4):

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi - \int_0^R \frac{\mu(B(z_0, t))}{t} dt,\ m = 2; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} v(x_0) =& \frac{1}{\sigma_{m-1} R^{m-1}} \int_{S(0,R)} v(x_0 + y) d\sigma_{m-1}(y) \\ &- (m-2) \int_0^R \frac{\mu(B(x_0, t))}{t^{m-1}},\ m \geq 3. \end{aligned} \tag{8}$$

Лёгким следствием равенств (7) и (8) является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ и пусть μ – её риссовская мера. Тогда множество $E_{-\infty}(v)$ тех*

$x \in G$, где функция v обращается в $-\infty$, совпадает с множеством тех x, для которых при любом $\delta > 0$ расходится интеграл

$$\int_0^\delta \frac{\mu(B(x,t))}{t^{m-1}}dt. \tag{9}$$

Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m,\ m \geq 2$. Известно (это следует, например, из теоремы 5.32 из [2]), что множество $E_{-\infty}(v)$ является множеством типа G_δ и имеет ёмкость ноль.

Функция w в области $G \subset \mathbb{R}^m$ называется δ-субгармонической, если выполняются следующие три условия.

1. Существует множество F ёмкости ноль такое, что на множестве $G \setminus F$ справедливо представление

$$\mathrm{w}(x) = v_1(x) - v_2(x),$$

где $v_1(x)$ и $v_2(x)$ – субгармонические функции в области G.

С помощью этого представления определяется риссовская мера μ функции w по формуле $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 – риссовские меры функций v_1 и v_2.

Определяющее множество H функции w – это множество таких точек $x \in G$, для которых найдётся $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\int_0^\delta \frac{|\mu|(B(x,t))}{t^{m-1}}dt < \infty.$$

2. Для любой точки $x \in H$ выполняется равенство

$$\mathrm{w}(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\sigma_{m-1}\delta^{m-1}} \int_{S(0,\delta)} \mathrm{w}(x+y)d\sigma_{m-1}(y), \tag{10}$$

где σ_{m-1} – площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^m,\ d\sigma_{m-1}$ – это мера Лебега на сфере.

3. $\mathrm{w}(x) = 0$ для $x \in G \setminus H$.

Теорема 6. *Пусть $\mathrm{w}(x)$– δ-субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m,\ m \geq 2$. Тогда в области G существуют субгармонические функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ с взаимно сингулярными риссовскими мерами такие, что функции $\mathrm{w}(x)$ и $v_1(x) - v_2(x)$ совпадают квазивсюду в G.*

Доказательство. Пусть μ – риссовская мера функции w. Имеем $\mu = \mu_+ - \mu_-$. В области G существует субгармоническая функция v_3 с риссовской мерой μ_+ и существует субгармоническая функция v_4 с риссовской мерой μ_-. Обозначим $\mathrm{w}_1(x) = v_3(x) - v_4(x)$. Для локально интегрируемой в G функции $\mathrm{w}_2(x) = \mathrm{w}(x) - \mathrm{w}_1(x)$ выполняется равенство $\triangle\ \mathrm{w}_2 = 0$. Поэтому функция w_2 является гармонической. Имеем $\mathrm{w}(x) = \mathrm{w}_1(x) + \mathrm{w}_2(x)$. В качестве $v_1(x)$ можно взять функцию $v_3(x)+\mathrm{w}_2(x)$, а в качестве $v_2(x)$ – функцию $v_4(x)$. Теорема доказана.

В заключение раздела заметим, что теоремы 4 – 7 справедливы для δ-субгармонических функций. Равенства (3), (4), (7), (8) также справедливы для δ-субгармонических функций.

3. Многочлены Гегенбауэра.

Функция $f(z) = (1 - 2zt + z^2)^{-\beta}$ голоморфна в некоторой окрестности точки $z = 0$ и поэтому разлагается в степенной ряд с центром в нуле и положительным радиусом сходимости:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\beta}(t) z^n. \tag{11}$$

Известно, что функция $C_n^{\beta}(t)$ является многочленом степени n. Многочлены $C_n^{\beta}(t)$ называются многочленами Гегенбауэра. Изложение свойств многочленов Гегенбауэра можно найти в следующих источниках: ([6], раздел 3.15.1, [7], раздел 10.9, [8], раздел 4.7).

