Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
Том 83, 2016, с.10–20

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics"
Vol. 83, 2016, p. 10–20

УДК 517.9

О регуляризации линейных матричных уравнений

С. М. Чуйко

*Донбасский государственный педагогический университет,
84 116 Донецкая обл., г.Славянск, ул. Генерала Батюка, 19, Украина
chujko-slav@inbox.ru*

Линейные матричные уравнения широко используются в теории устойчивости движения, теории управления, а также в задачах восстановления изображений. В статье предложены оригинальные условия регуляризации, а также схема нахождения решений возмущенного матричного уравнения, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор L, соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения, не имеет обратного.
Ключевые слова: матричное уравнение Сильвестра, матричное уравнение Ляпунова, условия регуляризации, псевдообратные матрицы.

Чуйко С. М. **Про регуляризацію лінійних матричних рівнянь.** Лінійні матричні рівняння широко використовуються в теорії стійкості руху, теорії керування, а також у задачах про відновлення зображень. У статті запропоновані оригінальні умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків збуреного матричного рівняння, зокрема, рівняння Сільвестра, у випадку, коли лінійний матричний оператор L, відповідний до однорідної частини узагальненого матричного рівняння, не має оберненого.
Ключові слова: матричне рівняння Сильвестра, матричне рівняння Ляпунова, умови регуляризації, псевдообернена матриця.

S. M. Chuiko. **On the Regularization of a linear matrix equations.** Linear matrix equations widely used in the theory of stability of motion, control theory and signal processing. We suggest an algorithm for regularization of the inhomogeneous generalized matrix equation and, in particular, the Sylvester equation in general case when the linear matrix operator L, corresponding to the homogeneous part of the linear generalized matrix equation, has no inverse.
Keywords: Lyapunov matrix equation, Sylvester matrix equation, conditions of regularization, pseudoinverse matrix.
2000 Mathematics Subject Classification: 15A24, 34B15, 34C25.

Линейные матричные уравнения, в частности, матричные уравнения Ляпунова и Сильвестра [1, 2, 3, 4] широко используются в теории устойчивости движения [3, 5], а также при решении краевых задач для систем дифференциальных уравнений [6, 7, 8, 9]. В статьях [9, 10, 11] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения уравнения Ляпунова. Используя технику псевдообратных матриц и проекторов, нами предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения и, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор L, соответствующий однородной части обобщенного матричного уравнения не имеет обратного [10, 12].

Постановка задачи

Поставим следующую задачу: можно ли малыми возмущениями обеспечить разрешимость линейного матричного уравнения

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \tag{1}$$

для любой правой части $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$? Здесь $\mathcal{L}: \ \mathbb{R}^{\beta\times\gamma} \to \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$ — линейный ограниченный матричный функционал, $X \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ — неизвестная матрица. Обозначим

$$\Big\{\Theta_j\Big\}_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

естественный базис [13] пространства $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Общее решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$X = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Big[\mathcal{L}\Theta_j\Big] c_j = \mathcal{A}.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A, а также обратный оператор [12]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (\ 1\ ) \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \quad \Upsilon_2 := (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{4\times 1},$$

$$\Upsilon_3 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{9\times 1},\ \dots .$$

Вектор Υ_m состоит из $m-1$ цепочки вида

$$(\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ )^* \in \mathbb{R}^{(m-1)\times 1}$$

и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \Big(\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad \dots \quad 1\ 0\ 0\ \dots\ 0 \quad 1\ \Big)^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}.$$

Определим также матрицы [12]

$$\Big[E_n^m\Big]_j := \Big[E_1^m\Big]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n}, \ \Big[E_1^m\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронеккера [13]. Система (1) равносильна следующему уравнению

$$\mathcal{Q}\ c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] \tag{2}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$; здесь

$$\mathcal{Q} := \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \left\{ \Big[E_1^{\alpha\beta}\Big]_j \otimes \mathcal{M}[\mathcal{L}\Theta_j] \right\}.$$

Уравнение (2) разрешимо при условии [10]

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[\mathcal{A}] = 0 \tag{3}$$

и только при нем. Здесь

$$P_{\mathcal{Q}^*}:\ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$$

— ортопроектор матрицы $\mathcal{Q}^*$. При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для матричного уравнения (1) имеет место критический случай, при этом уравнение (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (3).

