Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 512.552 Том 82, 2015, с.61–66

Сума елементів зведеної матриці показників

О. В. Зеленський, В. М. Дармосюк

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
вул. Огієнка, 61, 32301, м. Кам'янець-Подільський, Україна
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського
вул. Нікольська, 24, 54030, м. Миколаїв, Україна
zelik82@mail.ru, darmosiuk@gmail.com

У роботі досліджуються можлива сума елементів зведеної матриці показників та можлива сума елементів зведеної матриці показників з сагайдаком без петель.
Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників.

Зеленский А.В., Дармосюк В.Н. **Сумма элементов приведенной матрицы показателей.** В работе исследуются возможная сумма элементов приведенной матрицы показателей и возможная сумма элементов приведенной матрицы показателей с колчаном без петель.
Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей.

O. V. Zelenskiy, V. M. Darmosiuk. **The sum of elements of the reduced exponent matrix.** This paper investigates the possible sum of elements of the reduced exponent matrix and possible sum of elements of the reduced exponent matrix with a quiver without loops.
Keywords: exponent matrix, admissible quiver of exponent matrix.

2000 Mathematics Subject Classification 16G20, 16G30.

1. Вступ

Один із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення.

© Зеленський О. В., Дармосюк В. М., 2015

Сума елементів матриці показників черепичного порядку є його інваріантом і вперше зустрічається в роботі [3]. Сума елементів матриць показників зустрічається в дослідженні частково-впорядкованих множин на жорсткість [2]. У зв'язку з дослідженням сагайдаків черепичних порядків скінченної глобальної розмірності виникло питання про мінімальну суму елементів такого порядку [4]. Для одиничних сагайдаків оцінки суми елементів матриці показників знайдені в [5]. В роботі продовжуються дослідження матриць показників, а саме, досліджуються суми елементів зведених матриць показників.

2. Попередні відомості

Розглянемо матрицю $\mathcal{E}=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathcal{Z})(M_n(\mathcal{Z})$ — це кільце матриць розмірності n з цілими елементами).

Означення 1. [1, гл.14, с. 353]. *Матриця $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$, для якої виконуються наступні умови:*

1) $\alpha_{ij}+\alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всіх $i,\ j,\ k=1,\ldots,n$,

2) $\alpha_{ii}=0$ для всіх $i=1,\ldots,n$,

називається матрицею показників.

Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij}+\alpha_{ji} \geqslant 1$ для всіх $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ $(i \neq j)$

називається зведеною матрицею показників.

Нехай $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників.
Введемо матриці $\mathcal{E}^{(1)}=(\beta_{ij})=\mathcal{E}+E_n \quad \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n — одинична матриця, та $\mathcal{E}^{(2)}=(\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij}=\min\limits_{k}\{\beta_{ik}+\beta_{kj}\}$.

Означення 2. [1, гл.14, с. 357]. *Сагайдаком зведеної матриці показників $Q=Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q]=\mathcal{E}^{(2)}-\mathcal{E}^{(1)}$.*

Для елементів матриці суміжності сагайдака Q маємо наступні формули:

$$q_{ij}=\gamma_{ij}-\beta_{ij}=\min_{k}\left(\beta_{ik}+\beta_{kj}\right)-\beta_{ij}=\min\left(1,\ \min_{k\neq i,\ j}(\alpha_{ik}+\alpha_{kj}-\beta_{ij})\right)=$$

$$=\min\left(1,\ \min_{k\neq i,\ j}(\alpha_{ik}+\alpha_{kj}-\alpha_{ij})\right).$$

$$q_{ii}=\min_{k}\left(\beta_{ik}+\beta_{ki}\right)-\beta_{ii}=\min\left(2,\ \min_{k\neq i}\left(\alpha_{ik}+\alpha_{ki}\right)\right)-1=$$

$$=\min\left(1,\ \min_{k\neq i}\left(\alpha_{ik}+\alpha_{ki}-1\right)\right).$$

Звідси отримуємо, що $q_{ij}=1$ при $i\neq j$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik}+\alpha_{kj}>\alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i,j$. $q_{ii}=1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik}+\alpha_{ki}>1$ для всіх $k \neq i$.

Означення 3. [1, гл.14, с. 357]. *Сагайдак Q називається допустимим, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така що $Q(\mathcal{E})=Q$.*

3. Матриці показників із заданою сумою елементів

Для зведеної матриці показників $\mathcal{E}=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ виконується нерівність $\alpha_{ij}+\alpha_{ji} \geqslant 1$ для всіх $i \neq j$. Оскільки таких пар елементів матриці показників, які симетричні відносно головної діагоналі є C_n^2, то сума елементів $\mathcal{E}$ не менше, ніж $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Теорема 1. *Для довільного натурального $n \geqslant 2$ та довільного натурального $k \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$ існує зведена матриця показників $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$ із сумою елементів k.*

Доведення. Для $n = 2$ — твердження очевидне, оскільки $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матриця показників для $\forall \alpha_{12} \geq 1$. Нехай $n \geq 3$. Розділимо k на $\frac{n(n-1)}{2}$ з остачею. Тобто знайдемо такі числа q та r, що $k = q\frac{n(n-1)}{2} + r$, $0 \leq r < \frac{n(n-1)}{2}$ (за теоремою про ділення з остачею).