Обозначим $h_m(x,y) = \frac{1}{\|x-y\|^{m-2}}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$. Как функция переменной x она является гармонической в области $\mathbb{R}^m \setminus \{y\}$.

Теорема 7. *Функция $h_m(x,y)$ как функция переменной x при $y \neq 0$ разлагается в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$. Если это разложение записать в виде*

$$h_m(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,y), \tag{12}$$

где $a_n(x,y)$ – однородный полином степени n переменной $x = (x_1, ..., x_m)$, то выполняются следующие условия:

1) *$a_n(x,y)$ – гармонический полином,*
2) *выполняется равенство*

$$a_n(x,y) = C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma) \frac{\|x\|^n}{\|y\|^{m+n-2}},\ \cos\gamma = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|},$$

3) *ряд (12) абсолютно сходится при $\|x\| < \|y\|$,*
4) *выполняется оценка*

$$|K_p(x,y)| \leq \frac{1}{\|y\|^{m-2}} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(m-2)n!} \left(\frac{\|x\|}{\|y\|}\right)^n,$$

где $K_p(x,y) = -\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} + \sum\limits_{k=0}^{p} a_p(x,y)$.

Доказательство. Так как функция $h_m(x, y)$ гармонична по переменной x в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^m$, то разложение 12 имеет место в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{C}^m$. Поэтому для всех достаточно малых $z \in \mathbb{C}$ выполняются равенства

$$h_m(zx, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, y) z^n, \tag{13}$$

$$\frac{d^k}{dz^k} h_m(zx, y) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1) a_n(x, y) z^{n-k}. \tag{14}$$

Пусть $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$. Так как функция $h_m(zx, y)$ голоморфна по переменным $z, x_1, ..., x_m$ и гармонична по x, то выполняются равенства

$$\triangle \frac{d^k}{dz^k} h_m(zx, y) = \frac{d^k}{dz^k} \triangle h_m(zx, y) = 0.$$

Если в этом равенстве положить $z = 0$, то получим равенство $\triangle \ a_k(x, y) = 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Считая число z и вектор x вещественными, получим

$$\begin{aligned} h_m(zx, y) &= \frac{1}{(z^2\|x\|^2 - 2z(x, y) + \|y\|^2)^{\frac{m-2}{2}}} \\ &= \frac{1}{\|y\|^{m-2}} \left(1 - 2z \frac{\|x\|}{\|y\|} \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|} + \left(z \frac{\|x\|}{\|y\|} \right)^2 \right)^{-\frac{m-2}{2}}. \end{aligned}$$

Обозначим $t = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$. Теперь из равенства (11) следует, что

$$h_m(zx, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{m-2}{2}}(t) \frac{\|x\|^n}{\|y\|^{m+n-2}} z^n. \tag{15}$$

Теперь, сравнивая (13) и (15), мы видим, что суммы степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, y) z^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{m-2}{2}}(t) \frac{\|x\|^n}{\|y\|^{m+n-2}} z^n$$

совпадают при малых вещественных z. Из этого следует условие 2) теоремы.

Из формулы (13), пункт 3.15 из [6] следует, что многочлен $C_n^{\frac{m-2}{2}}(t)$ на сегменте $[-1, 1]$ максимальное по модулю значение принимает в точке 1. Формула (3) пункт 10.9 из [7] даёт

$$C_n^{\frac{m-2}{2}}(1) = \frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(m-2)n!}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$|a_n(x,y)| \le \frac{\Gamma(m+n-2)}{\Gamma(m-2)n!}\frac{\|x\|^n}{\|y\|^{m+n-2}}.$$

Из него следуют утверждения 3) и 4) теоремы. Теорема доказана.

4. Характеристические функции Неванлинны.

При изучении субгармонических и δ-субгармонических функций в пространстве $\mathbb{R}^m$ используются неванлинновские характеристические функции. Такие функции мы определим для специального класса $\delta S^{(0)}$ δ-субгармонических функций. Этот класс состоит из δ-субгармонических функций $\mathrm{w}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ таких, что ноль входит в определяющее множество функции w и выполняется равенство $\mathrm{w}(0)=0$.