Основной результат

Таким образом, поставленная задача равносильна следующей: можно ли в критическом случае малыми возмущениями привести матричное уравнение (1) общего вида к некритическому случаю? Последняя задача относится к задачам о регуляризации [6, 14, 16, 17]. Как известно [18], любая $(m \times n)-$ матрица Q в определенном базисе может быть представлена в виде

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \text{rank}\ Q := \rho; \tag{4}$$

здесь $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденные матрицы,

$$J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Разложением (4) можно воспользоваться при решении задачи о регуляризации матричного уравнения (1). Возмущение матрицы $\mathcal{Q}$ будем искать в виде

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon R \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

По определению алгебраическая система (1) представляет некритический случай при условии $P_{Q^*} = 0$. Очевидно, это условие равносильно уравнению

$$\Big[\mathcal{Q} + \varepsilon R\Big] \cdot \Big[\mathcal{Q} + \varepsilon R\Big]^+ = I_{\gamma\delta} \tag{5}$$

относительно $(\gamma\delta \times \alpha\beta)-$ матрицы R. Заметим, что уравнение (5) разрешимо лишь для $\gamma\delta = \alpha\beta$, либо $\gamma\delta < \alpha\beta$. Действительно, предположим уравнение (5) переопределенным: $\gamma\delta > \alpha\beta$, при этом

$$\text{rank}\ \Big(\mathcal{Q} + \varepsilon R\Big)\Big(\mathcal{Q} + \varepsilon R\Big)^+ \le \text{rank}\ \Big(\mathcal{Q} + \varepsilon R\Big) =$$

$$= \text{rank}\ \Big(\mathcal{Q} + \varepsilon R\Big)^+ \le \alpha\beta < \gamma\delta,$$

что противоречит равенству рангов левой и правой части уравнения (5). При условии $\gamma\delta \le \alpha\beta$ уравнение (5) имеет по меньшей мере одно семейство решений

$$\mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \alpha\beta}, \ \ \Pi_J := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C \end{pmatrix}, \ \ \text{rank}\ C := \gamma\delta - \rho.$$

Таким образом, поставленная задача о регуляризации алгебраической системы (2), равносильная уравнению (2) с $(\gamma\delta \times \alpha\beta)-$ матрицей $\mathcal{Q}$, разрешима при условии $\gamma\delta \le \alpha\beta$ в виде

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi.$$

Действительно, в силу невырожденности матриц $\Phi \in \mathbb{R}^{\gamma\delta \times \gamma\delta}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times \alpha\beta}$ имеет место равенство [13, 4.48]

$$\text{rank}\ Q = \text{rank}\ (J + \varepsilon \Pi_J) = m,$$

при этом $P_{Q^*} = 0$, следовательно система (2) с матрицей Q разрешима для любых правых частей. Таким образом, найдено решение задачи о регуляризации алгебраической системы (2), при этом задача о регуляризации алгебраической системы (1) может быть поставлена для линейного матричного уравнения

$$LX = \mathcal{A}. \tag{6}$$

Здесь

$$LX := \mathcal{L}X + \varepsilon\mathcal{U}X\mathcal{V};$$

здесь $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\alpha}$ — фиксированная постоянная матрица и $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\delta}$ — неизвестная постоянная матрица. Обозначим

$$\Big\{\Xi_j\Big\}_{j=1}^{\beta\cdot\delta} \in \mathbb{R}^{\beta\times\delta}$$

естественный базис [13] пространства $\mathbb{R}^{\beta\times\delta}$. Неизвестную матрицу $\mathcal{V}$ ищем в виде суммы

$$\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\delta} \Xi_j\xi_j, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1.$$

Для нахождения констант $\xi_j,\ j = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \beta\cdot\delta$ используем уравнение

$$\left\{\mathcal{M}\left[\mathcal{U}\Theta_i\sum_{j=1}^{\beta\cdot\delta}\Xi_j\xi_j\right]\right\}_{i=1}^{\alpha\cdot\beta} = \mathcal{R}.$$

Обозначим матрицы $\mathfrak{Q}(\Xi_i) \in \mathbb{R}^{\gamma\delta\times\alpha\beta}$:

$$\mathfrak{Q}(\Xi_i) := \left\{\mathcal{M}\Big[\mathcal{U}\Theta_1\Xi_i\Big],\ \dots\ ,\ \mathcal{M}\Big[\mathcal{U}\Theta_{\alpha\beta}\Xi_i\Big]\right\},\ i = 1,\ 2,\ \dots\ \alpha\beta.$$

Вектор $\xi \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\delta}$ определяет уравнение

$$\Omega\cdot\xi = \mathcal{M}[\mathcal{R}], \tag{7}$$

разрешимое тогда и только тогда, когда

$$P_{\Omega^*}\mathcal{M}[\mathcal{R}] = 0; \tag{8}$$

здесь

$$\Omega := \Big\{\mathcal{M}[\mathfrak{Q}(\Xi_i)]\Big\}_{i=1}^{\beta\cdot\gamma}$$

— постоянная $(\alpha\beta\gamma\delta\times\beta\gamma)$– матрица, P_{Ω^*} — ортопроектор:

$$P_{\Omega^*}:\ \mathbb{R}^{\alpha\beta\gamma\delta\times\alpha\beta\gamma\delta} \to \mathbb{N}(\Omega^*).$$

