Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.22–30

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 84, 2016, p. 22–30

УДК 519.7

Идентификация характеристик осцилляторных сетей.

Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Украина.
zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakvf@ukr.net.

Рассмотрена задача наблюдения состояния и идентификации параметров математической модели, представленной системой взаимосвязанных осцилляторов Ван дер Поля. Такие системы возникают при моделировании многих биологических процессов, имеющих циклический характер. Для решения использован метод синтеза инвариантных соотношений, разработанный для решения обратных задач теории управления. Метод позволяет формировать конечные соотношения, определяющие искомые неизвестные как функции от известных величин.
Ключевые слова: наблюдатель, идентификация параметров, инвариантные соотношения, осциллятор Ван дер Поля.

Жоголева Н. В., Щербак В. Ф. **Ідентифікація характеристик осциляторних мереж.** Розглянуто задачу спостереження стану та ідентифікації параметрів математичної моделі, яка представлена у вигляді системи взаємозалежних осциляторів Ван дер Поля. Такі системи виникають при моделюванні багатьох біологічних процесів, що мають циклічний характер. Використано метод синтезу інваріантних співвідношень, який розроблено для обернених задач теорії управління. Метод дозволяє синтезувати кінцеві співвідношення, що визначають шукані невідомі як функції від відомих величин.
Ключові слова: спостерігач, ідентифікація параметрів, інваріантні співвідношення, осцилятор Ван дер Поля.

N. V. Zhogoleva, V. F. Shcherbak. **Identification of characteristics of coupled oscillators.** The observation and identification problem for mathematical model of coupled Van der Pol oscillators is considered. Such systems arise under modeling of many cyclical biological processes. The synthesis of invariant relationships method is used developed for the solution of inverse control problems. The method allows to synthesize additional relations between the known and unknown quantities of the mathematical model of the object.
Keywords: observer, identification of parameters, invariant relations, Van der Pol oscillator.
2000 Mathematics Subject Classification 34C15, 93B07.

Введение.

Во многих приложениях физики, биологии в качестве модели нелинейных циклических процессов, имеющих устойчивый предельный цикл, используют систему, состоящую из одного или нескольких связанных между собой осцилляторов Ван дер Поля [1]. Одной из задач, возникающих при исследовании и моделировании биологических функций организма, таких как сердечная деятельность, дыхание, локомоторная активность, является задача определения полного вектора состояния и параметров таких систем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени [2], [3]. В работе предлагается способ получения асимптотических оценок скоростей и параметров, характеризующих частоты колебаний системы осцилляторов Ван дер Поля, по информации об их движении. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [4], который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами [5], [6]. В первой части работы соответствующая задача наблюдения и одновременной идентификации рассмотрена для одного осциллятора Ван дер Поля. Далее, полученные алгоритмы оценки распространены на систему связанных между собой нелинейных осцилляторов.

Задача определения характеристик осциллятора Ван Дер Поля. Рассмотрим уравнение Ван Дер Поля, описывающее процесс релаксационных колебаний [7]

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1}$$

Здесь x — отклонение точки от положения равновесия, μ — коэффициент при нелинейном слагаемом, который характеризует величину демпфирования, $\mu \geqslant 0$. Режим $\mu = 0$ соответствует колебаниям без трения и описывается уравнением гармонического осциллятора с собственной частотой ω. Одной из задач, возникающих при изучении и моделировании биологических процессов с помощью осцилляторных систем, является задача определения скорости точки x и параметра ω в предположении, что значения функции времени $x(t)$ доступны измерению.

Обозначив $x_1 = x,\ x_2 = dx/dt$, перепишем (1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -\omega^2 x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим задачу нахождения $x_2(t)$ и ω как задачу наблюдения и одновременной идентификации системы (2) по известной информации о движении. Такой информацией является выход – функция $y(t)$, а также те величины, которые могут быть получены с использованием только лишь значений выхода. В частности, далее известным будем считать любое решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^p,\ p \geqslant 1, \tag{3}$$

в которой функции $U(\xi, x_1)$ удовлетворяют достаточным условиям теорем существования и единственности решений для $t \in [0, \infty)$.

Для решения исходной задачи наблюдения и идентификации используем метод синтеза инвариантных соотношений, который позволяет получать в процессе функционирования системы асимптотические оценки неизвестных [6].

Задача 1. Найти асимптотически точные оценки переменной $x_2(t)$ и параметра ω системы (2) по известным значениям выхода $x_1(t)$.