Пусть вначале $m=2$. Неванлинновские функции приближения определяются так

$$m(r,\infty,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}_+(re^{i\varphi})d\varphi,$$

$$m(r,0,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}_-(re^{i\varphi})d\varphi.$$

Неванлинновские считающие функции определяются так

$$N(r,\infty,\mathrm{w}) = \int\limits_0^r \frac{\mu_-(t)}{t}dt,$$

$$N(r,0,\mathrm{w}) = \int\limits_0^r \frac{\mu_+(t)}{t}dt.$$

Функция $T(r,\mathrm{w}) = m(r,\infty,\mathrm{w}) + N(r,\infty,\mathrm{w})$ называется неванлинновской характеристикой δ-субгармонической функции w.

Формулу (3) для функции можно переписать в виде

$$T(r,\mathrm{w}) = m(r,0,\mathrm{w}) + N(r,0,\mathrm{w}) \text{ или } T(r,\mathrm{w}) = T(r,-\mathrm{w}).$$

Важно, что мы рассматриваем не произвольные δ-субгармонические функции в плоскости, а функции из класса $\delta S^{(0)}$.

Рассмотрим случай $m \ge 3$. Неванлинновские функции приближения определяются так

$$m(r,\infty,\mathrm{w})=\frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)}\mathrm{w}_+(y)d\sigma_{m-1}(y),$$

$$m(r,0,\mathrm{w})=\frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)}\mathrm{w}_-(y)d\sigma_{m-1}(y).$$

Нванлинновские считающие функции определяются так

$$N(r,\infty,\mathrm{w})=(m-2)\int\limits_0^r\frac{\mu_-(t)}{t^{m-1}}dt,$$

$$N(r,0,\mathrm{w})=(m-2)\int\limits_0^r\frac{\mu_+(t)}{t^{m-1}}dt.$$

Функция $T(r,\mathrm{w})=m(r,\infty,\mathrm{w})+N(r,\infty,\mathrm{w})$ называется неванлинновской характеристикой δ-субгармонической функции w.

Формулу (4) для функции w можно переписать в виде

$$T(r,\mathrm{w})=m(r,0,\mathrm{w})+N(r,0,\mathrm{w})\text{ или }T(r,\mathrm{w})=T(r,-\mathrm{w}).$$

Пусть w_1 и w_2 – δ-субгармонические функции из класса $\delta S^{(0)}$ и μ_1, μ_2 – их риссовские меры. Тогда риссовской мерой функции $\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2$ будет $\mu_1+\mu_2$. Имеем $\mu_1=(\mu_1)_+-(\mu_1)_-$, $\mu_2=(\mu_2)_+-(\mu_2)_-$, $\mu_1+\mu_2= =((\mu_1)_++(\mu_2)_+)-((\mu_1)_-+(\mu_2)_-)$. Отсюда следуют неравенства $(\mu_1+\mu_2)_-\leq \leq(\mu_1)_-+(\mu_2)_-$, $N(r,\infty,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2)\leq N(r,\infty,\mathrm{w}_1)+N(r,\infty,\mathrm{w}_2)$. Кроме того выполняется неравенство $m(r,\infty,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2)\leq m(r,\infty,\mathrm{w}_1)+m(r,\infty,\mathrm{w}_2)$. Мы получаем неравенство

$$T(r,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2)\leq T(r,\mathrm{w}_1)+T(r,\mathrm{w}_2).$$

Теорема 8. *Пусть* $\mathrm{w}(x)$ *—* δ*-субгармоническая функция в пространстве* $\mathbb{R}^m$, $m\geq 2$ *из класса* $\delta S^{(0)}$. *Пусть квазивсюду* $\mathrm{w}(x)=\upsilon_1(x)-\upsilon_2(x)$, *где* $\upsilon_1(x)$ *и* $\upsilon_2(x)$ *– субгармонические функции в пространстве* $\mathbb{R}^m$ *с взаимно сингулярными риссовскими мерами, причём* $\upsilon_1(0)=\upsilon_2(0)=0$. *Тогда выполняется равенство*

$$T(r,\mathrm{w})=\frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}}\int\limits_{S(0,r)}\max(\upsilon_1(x),\upsilon_2(x))d\sigma_{m-1}(x).$$

Доказательство. Квазивсюду выполняется равенство

$$\mathrm{w}_+(x)=\max(\upsilon_1(x),\upsilon_2(x))-\upsilon_2(x).$$

Из него следует равенство

$$m(r,\infty,\mathrm{w}) = \frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \max(\upsilon_1(x),\upsilon_2(x))d\sigma_{m-1}(x) - \frac{1}{\sigma_{m-1}r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \upsilon_2(x)d\sigma_{m-1}(x).$$

Из равенства (4) для функции $\upsilon_2(x)$ следует, что последний интеграл равен $N(r,\infty,\mathrm{w})$. Тем самым теорема доказана.

