Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 83, 2016, с.47–56

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 83, 2016, p. 47–56

УДК 517.954

Управляемость эволюционного дифференциального уравнения в частных производных

А. А. Макаров

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
mak-family@yandex.ru

Доказана 0-управляемость любого эволюционного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами в пространстве бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Приведены условия, при которых управление не зависит от времени. Рассмотрены также релейные управления для классических уравнений математической физики.
Ключевые слова: 0-управляемость, краевая задача, преобразование Фурье, релейное управление.

Макаров О. А., **Керованість еволюційного диференціального рівняння в частинних похідних.** Доведена 0-керованість будь-якого еволюційного диференціального рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами в просторі нескінченно диференційовних швидко спадаючих функцій. Наведено умови, за якими керування не залежить від часу. Розглянуто також релейні керування для класичних рівнянь математичної фізики.
Ключові слова: 0-керованість, крайова задача, перетворення Фур'є, релейне керування.

A. A. Makarov, **Controllability of evolution partial differential equation.** Null-Controllability of any evolution partial differential equation with constant coefficients in the space of infinitely differentiable rapidly decreasing functions is proved. Conditions under which a control is independent of time are given. Bang-bang controls for the classical equations of mathematical physics are considered.
Keywords: null-controllability, boundary value problem, Fourier transform, bang-bang controls.

2000 Mathematics Subject Classification: 35S10.

Теории управляемости в последнее время посвящено много работ, но большая часть из них посвящена обыкновенным уравнениям; а из уравнений с частными производными рассматриваются, в основном, уравнения математической физики, например, — волновое [1, 2].

В данной статье рассматривается *общее линейное уравнение в частных производных эволюционного типа*, а также линейные системы и доказывается 0-управляемость в пространстве бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + u(x,t)\,, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0;T]$, а функции $w(\cdot,t)$ и $u(\cdot,t)$ — из пространства Л. Шварца S при любых $t \in [0;T]$.

Определение 1. Уравнение (1) называется 0-управляемым на отрезке $[0;T]$ в пространстве S, если для любой функции $\varphi(x) \in S$ существует кусочно-непрерывное по t управление $u(\cdot,t) \in S$, такое, что решение уравнения $w(\cdot,t) \in S$ для всех $t \in [0;T]$ удовлетворяет начальному условию $w(x,0) = \varphi(x)$ и $w(x,T) = 0$.

Теорема 1. *Любое уравнение вида (1) является 0-управляемым в пространстве S на любом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как задача Коши для уравнения (1) может оказаться некорректной в пространстве S, то заменим ее краевой двухточечной задачей, которая будет эквивалентна исходной задаче (с учетом условия $w(x,T) = 0$), но корректной в пространстве S.

В работе [3] было доказано, что для любого уравнения вида (1) существует корректная краевая задача в пространстве S с краевым условием

$$w(x,0) + C(D)w(x,T) = \varphi(x)\,, \tag{2}$$

где $C(D)$ — псевдодифференциальный оператор с символом $C(s){=}e^{-iT\,ImP(s)}$.

Под действием преобразования Фурье (по пространственным переменным) краевая задача (1)– (2) перейдет в задачу

$$\frac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial t} = P(s)\widetilde{w}(s,t) + \widetilde{u}(s,t)\,, \tag{3}$$

$$\widetilde{w}(s,0) + C(s)\widetilde{w}(s,T) = \widetilde{\varphi}(s)\,, \tag{4}$$

решение которой имеет следующий вид

$$\widetilde{w}(s,t) = \int\limits_0^T G(s,t,\tau)\widetilde{u}(s,\tau)d\tau + Q(s,t)\widetilde{\varphi}(s)\,, \tag{5}$$

где

$$Q(s,t) = \exp(tP(s))(1 + C(s)\exp(TP(s)))^{-1},$$

а функция Грина

$$G(s,t,\tau) = \begin{cases} Q(s,t)e^{-\tau P(s)} & \text{при } t > \tau \\ -Q(s,t)C(s)e^{(T-\tau)P(s)} & \text{при } t < \tau\,. \end{cases}$$