Оскільки $k \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$, то $q \geqslant 1$. Знайдемо таке число p, що $\frac{p(p-1)}{2} \leqslant r < \frac{p(p+1)}{2}$ $\left(p = \left[\frac{1+\sqrt{1+8r}}{2}\right]\right)$. Оскільки $r < \frac{n(n-1)}{2}$, то $p < n$. Нехай $t = r - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$.

$$\frac{p(p-1)}{2} - \frac{(p-1)(p-2)}{2} \leq t < \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p-1)(p-2)}{2},$$

$p - 1 \leq t < 2p - 1$.

Розглянемо матрицю $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, де

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{для } \ i = j, \\ q, & \text{для } \ i < j, \\ \alpha_{ij} = 1, & \text{для } \ j < i \leqslant p, \\ \alpha_{p+1,j} = 1, & \text{для } \ j \leqslant t, \\ \alpha_{ij} = 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Доведемо, що $\mathcal{E}$ є зведеною матрицею показників.

1. $\alpha_{ii} = 0$ за побудовою матриці $\mathcal{E}$

2. Доведемо нерівність $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geqslant \alpha_{ij}$.

Оскільки $q \geqslant 1$, то всі елементи $\mathcal{E}$ не більші за q. Тому якщо $\alpha_{ik} = q$ або $\alpha_{kj} = q$, то нерівність $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geqslant \alpha_{ij}$ виконується. Нехай $\alpha_{ij} = q$ а $\alpha_{ik} < q$, $\alpha_{kj} < q$. Тоді $i < j$, $k < i$ та $k \geq j$, що неможливо. Отже, хоча б одне з чисел α_{ij} або α_{ik} дорівнює q і тоді нерівність виконується.

Розглянемо випадок, коли елементи α_{ik}, α_{kj}, α_{ij} не дорівнюють q, тобто $i \geqslant k \geqslant j$. Якщо $i = k$ або $k = j$, то нерівність очевидна. Тому розглянемо випадок $i > k > j$. Якщо $i \leq p$, то $\alpha_{ik} = 1$. Якщо ж $i = p + 1$, то $\alpha_{kj} = 1$. В обох випадках нерівність $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geqslant \alpha_{ij}$ виконується. Теорему доведено.

Приклад 1. При $n = 4$ та $k = 34$ маємо
$\frac{n(n-1)}{2} = 6$, $34 = 5 \cdot 6 + 4$, тому $q = 5$, $r = 4$, $p = \left[\frac{1+\sqrt{1+8\times 4}}{2}\right] = 3$, $t = 4 - \frac{3\times 2}{2} = 1$, $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Зауважимо, що для побудованої матриці $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\alpha_{ij} \in \{0, 1, q\}$. Тобто в загальному випадку множина значень елементів матриці складається з трьох елементів. Виникає питання: чи завжди можна побудувати зведену матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ з сумою елементів $k \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$ таким чином, щоб множина значень елементів матриці складалося з двох чисел? Відповідь на це питання негативна. Для $n = 3$, $k = 7$ такої матриці не існує. Оскільки $\alpha_{ii} = 0$, то множина значень елементів матриці $\{0, a\}$. Якщо $a = 1$, то максимальна сума елементів матриці

$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює $6 < 7$. Отже, $a > 1$. Нехай елемент, рівний a, зустрічається в матриці $\mathcal{E}$ m разів, тоді $ma = 7$, $a > 1$. Отже, $a = 7$, $m = 1$. Тобто матриця $\mathcal{E}$ складається з восьми нульових елементів та елемента 7. Але $\alpha_{12} + \alpha_{21} \geqslant 1$, $\alpha_{13} + \alpha_{31} \geqslant 1$, $\alpha_{23} + \alpha_{32} \geqslant 1$. Отже, серед елементів матриці має бути мінімум три додатні. Отримали суперечність. Виникає питання: чи виконується теорема 1, якщо добавити умову, що сагайдак без петель?

Теорема 2. *Для довільного натурального $n \geqslant 4$ та довільного натурального $k \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$ існує зведена матриця показників $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$ з сагайдаком без петель, сумою елементів k, та множиною значень елементів матриці потужності* 3.

Доведення. Розглянемо матрицю показників $\mathcal{E}$ вигляду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & q & q & ... & q \\ 0 & 0 & q & q & ... & q \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $p = 1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ (це число одиниць в квадратних блоках матриці). Розділимо з остачею $k - p$ на $2n - 4$:

$k - p = (2n-4)q + r$, $r < 2n - 4$. Зауважимо, що $k - p \geqslant \frac{n(n-1)}{2} - \left(1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\right) = 2n - 4$. Тому $q \geqslant 1$.