Замечание. В случае $m=2$ формулу для $T(r,\mathrm{w})$ можно записать в виде

$$T(r,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(\upsilon_1(re^{i\varphi}),\upsilon_2(re^{i\varphi}))d\varphi.$$

Заметим, что из теоремы 8 и равенств (3), (4) следует, что $T(r,\mathrm{w})$ является возрастающей функцией.

Величина

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln T(r,\mathrm{w})}{\ln r}$$

называется порядком функции $T(r,\mathrm{w})$, а также порядком δ-субгармонической функции из класса $\delta S^{(0)}$.

Если w – произвольная δ-субгармоническая функция в $\mathbb{R}^m$ с риссовской мерой μ, то образуем функции

$$\mathrm{w}_1(z) = \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta|d\mu(\zeta)+c,\ \ \mathrm{w}_2(z)=\mathrm{w}(z)-\mathrm{w}_1(z),\ \ m=2,$$

$$\mathrm{w}_1(x) = -\int\limits_{B(0,1)} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^{m-2}}+c,\ \ \mathrm{w}_2(x)=\mathrm{w}(x)-\mathrm{w}_1(x),\ \ m\geq 3,$$

где число c выбирается из условия $\mathrm{w}_2(0)=0$. Функция w_2 принадлежит классу $\delta S^{(0)}$. Порядком функции w называется порядок функции w_2.

Условием $\rho<\infty$ выделяется важный класс δ-субгармонических функций конечного порядка.

5. Теоремы о представлении δ-субгармонических функций.

Нам будет нужна следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть*

$$b(r,x) = \sum_{|\alpha|\leq n} c_\alpha(r)x^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ *– мультииндекс порядка* m*. Пусть существует поточечный предел* $\lim\limits_{r\to\infty} b(r,x)$*. Тогда для любого мультииндекса* α *существует предел*

$$c_\alpha = \lim_{r\to\infty} c_\alpha(r)$$

и выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty} b(r,x) = \sum_{|\alpha|\le n} c_\alpha x^\alpha.$$

Доказательство. Мы будем применять операторы взятия разности с шагом 1: $\triangle\, f(t) = f(t+1) - f(t)$. Через $\triangle\,(\alpha) = \triangle\,(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ мы будем обозначать такой оператор, что по переменной x_k он применяется α_k раз, $k \in \overline{1,m}$. Имеем

$$\triangle\,(\alpha)x^\alpha = \alpha!.$$

Во множестве мультииндексов α введём лексикографическое упорядочение: $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \ge (\beta_1, ..., \beta_m)$ если $(\alpha_1, ..., \alpha_m) = (\beta_1, ..., \beta_m)$ или, если k наименьшее число такое, что $\alpha_k \ne \beta_k$, то $\alpha_k > \beta_k$. Если $\beta < \alpha$, то $\triangle\,(\alpha)x^\beta = 0$.

Пусть $\alpha^{(1)}$ – наибольший мультииндекс такой, что $c_{\alpha^{(1)}}(r) \ne 0$. Тогда справедливо равенство

$$\alpha^{(1)}! c_{\alpha^{(1)}}(r) = \triangle\,(\alpha^{(1)}) b(x,r).$$

Из условия теоремы следует, что существует предел на бесконечности у функции $\triangle\,(\alpha^{(1)}) b(x,r)$, а значит и у функции $c_{\alpha^{(1)}}(r)$.

Дальше наше рассуждение нужно повторить для функции $b(x,r) - c_{\alpha^{(1)}}(r) x^{\alpha^{(1)}}$. Через конечное число шагов мы получим утверждение леммы.