При $t = T$ получим

$$\widetilde{w}(s,T) = \int\limits_0^T Q(s,T)e^{-\tau P(s)}\widetilde{u}(s,\tau)d\tau + Q(s,T)\widetilde{\varphi}(s) = 0.$$

Сократив это равенство на ненулевую функцию $Q(s,T)$, получим уравнение

$$\int\limits_0^T \exp(-\tau P(s))\widetilde{u}(s,\tau)d\tau = -\widetilde{\varphi}(s). \tag{6}$$

Будем искать преобразование Фурье от управления $u(x,t)$ в виде $\widetilde{u}(s,t) = e^{it\,ImP(s)} \cdot \psi(s)$.

Подставляя эту функцию в уравнение (6), получим

$$\int\limits_0^T \exp(-\tau ReP(s))\psi(s)d\tau = -\widetilde{\varphi}(s).$$

Так как $\int\limits_0^T \exp(-\tau ReP(s))d\tau = \dfrac{1 - e^{-TReP(s)}}{ReP(s)} \neq 0$, то определена обратная бесконечно дифференцируемая функция $\dfrac{ReP(s)}{e^{-TReP(s)} - 1}$, растущая не быстрее некоторой степени $|s|$, принадлежащая пространству мультипликаторов $C_{-\infty}^{+\infty}$.

Поэтому функция $\psi(s)$ принадлежит пространству S и управление $u(x,t) = \mathcal{F}_s^{-1}\left(\dfrac{ReP(s)\cdot\widetilde{\varphi}(s)}{e^{-TReP(s)} - 1} \cdot e^{itImP(s)}\right)$ также принадлежит пространству S, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Следствие. Если полином $P(s)$ — вещественный, то управление $u(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\left(\dfrac{P(s)\cdot\widetilde{\varphi}(s)}{e^{-TP(s)} - 1}\right)$ не зависит от t; при этом получим результат работы [4].

Так, уравнение теплопроводности является 0-управляемым с управлением, не зависящим от t.

Рассмотрим более общий пример

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + b\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + u(x,t), \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Здесь $P(s) = -as^2 + ibs$, а управление

$$u(x,t) = \mathcal{F}_s^{-1}\left(\frac{as^2 \cdot \widetilde{\varphi}(s)}{1 - e^{Tas^2}}\, e^{itbs}\right) = G_1(x) * \varphi(x - tb),$$

где обобщенная функция $G_1(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\left(\dfrac{as^2}{1 - e^{Tas^2}}\right)$ является свертывателем в пространстве S, так как функция $\dfrac{as^2}{1 - e^{Tas^2}}$ принадлежит пространству $C_{-\infty}^{\infty}$ — бесконечно дифференцируемых функций степенного роста [5].

Для случая, когда $P(s) \in i\mathbb{R}$, управление можно искать в виде

$$u(x,t) = u(x) \cdot \operatorname{sign}(t - t_0),$$

где $t_0 \in (0; T)$, а $u(x) \in S$.

Тогда уравнение (6) примет следующий вид

$$\int_0^T \exp(-\tau P(s)) \operatorname{sign}(\tau - t_0) d\tau \cdot \widetilde{u}(s) = -\widetilde{\varphi}(s).$$

Проинтегрировав данное выражение, получим

$$\frac{1}{P(s)}\left[2\exp(-t_0 P(s)) - 1 - \exp(-TP(s))\right] \widetilde{u}(s) = -\widetilde{\varphi}(s),$$

а следовательно, $\widetilde{u}(s) = \dfrac{P(s)\widetilde{\varphi}(s)}{1 + \exp(-TP(s)) - 2\exp(-t_0 P(s))}$, если знаменатель не равен нулю.

Рассмотрим уравнение

$$e^{iTw} - 2e^{it_0 w} + 1 = 0, \quad w \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

равносильное $2e^{it_0 w} = 1 + e^{iTw}$.

Если отношение t_0/T не является рациональным числом, то $\left|2e^{it_0 w}\right| = 2$, а $\left|1 + e^{iTw}\right| \le 2$ и равенство выполняется лишь при условии $Tw = 2k\pi$.