При условии (8) уравнение (7) имеет по меньшей мере одно решение

$$\xi = \Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}],$$

определяющее неизвестную матрицу

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}^{-1}\Big[\Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}]\Big].$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 0.1 *Матричное уравнение (1) в критическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$. При условии (8) и $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ для фиксированной матрицы $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\alpha}$ и произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon \ll 1$ возмущение функционала $\mathcal{L}$:*

$$LX := \mathcal{L}X + \varepsilon\mathcal{U}X\mathcal{V}$$

приводит к матричному уравнению (6), разрешимому для любых правых частей. Здесь

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}^{-1}\Big[\Omega^+ \cdot \mathcal{M}[\mathcal{R}]\Big].$$

В этом случае уравнение (6) имеет $r := \beta - \alpha$ – параметрическое семейство решений

$$X(\varepsilon) = \Phi[\mathcal{A}](\varepsilon) + \Psi[c_r], \tag{9}$$

где

$$\Phi[\mathcal{A}](\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{Q^+\mathcal{M}[B]\Big\}, \quad \Psi[c_r] := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{Q_r}c_r\Big].$$

Здесь Q^+ — псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица,

$$P_Q : \ \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(Q), \quad P_{Q^*} : \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta} \to \mathbb{N}(Q^*)$$

— ортопроекторы матриц

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi$$

и Q^*. Матрица P_{Q_r} составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_Q.

Теорема 0.1 является обобщением соответствующих результатов [19] на случай матричных уравнений.

Пример 0.1 *Матричное уравнение общего вида*

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A} \tag{10}$$

не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$; *здесь*

$$\mathcal{L} := \int_0^{2\pi} U(t)XV(t)dt, \ U(t) := \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ составляют матрицы

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Theta_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключевая при исследовании уравнения (10) матрица

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяет ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, при этом для уравнения (10) имеет место критический случай, следовательно уравнение (10) не разрешимо для произвольной неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$. Матрица Q может быть представлена в виде

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \operatorname{rank} Q = 2;$$

здесь

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $\mathcal{U} := (\ 1 \ \ 0\ )$. Неизвестный сомножитель $\mathcal{V}$ определяет матрица

$$\Omega := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$Q := \mathcal{Q} + \varepsilon \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi,$$

где

$$\Pi_J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом условие (8) выполнено. Таким образом, находим матрицу

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которая приводит к матричному уравнению (6), разрешимому для любых правых частей; здесь

$$LX := \mathcal{L}X + \varepsilon \mathcal{U} X \mathcal{V},$$

для которого

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица полного ранга для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ \varepsilon \ll 1$. Положим

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1;$$

при этом решение возмущенного матричного уравнения (6) имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2c_1 - c_2 & - + 2c_2 & -c_1 - c_2 \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема может быть использована при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [9, 20], при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [7, 8, 21], а также в теории устойчивости движения [3, 4, 5, 22]. Полученные результаты аналогично [23, 24] могут быть перенесены на обобщенные уравнения, содержащие неизвестные матрицы различных размерностей.

Acknowledgement. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

3. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — 280 с.

4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

5. Коробов В.И., Бебия М.О. Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України, 2014. — № 2. — С. 20 — 25.

6. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.

7. Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal, 2015. — **56**, № 4. — pp. 752 — 760.

8. Chuiko S.M. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics, 2016. — **60**, №8. — pp. 64 — 73.

9. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations, 2001. — **37**, № 4. — P. 464 — 471.

10. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика, 2014. – № 1120. – С. 85–94.

11. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal, 1998. — **50**, № 8. — P. 1162 — 1169.

12. Чуйко С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика, 2014. — **19**, Вип. 1 (21), С. 49 — 57.

13. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.

14. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. — 104 с.

15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

16. Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.

17. Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences, 2014. — **197**, № 1. — pp. 138 — 150.

18. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. 3 изд. М.: Изд. МЦНМО, 2009. — 672 с.

19. Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V. On a regularization method for solving linear matrix equation // Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math., 2014. — **1**, pp. 12 — 14.

20. Деревенский В.П. Матричные уравнения Бернулли // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 2. – С. 14–23.

21. Chuiko S. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes, 2016. — **17**, №1. — pp. 139 — 150.

22. Бебия М.О. «Стабилизация систем со степенной нелинейностью», «Вісник Харківського національного університету. Серія «Математика, прикладна математика і механіка», 2014. — №1120, Вып. 69. — с. 75 — 84.

23. Чуйко С.М. О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник, 2015. — **16**, вып. 1. — С. 52 – 66.

24. Чуйко С.М. О решении билинейного матричного уравнения // Чебышевский сборник, 2016. — **17**, Вып. 2. — С. 196 – 205.

Статья получена: 19.09.2016; принята: 29.09.2016.