Теорема 9. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ *–* δ*-субгармоническая функция порядка* ρ *в плоскости* $\mathbb{C}$ *из класса* $\delta S^{(0)}$*,* $p = [\rho]$*. Пусть* μ *– риссовская мера функции* w*, для которой сходятся интегралы* $\int\limits_{B(0,1)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}$*,* $k = \overline{1,p}$*. Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(z) = \int \mathrm{Re}\left(\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + ... + \frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right) d\mu(\zeta) + \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Re}\ c_n z^n, \tag{16}$$

причём имеют место формулы

$$c_n = \lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi + \frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} - \frac{1}{\zeta^n}\right) d\mu(\zeta)\right). \tag{17}$$

Замечание. Символ $[\rho]$ обозначает целую часть ρ. Если у интеграла не указана область интегрирования, то таковой является всё пространство. Существование предела (17) не является тривиальным фактом. Его существование – одно из утверждений теоремы. Мы даём не только новое доказательство известной теоремы о представлении, но и несколько усиливаем её, давая формулы для коэффициентов c_n.

Функция $\mathrm{w}(z)$, будучи гармонической функцией в круге $C(0,1)$, представляется в этом круге рядом

$$\mathrm{w}(z) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Равенство (17) даёт формулы для коэффициентов c_n для $n \in \overline{1,p}$. Для $n > p$ справедлива формула, которая следует из формулы (16)

$$c_n = \frac{1}{n}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^n}.$$

Доказательство. Перепишем формулу (1) для функции $\mathrm{w}(z)$ в виде

$$\begin{aligned}\mathrm{w}(z) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\upsilon(Re^{i\varphi})d\varphi + \int_{B(0,R)} \mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)d\mu(\zeta)\\ &+\int_{B(0,R)} \ln\frac{|\zeta|}{R}d\mu(\zeta) - \int_{B(0,R)} \mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z\overline{\zeta}}{R^2}\right)d\mu(\zeta).\end{aligned} \tag{18}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z} &= \mathrm{Re}\frac{1+\frac{z}{Re^{i\varphi}}}{1-\frac{z}{Re^{i\varphi}}} = 1 + 2\mathrm{Re}\frac{z}{Re^{i\varphi}}\frac{1}{1-\frac{z}{Re^{i\varphi}}}\\ &= 1 + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}\frac{z^n}{R^n e^{in\varphi}} + 2\mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n}{R^n e^{in\varphi}},\end{aligned}$$

$$-\mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z\overline{\zeta}}{R^2}\right) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} + \mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}$$

Далее формулу (18) перепишем в виде

$$\mathrm{w}(z) = \int \mathrm{Re}\left(\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+...+\frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right)d\mu(\zeta) + b(R,z) + a(R,z), \tag{19}$$

где

$$b(R,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi+\int\limits_{B(0,R)}\ln\frac{|\zeta|}{R}d\mu(\zeta)$$

$$+\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}z^n\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}-\frac{1}{\zeta^n}\right)d\mu(\zeta)\right),$$

$$a(R,z)=-\int\limits_{CB(0,R)}\mathrm{Re}\left(\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+...+\frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right)d\mu(\zeta)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n}{R^ne^{in\varphi}}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi+\mathrm{Re}\int\limits_{B(0,R)}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{nR^{2n}}d\mu(\zeta).$$

В написанной формуле символ $CB(0,R)$ обозначает дополнение к кругу $B(0,R)$.

Так как функция $\mathrm{w}(z)$ имеет порядок ρ, то для любого ε существует постоянная M_ε такая, что выполняются неравенства

$$|\mu|(B(0,R))<M_\varepsilon R^{\rho+\varepsilon},\ R>0,$$
$$\int|\mathrm{w}(Re^{i\varphi})|d\varphi<M_\varepsilon R^{\rho+\varepsilon},\ R>1.$$

Из этих неравенств легко следует, что для любого z выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}a(R,z)=0.$$

Теперь из равенства (19) следует, что для любого z существует предел

$$\lim_{R\to\infty}b(R,z).$$

Если $z=x+iy$, то функция $b(R,z)$ как функция переменных x и y является многочленом степени p. Теперь из леммы 1 следует, что функции

$$c_n(R)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}-\frac{1}{\zeta^n}\right)d\mu(\zeta)\right),\ n\in\overline{1,p}$$

имеют предел при $R\to\infty$.