Но тогда для выполнения уравнения (7) необходимо, чтобы $t_0 w = 2m\pi$ и, значит, $t_0/T = m/k \in Q$, что противоречит нашему предположению. Осталось показать, что функция $\widetilde{u}(s) = \dfrac{P(s)\widetilde{\varphi}(s)}{1 + \exp(-TP(s)) - 2\exp(-t_0 P(s))}$ принадлежит пространству S. Для этого рассмотрим функцию

$$q(w) = (1 + \exp(iTw) - 2\exp(it_0 w))^{-1}$$

при $w \in \mathbb{R}$.

Так как при нерациональном отношении t_0/T знаменатель этой функции является почти периодической функцией, отличной от нуля, то

$$\inf\left|1 + \exp(iTw) - 2\exp(it_0 w)\right| = d > 0$$

и поэтому $q(w)$ является ограниченной почти периодической функцией (см. [6]). Значит, наша функция $\widetilde{u}(s)$ принадлежит пространству S.

Получили следующий результат:

Утверждение. Если полином $P(s)$ является чисто мнимым для всех s, принадлежащих пространству $\mathbb{R}$, то уравнение (1) является 0-управляемым в пространстве S на любом отрезке с управлением вида

$$u(x,t) = u(x) \cdot \operatorname{sign}(t - t_0)$$

при нерациональном отношении t_0/T.

Так, уравнение Шредингера $\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t} = ih\dfrac{\partial w^2(x,t)}{\partial x^2} + u(x) \cdot \operatorname{sign}(t - t_0)$ является 0-управляемым с управлением $u(x) = G_1(x) * \varphi(x)$, где

$$G_1(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{-ihs^2}{1 + \exp(iThs^2) - 2\exp(it_0hs^2)}\right)$$

является свертывателем в пространстве S (см. [5]).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + v(t) \cdot u(x). \tag{8}$$

Здесь $w(x,t)$ и $u(x)$ являются вектор-функциями, координаты которых принадлежат пространству $\mathcal{H} = \bigcap\limits_s H_0^s$, т. е. все производные которых принадлежат пространству $\mathcal{L}_2$ (см. [5]) или пространству S. Скалярная функция $v(t)$ является кусочно-непрерывной и $|v(t)| \leq 1$.

Определение 2. Система (8) называется 0-управляемой в пространстве $\mathcal{H}$ (или S), если для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{H}$ (или S) существуют $u(x) \in \mathcal{H}$ (или S) и кусочно-непрерывная функция $v(t)$ такие, что решение данной системы $w(\cdot,t) \in \mathcal{H}$ (или S) удовлетворяет начальному условию $w(x,0) = \varphi(x)$ и условию $w(x,T) = 0$.

Теорема 2. *Система (8) будет 0-управляемой в пространстве $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда существует кусочно-непрерывная функция $v(t)$, ограниченная на отрезке $[0,T]$, и существует обратная матрица*

$$\left[\int\limits_o^T v(t)\exp(-tP(s))dt\right]^{-1} \in H_l = (1+|s|)^l \mathcal{L}_2$$

с некоторым l.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Достаточность. В работе [3] доказано, что существует корректная краевая задача в пространстве $\mathcal{H}$ с краевым условием

$$w(x,0) + C(D)w(x,T) = \varphi(x),$$

где $C(D)$ — псевдодифференциальный оператор с символом из пространства H_l.

Решение двойственной по Фурье краевой задачи имеет вид

$$\widetilde{w}(s,t) = \int\limits_0^T G(s,t,\tau)\widetilde{u}(s)v(\tau)d\tau + Q(s,t)\widetilde{\varphi}(s),$$

где матрицы $G(s,t,\tau)$ и $Q(s,t)$ определяются по тем же формулам, как и в случае уравнения (1).