Замечание. Достаточным условием локальной наблюдаемости и идентифицируемости [8] системы (2) является невырожденность якобиевой матрицы $J = \partial(y, \dot{y})/\partial(x_2, \omega)$, где производные от измеряемой функции $y(t) = x_1(t)$ взяты в силу системы (2). Так как $\det J = -2\omega x_1$, то система становится неидентифицируемой при $x_1(t) = 0$.

Используемый подход предполагает получение асимптотических оценок. В связи с тем, что условия идентифицируемости нарушаются на дискретном множестве моментов времени, предлагаемый ниже алгоритм оценивания будет использован для последовательного улучшения оценок неизвестных на интервалах знакопостоянства выхода $x_1(t)$.

Синтез дополнительных соотношений в задаче определения характеристик осцилятора Ван Дер Поля. Для решение задачи наблюдения и идентификации используем метод синтеза инвариантных соотношений, позволяющего получать в процессе функционирования системы асимптотические оценки неизвестных. Суть данного подхода состоит в динамическом расширении исходной системы дифференциальных уравнений (2) уравнениями (3), где p равно 2 – числу неизвестных: функции $x_2(t)$ и постоянной ω. При этом правые части $U(\xi, x_1)$ подбираются таким образом, чтобы полученная расширенная система дифференциальных уравнений (2),(3) допускала семейство инвариантных соотношений

$$F_i(x_1, x_2, \xi, \omega) = 0,\ i = 1, 2, \tag{4}$$

со следующими свойствами:

1) Соотношения (4) формируют дополнительные независимые уравнения для неизвестных, т.е. $rank \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_2, \omega)} = 2$;

2) Соответствующее (4) инвариантное многообразие $M = \{(x_1, x_2, \xi, \omega) \subseteq R^4 :\ F_i(x_1, x_2, \xi, \omega) = 0,\ i = 1, 2\}$ обладает свойством глобального притяжения для любых решений расширенной системы (2),(3). Иными словами на любых решениях

$$\lim_{t \to \infty} F_i(x_1(t), x_2(t), \xi(t), \omega) = 0,\ i = 1, 2.$$

Синтез дополнительных соотношений. Покажем, что для рассматриваемой задачи соотношения вида (4) существуют.

Чтобы свойство 1) было выполнено во всей рассматриваемой области будем искать их в виде

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \xi, \omega) &= x_2 - \xi_1 - \Psi_1(x_1) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \xi, \omega) &= \omega^2 - \xi_2 - \Psi_2(x_1) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где переменные $\xi_1(t), \xi_2(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений (3). На функции $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1), U_1(\xi_1, \xi_2, x_1), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1)$ пока не накладываем никаких ограничений, кроме требования непрерывной дифференцируемости по своим аргументам. Если эти функции выбраны так, что соотношения (5) становится инвариантными на рассматриваемом решении, то тогда неизвестные $x_2(t), \omega$ могут быть найдены непосредственно из равенств (5).

Утверждение 1. Для любых дифференцируемых функций $\Psi_1(x_1),\ \Psi_2(x_1)$ существуют управления $U_1(\xi_1, \xi_2, x_1), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1)$ такие, что равенства (5) выполняются тождественно на некоторых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений (2),(3).

*Доказательство.*Введем переменные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, которые характеризуют невязку в формулах (5) на решениях системы (2),(3).

$$x_2(t) - \xi_1(t) - \Psi_1(x_1(t)) = \varepsilon_1, \quad \omega^2 - \xi_2(t) - \Psi_2(x_1(t)) = \varepsilon_2. \tag{6}$$

Сделаем в уравнениях (2) замену переменных. Перейдем по формулам (6) от переменных x_2, ω^2 к переменным $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ соответственно. Дифференцируя (6) в силу системы (2),(3), получаем дифференциальные уравнения для отклонений

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -U_1 + (\varepsilon_1 + \xi_1 + \Psi_1(x_1)) \left[(\mu(1 - x_1^2) - \Psi_1'\right] - x_1(\varepsilon_2 + \xi_2 + \Psi_2(x_1)), \\ \dot{\varepsilon_2} &= -U_2 - \Psi_2'(\xi_1 + \varepsilon_1 + \Psi_1(x_1)), \end{aligned} \tag{7}$$

где знак $'$ означает дифференцирование по переменной x_1.