Заметим, что из формулы (3) для функции $\mathrm{w}(z)$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi+\int\limits_{B(0,R)}\ln\frac{|\zeta|}{R}d\mu(\zeta)=0.$$

Переходя в равенстве (19) к пределу при $R \to \infty$, получим утверждения теоремы. Теорема доказана.

В теореме 9 предполагается, что функция $\mathrm{w}(z)$ принадлежит классу $\delta S^{(0)}$. Сформулируем теорему для общего случая.

Теорема 10. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ *–* δ*-субгармоническая функция порядка* ρ *в плоскости* $\mathbb{C}$, μ *– её риссовская мера,* $p = [\rho]$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(z) = \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta| d\mu(\zeta)$$

$$+ \int\limits_{CB(0,1)} \mathrm{Re}\left(\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + ... + \frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right) d\mu(\zeta) + \sum_{n=0}^{p} \mathrm{Re} c_n z^n.$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathrm{w}_1(z) = \mathrm{w}(z) - \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta| d\mu(\zeta) - c,$$

причём постоянную c выбираем из условия $\mathrm{w}_1(0) = 0$. Функция $\mathrm{w}_1 \in \delta S^{(0)}$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 9.

Замечание. В общем случае существуют аналоги соотношений (17) при $n \in \overline{1,p}$

$$c_n = \lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi + \frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)\setminus B(0,1)} \left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} - \frac{1}{\zeta^n}\right) d\mu(\zeta)\right).$$

Теорема 11. *Пусть* $\mathrm{w}(x)$ *–* δ*-субгармоническая функция в пространстве* $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ *из класса* $\delta S^{(0)}$ *и пусть* μ *– её риссовская мера, для которой сходятся интегралы* $\int\limits_{B(0,1)} a_k(x,y)d\mu(y)$, $k = \overline{1,p}$. *Пусть функция* w *имеет порядок* ρ *и* $p = [\rho]$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(x) = \int K_p(x,y)d\mu(y) + \sum_{n=1}^{p} A_n(x),$$

где $A_n(x)$ *– однородный гармонический полином степени* n, *причём выполняются равенства*

$$\begin{aligned}A_1(x) = \lim_{R\to\infty}\Big(\frac{m}{R^{m+1}} &\int\limits_{S(0,R)} (x,y)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y) \\ &- (m-2)\int\limits_{B(0,R)} (x,y)\left(\frac{1}{\|y\|^m} - \frac{1}{R^m}\right)d\mu(y)\Big),\end{aligned} \tag{20}$$

$$A_n(x) = \lim_{R\to\infty}\Big(\frac{\|x\|^n}{R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma) - C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)\,\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$
$$-\|x\|^n\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m-2+n}} - \frac{\|y\|^n}{R^{m-2+2n}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Big), n\geq 2. \tag{21}$$

Написанные пределы являются равномерными на любом компакте.

Доказательство. Для функции $\mathrm{w}(x)$ справедливо равенство (2). Имеем при $\|y\| = R,\ \|x\| < R$

$$\frac{R^2-\|x\|^2}{R\|x-y\|^m} = \frac{R^2-\|x\|^2}{R}\frac{1}{(\|x\|^2-2(x,y)+\|y\|^2)^{\frac{m}{2}}}$$
$$= \frac{R^2-\|x\|^2}{R^{m+1}}\left(1-2\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\frac{\|x\|}{R}+\left(\frac{\|x\|}{R}\right)^2\right)^{-\frac{m}{2}} = \frac{R^2-\|x\|^2}{R^{m+1}}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n}$$
$$= \frac{1}{R^{m-1}}\sum_{n=0}^{p}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n} - \frac{\|x\|^n}{R^{m+1}}\sum_{n=0}^{p-2}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n} \tag{22}$$
$$+\left(-\frac{\|x\|^2}{R^{m+1}}\sum_{n=p-1}^{\infty}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n} + \frac{1}{R^{m-1}}\sum_{n=p+1}^{\infty}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n}\right).$$