При $t = T$ получаем уравнение

$$\widetilde{w}(s,T) = \int\limits_0^T Q(s,T)\exp(-\tau P(s))\widetilde{u}(s)v(\tau)d\tau + Q(s,T)\widetilde{\varphi}(s) = 0.$$

Сокращая на невырожденную матрицу $Q(s,T)$, получим

$$\int\limits_0^T \exp(-\tau P(s))v(\tau)d\tau \cdot \widetilde{u}(s) = -\widetilde{\varphi}(s). \tag{9}$$

В силу условия теоремы существует функция

$$\widetilde{u}(s) = -\left[\int\limits_0^T \exp(-\tau P(s))v(\tau)d\tau\right]^{-1} \cdot \widetilde{\varphi}(s),$$

принадлежащая пространству $\bigcap\limits_s H_s^0$. Значит, управление $\widetilde{u}(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}$, что и требовалось доказать.

Необходимость. Решение задачи Коши двойственной по Фурье системы имеет вид

$$\widetilde{w}(s,t) = \exp(tP(s))\widetilde{\varphi}(s) + \int\limits_0^t \exp((t-\tau)P(s))v(\tau)\widetilde{u}(s)d\tau.$$

Тогда $\widetilde{w}(s,T) = \exp(TP(s))\widetilde{\varphi}(s) + \int\limits_0^T \exp((T-\tau)P(s))v(\tau)\widetilde{u}(s)d\tau = 0.$

Сокращая на $\exp(TP(s))$, получаем $\int\limits_0^T \exp(-\tau P(s))v(\tau)d\tau \cdot \widetilde{u}(s) = -\widetilde{\varphi}(s)$. Так как исходная система 0-управляема, то существует обратная матрица $\left(\int\limits_0^T \exp(-\tau P(s))v(\tau)d\tau\right)^{-1}$, являющаяся мультипликатором в пространстве $\mathcal{FH} = \bigcap\limits_s H_s^0$, т. е. принадлежащая пространству H_l с некоторым l, что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

Следствие. Если определитель $\Delta = \det \int\limits_0^T \exp(-tP(s))dt \neq 0 \;\; \forall s \in \mathbb{R}^n$, то система (8) будет 0-управляемой в пространствах $\mathcal{H}$ или S с $v(t) \equiv 1$ и $u(x) \in \mathcal{H}$ или S.

Это следует из работы [7], в которой доказано, что из условия Следствия вытекает принадлежность матрицы

$$\left[\int\limits_0^T \exp(-\tau P(s)) v(\tau) d\tau \right]^{-1}$$

пространству $C_{-\infty}^{\infty}$, а, значит, управление $u(x)$ принадлежит пространствам $\mathcal{H}$ или S.

В частности, если все собственные значения матрицы $P(s)$ являются вещественными, то $\Delta \neq 0$ и, значит, система (8) является 0-управляемой с управлением, не зависящим от t.

В той же работе [7] есть критерий условия $\Delta \neq 0$. А именно - это выполнение условий:

$$\frac{e^{-T\lambda_j(s)} - 1}{\lambda_j(s)} \neq 0 \quad \forall j = \overline{1, m}\,, \tag{10}$$

где $\lambda_j(s)$ — собственные значения матрицы $P(s)$.

Проиллюстрируем эффективность этого условия на следующем примере.
Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1(x_1, x_2, t)}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) w_1 - w_2 + u_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial w_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dfrac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 w_1 - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) w_2 + u_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Тогда матрица

$$P(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} s_1^2 + s_2^2 & -1 \\ (s_1 + s_2)^2 & s_1^2 + s_2^2 \end{pmatrix}$$

и ее собственными значениями будут $\lambda_{1,2} = s_1^2 + s_2^2 \pm i(s_1 + s_2)$. При этом условие $\dfrac{\exp\left(-T(s_1^2 + s_2^2 \pm i(s_1 + s_2)) - 1\right)}{s_1^2 + s_2^2 \pm i(s_1 + s_2)}$=0 равносильно условию $s_1^2 + s_2^2$=0, т. е. $s_1 = s_2 = 0$. Знаменатель в этой точке тоже равен нулю, а вся дробь стремится к $-T$. Значит, условие (10) выполнено и система 0-управляема.