Чтобы равенства (5) выполнялись тождественно на некоторых решениях системы дифференциальных уравнений (2),(3), достаточно показать, что система дифференциальных уравнений (7) допускает тривиальное решение $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$.

Для этого фиксируем вид правых частей (3), а именно: для любых $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ положим

$$\begin{aligned} U_1(\xi_1, \xi_2, x_1) &= [\mu(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'(x_1)](\xi_1 + \Psi_1(x_1)) - (\xi_2 + \Psi_2(x_1))x_1, \\ U_2(\xi_1, \xi_2, x_1) &= -{\Psi_2}'(x_1)(\xi_1 + \Psi_1(x_1)). \end{aligned} \tag{8}$$

В результате система дифференциальных уравнений для отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ становится однородной

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= [\mu(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'(x_1)]\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= -{\Psi_2}'(x_1)\varepsilon_1, \end{aligned} \tag{9}$$

а значит допускает тривиальное решение. Утверждение доказано.

Таким образом, можно утверждать, что для любых дифференцируемых функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ начальные значения $\xi_1(0), \xi_2(0)$ в задаче Коши для дифференциальных уравнений (4) могут быть выбраны таким образом, что в момент $t = 0$ формулы (5) становятся верными равенствами. В частности, это означает, что начальные значения для отклонений $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = 0$. В этом случае равенства (5) на траектории расширенной системы (2),(3) выполняются тождественно, образуя, тем самым, систему дополнительных соотношений, в которых единственными неизвестными остаются $x_2(t), \omega$.

В общем случае осуществить такой выбор $\xi_1(0), \xi_2(0)$ не удается, поскольку для этого необходимо знать значения $x_2(0), \omega$, которые, собственно, и являются искомыми величинами. Для того, чтобы использовать формулы (5) для оценки $x_2(t), \omega$ на любом решении системы (2),(3) требуется из множества функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ выбрать такие, при которых тривиальное решение системы (9) обладало бы свойством глобальной асимптотической устойчивости.

Стабилизация отклонений от инвариантного соотношения. Рассмотрим задачу подбора функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$, остающихся пока свободными, с целью стабилизации решений системы (9). Введем обозначения:

$$V_1(x_1) = \mu(1 - x_1^2) - {\Psi_1}'(x_1), \quad V_2(x_1) = -{\Psi_2}'(x_1), \tag{10}$$

и перепишем систему (9) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= V_1(x_1)\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= V_2(x_1)\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Будем рассматривать функции $V_1(x_1), V_2(x_1)$ как управления, с помощью которых необходимо обеспечить глобальную асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (11).

При построении схемы решения исходной задачи будет учитывать тот факт, что положение $x_1(t)$ колеблющейся точки осциллятора Ван дер Поля принимает нулевые значения лишь на дискретном множестве изолированных моментов времени $t_i, i = 1, 2, ...$, которое не имеет предельной точки. Согласно сделаному замечанию к задаче 1, будем проводить последовательное улучшение оценок неизвестных на открытых интервалах $(0, t_1), (t_1, t_2), ...$, на каждом из которых выход отличен от нуля.

Опишем схему построения на отдельно взятом интервале. Пусть $t \in T_i = (t_i, t_{i+1})$, обозначим $k = \operatorname{sign} x_1(t),\ t \in T_i$. В качестве стабилизирующих управлений возьмем функции

$$V_1(x_1) = \alpha|x_1|,\ V_2(x_1) = \beta|x_1|, \tag{12}$$

где α, β – некоторые постоянные. При этих управлениях система (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= |x_1|(\alpha\varepsilon_1 - k\varepsilon_2), \\ \dot{\varepsilon_2} &= |x_1|\beta\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку положительная величина $|x_1(t)|$ является скалярным множителем при правых частях системы (13), то ее траектории и направление движения совпадают с соответствующими траекториями и направлением поля соростей системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{\eta_1} &= \alpha\eta_1 - k\eta_2, \\ \dot{\eta_2} &= \beta\eta_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ – корни характеристического уравнения системы (14), тогда, по теореме Виета, $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$, $\beta = k\lambda_1\lambda_2$. Обозначив $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, получаем, что решения системы (14) стремятся к нулю с показателем затухания, равным λ:

$$\sqrt{{\eta_1}^2 + {\eta_2}^2} = O(e^{\lambda t}).$$

Такой же характер будут иметь и решения системы (13).