При $\|x\| < R,\ \|y\| \leq R$ выполняется равенство

$$\frac{1}{\left(\frac{\|y\|}{R}\left\|x-y\frac{R^2}{\|y\|^2}\right\|\right)^{m-2}} = \frac{R^{m-2}}{\|y\|^{m-2}\left(\|x\|^2-2(x,y)\frac{R^2}{\|y\|^2}+\frac{R^4}{\|y\|^2}\right)^{\frac{m-2}{2}}}$$
$$= \frac{1}{R^{m-2}}\left(1-2\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\frac{\|x\|\|y\|}{R^2}+\left(\frac{\|x\|\|y\|}{R^2}\right)^2\right)^{-\frac{m-2}{2}} \tag{23}$$
$$= \frac{1}{R^{m-2}}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n\|y\|^n}{R^{2n}}$$
$$= \frac{1}{R^{m-2}}\sum_{n=0}^{p}C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n\|y\|^n}{R^{2n}} + \frac{1}{R^{m-2}}\sum_{n=p+1}^{\infty}C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n\|y\|^n}{R^{2n}}.$$

Из равенств (2), (21), (22) следует, что

$$\mathrm{w}(x) = \int K_p(x,y)d\mu(y) + b(R,x) + a(R,x), \tag{24}$$

где

$$b(R,x)=\frac{1}{\sigma_{m-1}R^{m-1}}\int\limits_{S(0,R)}\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m-2}}-\frac{1}{R^{m-2}}\right)d\mu(y)+\frac{\|x\|}{\sigma_{m-1}R^{m}}\int\limits_{S(0,R)}C_1^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$+\frac{\|x\|}{R^m}\int\limits_{B(0,R)}C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\|y\|d\mu(y)-\|x\|\int\limits_{B(0,R)}C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{1}{\|y\|^{m-1}}d\mu(y)$$

$$+\sum_{n=2}^{p}\Big(\frac{\|x\|^n}{\sigma_{m-1}R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\left(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)-C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\right)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\|x\|^n\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m+n-2}}-\frac{\|y\|^n}{R^{m+2n-2}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Big).$$

Функция $a(R,x)$ задаётся равенством

$$a(R,x)=-\int\limits_{CB(0,R)}K_p(x,y)d\mu(y)$$

$$-\frac{\|x\|^2}{\sigma_{m-1}R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}\sum_{n=p-1}^{\infty}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n}\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$+\frac{1}{\sigma_{m-1}}\frac{R^2-\|x\|^2}{R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}\sum_{n=p+1}^{\infty}C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n}{R^n}\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$+\frac{1}{R^{m-2}}\int\limits_{B(0,R)}\sum_{n=p+1}^{\infty}C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{\|x\|^n\|y\|^n}{R^{2n}}d\mu(y).$$

Из сходимости интеграла $\int K_\rho(x,y)d\mu(y)$, неравенств $|C_n^{\beta}(\cos\gamma)|\le\le\frac{\Gamma(n+2\beta)}{\Gamma(2\beta)n!}$, $\int\limits_{S(0,R)}|\mathrm{w}(y)|d\sigma_{m-1}(y)\le 2T(R,\mathrm{w})R^{m-1}$, $|\mu|(B(0,t))\le MT(2t,\mathrm{w})$ и того, что ρ – порядок функции w, легко следует, что для любого $x\in\mathbb{R}^m$ выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}a(R,x)=0. \tag{25}$$

Из равенства (4) для функции w следует, что

$$\frac{1}{\sigma_{m-1}R^{m-1}}\int\limits_{S(0,R)}\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)-\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m-2}}-\frac{1}{R^{2m-2}}\right)d\mu(y)=0.$$

Из равенства $C_1^{\beta}(\cos\gamma)=2\beta\cos\gamma=2\beta\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ следует, что

$$\frac{\|x\|}{\sigma_{m-1}R^m}\int\limits_{S(0,R)} C_1^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)+\frac{\|x\|}{R^m}\int\limits_{B(0,R)} C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\|y\|d\mu(y)$$

$$-\|x\|\int\limits_{B(0,R)} C_1^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)\frac{1}{\|y\|^{m-1}}d\mu(y)=\frac{m}{\sigma_{m-1}R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}(x,y)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-(m-2)\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^m}-\frac{1}{R^m}\right)(x,y)d\mu(y).$$