Позначимо $t = \left[\frac{r}{2}\right] + 2$. Якщо $t \geqslant 2$, То $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{t1} = \alpha_{t2} = 1$. Інші $\alpha_{ij} = 0$ для $i \in [t+2, n]$, $j \in [1, 2]$. Якщо r непарне, то $\alpha_{t+1,2} = 1$.

Теорему доведено.

Доведемо, що $\mathcal{E}$ — зведена матриця показників.

1. $\alpha_{ii} = 0$ (за побудовою матриці $\mathcal{E}$).

2. Оскільки $q \geqslant 1$, то в матриці показників $\mathcal{E}$ вище головної діагоналі знаходяться всі елементи, які не менше одиниці. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 1$.

3. Доведемо нерівність

$$\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geqslant \alpha_{ij} \tag{1}$$

Якщо $\alpha_{ij} = 0$, то нерівність (1) очевидна, тому досить розглянути два випадки: $\alpha_{ij} = 1$ та $\alpha_{ij} = q$.

Випадок а) $\alpha_{ij} = q$. З побудови матриці $\mathcal{E}$ випливає, що $j \geqslant 3$, $i = 1$ або $i = 2$. Нерівність (1) набуде вигляду: $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geqslant q$. Оскільки $\alpha_{ik} = q$ для $k \geqslant 3$ та $\alpha_{kj} = q$ для $k \in [1, 2]$, то нерівність (1) виконується.

Випадок б) $\alpha_{ij} = 1$. Припустимо протилежне, що нерівність (1) не виконується. Тоді $\alpha_{ik} = \alpha_{kj} = 0$. Якщо $i = k$, то $\alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, якщо $k = j$, то $\alpha_{ik} = \alpha_{ij}$, якщо $i = j$, то $\alpha_{ij} = 0$, тому індекси i, k, j попарно не співпадають. Розглянемо яких значень може набувати індекс k. $k \geqslant 2$, оскільки при $k = 1$, $k \neq j$ $\alpha_{kj} > 0$.

Якщо $k = 2$, то $j = 1$ (для інших $j \neq k$ $\alpha_{kj} > 0$). За побудовою матриці $\mathcal{E}$, якщо $\alpha_{i2} = 0$, то і $\alpha_{i1} = 0$. Тому $k \neq 2$.

Якщо $k \in [3, n]$ тоді $i > k$ (бо $\alpha_{ik} > 0$, для $i < k$), якщо $j \in [1, 2]$ то з того, що $\alpha_{kj} = 0$ випливає, що $\alpha_{ij} = 0$. Отже, $i, j, k \in [3, n]$. Отримали суперечність, оскільки $\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ — матриця показників, тому випадок $\alpha_{ik} = \alpha_{kj} = 0$, $\alpha_{ij} = 1$ неможливий. Отже, нерівність (1) виконується.

Для матриці $\mathcal{E}$ виконуються умови 1)- 3), тому $\mathcal{E}$ — зведена матриця показників. Для довільного $i \in [1, n]$ існує таке j, що $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$. Тому $Q(\mathcal{E})$ — сагайдак без петель.

Отже, $\mathcal{E}$ — зведена матриця показників розмірності n з сумою елементів k, та сагайдаком без петель. Теорему доведено.

Приклад 2. Нехай $n = 7$, $k = 46$: $p = 11$, $k - p = 35$, $2n - 4 = 10$, $35 = 3 \cdot 10 + 5$, $q = 3$, $r = 5$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Висновок: Для довільного натурального $n \geqslant 2$ та довільного натурального $k \geqslant C_n^2$ існує зведена матриця показників розмірності n та сумою елементів k. Для довільного натурального $n \geqslant 4$ та довільного натурального $k \geqslant C_n^2$ існує зведена матриця показників розмірності n з сагайдаком без петель та сумою елементів k. Причому завжди можна побудувати матрицю показників з заданою сумою $k \geqslant C_n^2$, яка складається тільки з трьох різних елементів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2004. — v. 1. — 380 p.

2. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2007. — v. 2. — 400 p.

3. Jategaonkar V. A. Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring / V. A. Jategaonkar / Trans. Amer. Math. Soc., 1974. — 196. — P. 313-330.

4. Журавльов В. М., Журавльов Д. В. Черепичні порядки в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності. / Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, 2013. — №1. — С. 28-34.

5. Журавльов В. М., Зеленський О. В., Дармосюк В. М. Одиничні сагайдаки матриць показників. / Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, 2012. — №4. — С. 27-31.

Стаття одержана: 25.07.2015; перероблений вариант: 25.12.2015;
прийнята: 26.12.2015.