Поскольку $V_1(x_1), V_2(x_1)$ определены, то равенства (10) можем рассматривать как дифференциальные уравнения для искомых функций $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$, формирующих инвариантные соотношения (5). Эти уравнения имеют вид

$$\Psi_1{}' = \mu(1 - x_1^2) - \alpha k x_1, \quad \Psi_2{}' = -\beta k x_1, \tag{15}$$

Чтобы в момент смены знака $x_1(t)$ правые части формул (5) оставались непрерывными, частное решение (15) выберем в соответствии с условием $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$. Тогда

$$\Psi_1(x_1) = x_1 \left[\mu(1 - \frac{{x_1}^2}{3}) - \frac{\alpha|x_1|}{2}\right], \quad \Psi_2(x_1) = \frac{-\beta k x_1^2}{2}, \tag{16}$$

Окончательно получаем, что формулы (5), предназначенные для оценки искомых неизвестных, принимают вид

$$\begin{aligned} x_2 &= \xi_1 + x_1 \left[\mu(1 - \frac{{x_1}^2}{3}) - \frac{\alpha|x_1|}{2}\right] + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2), \\ \omega^2 &= \xi_2 - \frac{\beta k x_1^2}{2} + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2), \end{aligned} \tag{17}$$

где функции $\xi_1(t), \xi_2(t)$ являются решением задачи Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений (3), которую, с учетом (8),(16), можем записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi_1} &= \alpha|x_1| \left[\xi_1 + \mu x_1(1 - \frac{x_1^2}{3}) - \frac{\alpha k x_1^2}{2}\right] - (\xi_2 - \frac{\beta k x_1^2}{2})x_1, \\ \dot{\xi_2} &= \beta|x_1| \left[\xi_1 + \mu x_1(1 - \frac{x_1^2}{3}) - \frac{\alpha k x_1^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения (17),(18), определяют семейство наблюдателей, параметризованное постоянными $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$, $\beta = k\lambda_1\lambda_2$ и начальными условиями $\xi_1(0), \xi_2(0)$. При этом каждый из этих наблюдателей, при отрицательных λ_1, λ_2, обеспечивает асимптотическое оценивание искомых неизвестных: переменной $x_2(t)$ и параметра ω.

Система связанных осцилляторов. Рассмотрим теперь механическую модель системы, составленную из n осцилляторов Ван дер Поля. Предполагается, что положение каждого из осцилляторов доступно измерению $y_i(t) = x_{1i}(t)$ и они соединены между собой упругими связями с линейными жёсткостями k_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$. Системы такого рода используются в медико-биологических исследованиях. В частности, случай $n = 2$ описывает распространенную модель сердечной деятельности, а $n = 3$ модель ходьбы человека [1]. Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x_{i1}} &= x_{i2}, \\ \dot{x_{i2}} &= -{\omega_i}^2 x_{i1} + \mu_i(1 - x_{i1}^2)x_{i2} + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}), \\ y_i &= x_{i1}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{19}$$

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки переменных $x_{i2}(t)$ и параметров ω_i системы (19) по известным значениям выхода $x_{i1}(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Решение задачи 2 проведем по описанной выше схеме. Представим неизвестные в виде суммы неопределенных величин

$$\begin{aligned} x_{i2}(t) &= \xi_{i1}(t) + \Psi_{i1}(x_{i1}(t)) + \varepsilon_{i1}(t), \\ \omega_i^2 &= \xi_{i2}(t) + \Psi_{i2}(x_{i1}(t)) + \varepsilon_{i2}(t), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\varepsilon_{ij}(t)$ – соответствующие отклонения, $\xi_{ij}(t)$ – решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi_{ij}} = U_{ij}(\xi_{ij}, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}),\ \xi_{ij}(0) = \xi_{ij_0} \in R,\ i = \overline{1, n},\ j = 1, 2. \tag{21}$$

Правые части системы (21) должны зависеть только лишь от известных величин. В качестве управлений $U_i(\xi_i, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1})$ возьмем функции

$$\begin{aligned} U_{i1} &= \left[\mu_i(1 - x_{i1}^2) - {\Psi_{i1}}'\right](\xi_{i1} + \Psi_{i1}) - (\xi_{i2} + \Psi_{i2})x_{i1} + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}), \\ U_{i2} &= -{\Psi_{i2}}'(\xi_{i1} + \Psi_{i1})\ i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{22}$$