Рассмотрим систему (8) с мнимыми собственными значениями матрицы $P(s)$. Будем искать управление в виде $u(x)\mathrm{sign}(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\left(\int\limits_0^{t_0} \exp(-tP(s))dt - \int\limits_{t_0}^T \exp(-tP(s))dt \right) \widetilde{u}(s) = -\widetilde{\varphi}(s).$$

Если умножить это уравнение на матрицу $P(s)$ слева, то получим

$$\Big(E + \exp(-TP(s)) - 2\exp(-t_0 P(s))\Big)\widetilde{u}(s) = P(s)\widetilde{\varphi}(s).$$

Собственные значения матрицы $P(s) = E + \exp(-TP(s)) - 2\exp(-t_0 P(s))$ равны $w_j(s) = 1 + e^{-T\lambda_j(s)} - 2e^{-t_0\lambda_j(s)}$, $j = \overline{1,m}$.

Покажем для мнимых $\lambda_j(s)$ и иррациональном t_0/T, что $w_j(s) \neq 0$.
Но ранее мы уже рассматривали уравнение (7) и показали, что оно не имеет ненулевых вещественных корней при иррациональном t_0/T. Значит, определитель матрицы $P(s)$ тоже не равен нулю. И так как он является почти-периодической функцией, то $|\Delta(s)| \geq d > 0$. Поэтому существует $R^{-1}(s) \in C^{\infty}_{-\infty}$.

Значит, $\widetilde{u}(s) = R^{-1}(s)P(s)\widetilde{\varphi}(s) \in S$ и управление $u(x) \in S$. То есть мы доказали следующий результат.

Теорема 3. *Если собственные значения матрицы $P(s)$ — мнимые, то система* (8) *является* 0*-управляемой в пространстве S с управлением вида $u(x) \cdot \operatorname{sign}(t - t_0)$, где t_0/T — иррационально.*

В качестве примера рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \Delta w(x,t) + u(x)\operatorname{sign}(t - t_0).$$

Так как собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i|s| = \pm i\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k^2}$, то данное уравнение является 0-управляемым при иррациональном t_0/T.

В заключение рассмотрим пример уравнения второго порядка, у которого собственные значения принимают как вещественные так и мнимые значения.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \Delta w(x,t) + kw(x,t) + u(x)v(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \in [0,T].$$

Характеристическое уравнение для этого уравнения имеет вид $\lambda^2 + |s|^2 - k = 0$. При $k < 0$ собственные значения — чисто мнимые, и поэтому данное уравнение 0-управляемо в пространстве S с $v(t) = \operatorname{sign}(t - t_0)$, где t_0/T — иррационально.

Рассмотрим $k > 0$. Тогда собственные значения примут вид

$$\lambda_{1,2}(s) = \begin{cases} \pm\sqrt{k - |s|^2} & \text{при} \quad |s| \leq \sqrt{k} \\ \pm i\sqrt{|s|^2 - k} & \text{при} \quad |s| > \sqrt{k}. \end{cases}$$

Покажем, что и в этом случае уравнение является 0-управляемым в пространстве S с управлением данного вида.

Если с помощью стандартной замены переменных перейти от уравнения к системе, то матрица этой системы будет иметь вид

$$P(s)=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ k-|s|^2 & 0\end{pmatrix},\quad \text{при}\quad |s|^2=\sum_{k=1}^{n} s_k^2\,.$$

Собственные значения этой матрицы совпадают с собственными значениями нашего уравнения $\lambda_{1,2}$.

Фундаментальная матрица $\exp(tP(s))$ для случая **вещественных ненулевых** собственных значений имеет вид

$$\exp(tP(s))=\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t\sqrt{k-|s|^2} & -\frac{\operatorname{sh} t\sqrt{k-|s|^2}}{\sqrt{k-|s|^2}}\\ -\sqrt{k-|s|^2}\operatorname{sh} t\sqrt{k-|s|^2} & \operatorname{ch} t\sqrt{k-|s|^2}\end{pmatrix}.$$

Для случая **мнимых** собственных значений

$$\exp(tP(s))=\begin{pmatrix} \cos t\sqrt{|s|^2-k} & -\frac{\sin t\sqrt{|s|^2-k}}{\sqrt{|s|^2-k}}\\ -\sqrt{|s|^2-k}\sin t\sqrt{|s|^2-k} & \cos t\sqrt{|s|^2-k}\end{pmatrix}.$$