Поэтому

$$b(R,x)=\frac{m}{\sigma_{m-1}R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}(x,y)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-(m-2)\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^m}-\frac{1}{R^m}\right)(x,y)d\mu(y)$$

$$+\sum_{n=2}^{p}\Big(\frac{\|x\|^n}{\sigma_{m-1}R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)-C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\|x\|^n\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m+n-2}}-\frac{\|y\|^n}{R^{m+2n-2}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Big).$$

Функция $b(R,x)$, как функция переменной x, является гармоническим полином степени не выше p. Из равенств (24), (25) следует, что для каждого $x\in\mathbb{R}^m$ существует предел

$$\lim_{R\to\infty}b(R,x).$$

Из леммы 1 следует, что существуют пределы

$$\lim_{R\to\infty}\Big(\frac{m}{\sigma_{m-1}R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)}(x,y)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-(m-2)\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^m}-\frac{1}{R^m}\right)(x,y)d\mu(y)\Big)=A_1(x),$$

$$\lim_{R\to\infty}\Big(\frac{\|x\|^n}{\sigma_{m-1}R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)-C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)\mathrm{w}(y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\|x\|^n\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m+n-2}}-\frac{\|y\|^n}{R^{m+2n-2}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Big)=A_n(x),\ n\in\overline{2,p}.$$

Эти пределы равномерные на любом компакте. Переходя в равенстве (24) к пределу при $R \to \infty$, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

В теореме 11 требуется, чтобы функция $\mathrm{w}(x)$ принадлежала классу $\delta S^{(0)}$. В следующей теореме мы освобождаемся от этого ограничения.

Теорема 12. *Пусть* $\mathrm{w}(x)$ *– δ-субгармоническая функция в пространстве* $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$ *и* μ *– её риссовская мера. Пусть функция* w *имеет порядок* ρ *и* $p = [\rho]$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(x) = -\int\limits_{B(0,1)} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^{m-2}} + \int\limits_{CB(0,1)} K_\rho(x,y)d\mu(y) + \sum_{k=0}^{p} A_k(x),$$

где $A_k(x)$*– некоторый однородный гармонический многочлен степени* k.

Замечание. Имеются аналоги формул (20), (21).

$$A_1(x) = \lim_{R\to\infty}\Big(\frac{m}{R^{m+1}}\int\limits_{S(0,R)} (x,y)w(y)d\sigma_{m-1}(y) - (m-2)\int\limits_{B(0,R)\setminus B(0,1)} (x,y)\left(\frac{1}{\|y\|^m} - \frac{1}{R^m}\right)d\mu(y)\Big),$$

$$A_n(x) = \lim_{R\to\infty}\Big(\frac{\|x\|^n}{R^{m+n-1}}\int\limits_{S(0,R)}\Big(C_n^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma) - C_{n-2}^{\frac{m}{2}}(\cos\gamma)\Big)w(y)d\sigma_{m-1}(y) - \|x\|^n\int\limits_{B(0,R)\setminus B(0,1)}\left(\frac{1}{\|y\|^{m-2+n}} - \frac{\|y\|^n}{R^{m-2+2n}}\right)C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\gamma)d\mu(y)\Big), n \geq 2.$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathrm{w}_1(x) = \mathrm{w}(x) + \int\limits_{B(0,1)} \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^{m-2}} - c,$$

где постоянная c определяется из условия $\mathrm{w}_1(0) = 0$. Функция w_1 принадлежит классу $\delta S^{(0)}$. Теперь теорема и замечание к ней следуют из теоремы 11.

ЛИТЕРАТУРА

1. Azarin V. Growth theory of subharmonic functions. – Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2009. – 259 p.

2. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М: Мир, 1980. – 304 с.

3. Бурбаки Н. Интегрирование. – М: Наука, ГРФМЛ, 1977. – 396 с.

4. Эдвардс Р. Функциональный анализ. – М: Мир, 1969. – 1071 с.

5. Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. – М: Наука, 1979. – 320 с.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т1. – М: Наука, ГРФМЛ, 1965. – 296 с.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т2. – М: Наука, ГРФМЛ, 1966. – 296 с.

8. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

Статья получена: 16.09.2014; окончательный вариант: 06.10.2014.; принята: 10.11.2014.