В результате получаем для отклонений n однотипных систем дифференциальных уравнений вида (9)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_{i1}} &= [\mu_i(1 - x_{i1}^2) - {\Psi_{i1}}']\varepsilon_{i1} - x_{i1}\varepsilon_{i2}, \\ \dot{\varepsilon_{i2}} &= -{\Psi_{i2}}'\varepsilon_{i1}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя найденные ранее решения (11), запишем уравнения наблюдателя скоростей системы n осцилляторов Ван дер Поля

$$x_{i2} = \xi_{i1} + x_{i1}\left[\mu(1 - \frac{x_{i1}^2}{3}) - \frac{\alpha|x_{i1}|}{2}\right], \qquad (24)$$
$$\omega_i{}^2 = \xi_{i2} - \frac{\beta k x_{i1}^2}{2}, \quad i = \overline{1,n},$$

где функции $\xi_{i1}(t), \xi_{i2}(t)$ являются решением задачи Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi_{i1}} = \alpha|x_{i1}|\left[\xi_{i1} + \mu_i x_{i1}(1 - \frac{x_{i1}^2}{3}) - \frac{\alpha k x_{i1}^2}{2}\right] - x_{i1}(\xi_{i2} - \frac{\beta k x_{i1}^2}{2}) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}),$$
$$\dot{\xi_{i2}} = \beta|x_{i1}|\left[\xi_{i1} + \mu_i x_{i1}(1 - \frac{x_{i1}^2}{3}) - \frac{\alpha k x_{i1}^2}{2}\right], \quad i = \overline{1,n}. \qquad (25)$$

Численное моделирование. Предложенная в работе схема была численно промоделирована для широкого спектра начальных условий и параметров системы (1). Результаты одного из вариантов счета для отдельно взятого осциллятора Ван Дер Поля приведены на рисунке. В качестве известного выхода системы (2) взята координата $x_1(t)$ – численное решение системы (2) с начальными условиями $x_1(0) = 2.5$; $x_2(0) = -5.0$ и параметрами $\omega = 2.0$; $\mu = 1.5$. Начальные условия для решений вспомогательной системы (18) равны $\xi_{10} = -1.0$; $\xi_{20} = 2.0$. Параметры, регулирующие скорость сходимости: $\lambda_1 = -1.0$; $\lambda_2 = -1.3$.

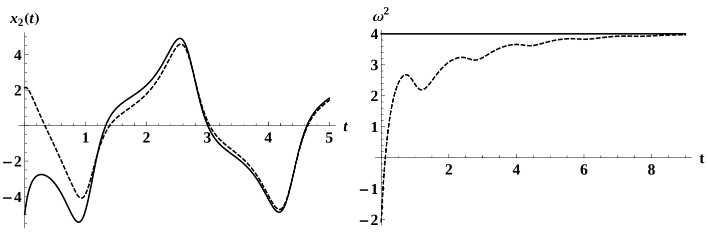

Рис. Асимптотическое оценивание переменной $x_2(t)$ и параметра ω^2

На рисунке искомые величины: координата $x_2(t)$, найденная в результате численного интегрирования уравнения Ван дер Поля и параметр ω^2 (изображены непрерывными линиями) сопоставлены с их оценками (точечные кривые), полученными по формулам (17).

Результаты численного моделирования показывают работоспособность предложенного способа решения задачи наблюдения скорости и идентификации параметра, характеризующего частоту колебаний осциллятора Ван дер Поля. В силу того, что решение соответствующей задачи 2 сводится к системе из n систем (24),(25), аналогичных (17),(18), подобное утверждение верно и для ансамбля связанных между собой осцилляторов.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (№ гос. регистр. 0116U007161).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В. Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3-42.

2. Grudzinski K., Zebrowski J.J. Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336, 2003. – pp 153-162.

3. Булдаков Н.С., Самочетова Н.С., Ситников А.В., Суятинов С.И. Моделирование связей в системе «сердце-сосуды» // Наука и образование, Электронный научно-технический журнал, 2013. – С. 123.

4. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела, 1974. -– Вып. 6.

5. В.Ф.Щербак. Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика тведого тела, 2004. – **33**, – С. 197 -216.

6. Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины, 2015. – т.29.– С. 69-76.

7. Van der Pol B. On relaxation oscillations // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci., 1927. – V.2(7).– pp. 978–992.

8. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993.

Статья получена: 11 ноября 2016; принята: 12 декабря 2016.