В случае **нулевых** собственных значений, т. е. при $|s|=\sqrt{k}$

$$\exp(tP(s))=\begin{pmatrix} e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$R(s)=E+\exp(-TP(s))-2\exp(-t_0P(s)).$$

Собственные значения этой матрицы равны

$$w_{1,2}(s)=1+\exp(-T\lambda_{1,2}(s))-2\exp(-t_0\lambda_{1,2}(s)).$$

В случае мнимых собственных значений $\lambda_{1,2}(s)$ при иррациональном t_0/T было показано, что $w_{1,2}(s)\neq 0$ и существует $R^{-1}(s)\in C^{\infty}_{-\infty}$.

Рассмотрим вещественные собственные значения $\lambda_{1,2}(s)$, причем $|\lambda_{1,2}(s)| \leq \sqrt{k}$. Покажем, что уравнение $1+e^y-2e^{\rho y}=0$ при некоторых $\rho\in(0;1)$ не имеет на сегменте $[-a;a]$ ненулевых вещественных корней.

Найдем минимум функции $\varphi(y)=1+e^y-2e^{\rho y}$.
$\varphi'(y)=e^y-2\rho e^{\rho y}=0$, значит стационарная точка $y_0=\frac{\ln 2\rho}{1-\rho}$. В ней и будет достигаться $\min\varphi(y)<0$.

Следовательно, при $y<0$ $\varphi(y)>\varphi(0)=0$, при $y\in(0,y_0)$ $\varphi(y)<0$, а второй вещественный корень функции $\varphi(y)$ будет больше y_0. Поэтому если взять ρ близким к 1, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\ln 2\rho}{1-\rho}>a$, то на сегменте $[-a;a]$ ненулевых корней у нашего уравнения не будет.

Значит существует обратная матрица $R^{-1}(s)$, причем она будет бесконечно дифференцируема и ограничена при $|s| < \sqrt{k}$.

Осталось разобрать случай, когда $|s| = \sqrt{k}$, т. е. матрица $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица $R(s) = \begin{pmatrix} 1 + e^{-T} - 2e^{-t_0} & -Te^{-T} + 2t_0 e^{-t_0} \\ 0 & 1 + e^{-T} - 2e^{-t_0} \end{pmatrix}$.

Определитель этой матрицы $\Delta = \left(1 + e^{-T} - 2e^{-t_0}\right)^2 \neq 0$ при $t_0 \neq T/2$.

Итак, получили следующий результат: при иррациональном t_0/T и $\frac{2t_0}{T} > (T - t_0)\sqrt{k}$ наше уравнение будет 0-управляемым в пространстве S с управлением вида $G(x) * \varphi(x) \cdot \operatorname{sign}(t - t_0)$, где $G(x) = \mathcal{F}^{-1}(R^{-1}(s)P(s))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G.M.Sklyar and L.V.Fardigola,The Markov trigonometric moment problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis. / Matem. Fizika, Analiz, Geometriya, 2002. — Vol. 9, No. 2. — P. 233-242.

2. L.V.Fardigola, Controllability Problems for the String Equation on a Half-Axis with a Boundary Control Bounded by a Hard Constant. / SIAM J. Control Optim., 2008. — Vol. 47, No. 4. — P. 2179-2199.

3. Макаров А.А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений. / Дифференциальные уравнения, – 1994. – Т. 30. – № 1. – С. 144 – 150.

4. Макаров А.А. Управляемость эволюционной системой дифференциальных уравнений в частных производных. /Тезисы международной конференции памяти Ляпунова, Х. – 2007. – С. 184 – 185.

5. Волевич Л.Р., Гиндикин С. Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. / Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. – М. : Наука, 1994. – 336 с.

6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. / М. : Физматгиз, 1956. – 632 с.

7. Фардигола Л.В. Интегральная краевая задача в слое для системы дифференциальных уравнений в частных производных. / Мат. сборник, – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 123 – 144.

Статья получена: 29.02.2016; окончательный вариант: 12.11.2016; принята: 15.11.2016.