

## Неустойчивость Розенцвейга в двухслойной системе несмешивающихся намагничивающихся жидкостей

И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, 61002, Харьков, Украина  
dptmech@univer.kharkov.ua*

Рассматривается устойчивость равновесия двухслойной системы несмешивающихся намагничивающихся жидкостей, разделенных тонкой горизонтальной пластиной с отверстием. Предложен численный метод построения границы области устойчивости в пространстве физических параметров рассматриваемой системы. В случае кругового отверстия проведены расчеты границы области устойчивости и мод наиболее быстро растущих возмущений.

*Ключевые слова:* магнитная жидкость, равновесные формы, неустойчивость равновесия.

І. Д. Борисов, С. І. Поцелуєв. **Нестійкість Розенцвейга в двошаровій системі незмішуваних намагнічуваних рідин.** Розглядається стійкість рівноваги двошарової системи незмішуваних намагнічуваних рідин, розділених тонкою горизонтальною пластинною з отвором. Запропоновано чисельний метод побудови границі області стійкості в просторі фізичних параметрів даної системи. Для випадку кругового отвору проведені розрахунки границі області стійкості і мод найбільш швидко зростаючих збурень.

*Ключові слова:* магнітна рідина, рівноважні форми, нестійкість рівноваги.

I. D. Borisov, S. I. Potseluev. **Rozenzweig instability of two-layer system of immiscible ferrofluid.** The stability of equilibrium for two-layer system of immiscible ferrofluids, separated by thin horizontal plate with a hole is considered. A numerical method for calculation of stability boundary in the space of dimensionless physical parameters of the system is proposed. In the case of circular hole the stability boundary and the most rapidly growing perturbations were calculated.

*Keywords:* ferrofluid, equilibrium forms, stability of equilibrium.

*2000 Mathematics Subject Classification:* 76W05

## ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость горизонтального слоя магнитной жидкости (МЖ) в вертикальном магнитном поле (неустойчивость Розенцвейга) является интересным примером процессов самоорганизации в физических системах. С увеличение магнитного поля горизонтальная свободная поверхность МЖ, теряя устойчивость, сменяется упорядоченной структурой конусообразных пиков с гексагональным расположением внутри круглой кюветы. Исследованию неустойчивости Розенцвейга посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ; библиографию этих работ и изложение основных результатов можно найти, обратившись к монографиям [1 – 4].

В работах [5 – 8], выполненных в последнее время, уточнены критические значения индукции поля, с превышением которых на изначально плоской поверхности МЖ образуются пространственные структуры, определены инкременты наиболее быстро растущих возмущений, проведено сопоставление теоретических результатов с результатами экспериментов и численного моделирования.

В сильном магнитном поле тонкие слои МЖ могут распадаться на отдельные капли, расположенные в узлах гексагональной решетки. Специфические особенности распада тонких слоев МЖ исследовались в работах [9 – 12].

Влияние горизонтального магнитного поля на устойчивость равновесия МЖ рассматривалось в [13 – 14]. Теоретически и экспериментально была доказана возможность стабилизации поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей (верхний слой – более тяжелая жидкость) вращающимся магнитным полем.

Одним из основных факторов, определяющих процессы перехода к новому состоянию равновесия при потере устойчивости, является ограниченность свободной поверхности МЖ [5, 15]. В данной работе рассматривается влияние этого фактора на примере системы несмешивающихся жидкостей, разделенных тонкой горизонтальной пластиной с отверстием. Подробно исследуется случай кругового отверстия. Предложен метод построения границы области устойчивости в пространстве физических параметров рассматриваемой системы. Найдены наиболее быстро растущие моды возмущений, определяющие начальную стадию эволюции системы в закритическом магнитном поле.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двухслойную систему несмешивающихся жидкостей, разделенных горизонтальной пластиной с отверстием (см. рис.1). Обозначим через  $\Omega_1, \Omega_2$  области, занимаемые нижней и верхней жидкостями в состоянии равновесия, через  $\Omega_3, \Omega_4$  – полубесконечные области под нижней и над верхней жидкостями. Пусть  $h_1, h_2$  – толщина нижнего и верхнего слоев жидкостей, соответственно. Толщину пластины  $\delta$ , разделяющей жидкости, будем считать малой по сравнению с  $h_1, h_2$ . Это позволяет отождествлять пластину с ее срединной поверхностью, полагая  $\delta = 0$ .

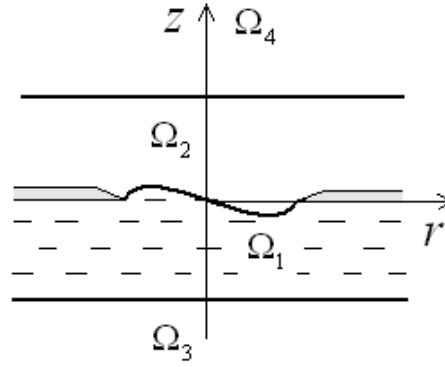


Рис. 1. К постановке задачи

Среду в каждой из областей  $\Omega_k$ ,  $k \in \overline{1,4}$  будем считать однородно намагничивающейся. Связь между индукцией  $\vec{B}$  и напряженностью  $\vec{H}$  магнитного поля в  $\Omega_k$  запишем в виде

$$\vec{B}^{(k)} = \mu_0 \mu^{(k)}(H^{(k)}) \vec{H}^{(k)} \quad k \in \overline{1,4}. \quad (1)$$

Здесь  $\mu_0$  – абсолютная магнитная проницаемость вакуума,  $\mu^{(k)}(H^{(k)})$  – относительная магнитная проницаемость  $k$ -й среды. Функции  $\mu^{(k)} : H \rightarrow \mu^{(k)}(H)$ ,  $k = \overline{1,4}$  предполагаются заданными. В (1) и везде далее верхний индекс в круглых скобках означает номер области, к которой относится та или иная величина.

Горизонтальная поверхность раздела  $z = 0$  и однородное магнитное поле  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  ( $B_0 = const$ ,  $\vec{e}_z$  – орт вертикальной оси  $z$ ) отвечают одному из возможных состояний равновесия жидкостей. Рассмотрим движение жидкостей вблизи этого равновесного состояния. Вязкостью жидкостей будем пренебрегать. В этом случае эволюция поверхности раздела  $\Gamma$  определяется потенциальными составляющими поля скоростей  $\vec{v}^{(k)} = \nabla(\partial\varphi^{(k)}/\partial t)$ ,  $k = 1, 2$ , где  $\varphi^{(k)}(t, \vec{x})$  – потенциал малых смещений частиц  $k$ -й жидкости. Обозначим через  $\zeta(t, x, y)$  отклонения поверхности  $\Gamma$  от горизонтального уровня, через  $\psi^{(k)}(t, \vec{x})$ ,  $k = \overline{1,4}$  – возмущения потенциала магнитного поля в  $\Omega_k$ . В линейном приближении движение жидкостей вблизи равновесного состояния описывается следующей системой уравнений (относительно  $\varphi, \zeta, \psi$ ):

$$\Delta\varphi^{(k)}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, k \in \overline{1,2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z} = \zeta \quad \text{на } \Gamma; \quad (3)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad \text{на } S_{12} \cup S_{13}, \quad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \text{на } S_{12} \cup S_{24}; \quad (4)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2} + \sigma(-\Delta_\Gamma + b)\zeta -$$

$$-B_0 \left( q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \right) = c_\Gamma(t) \quad \text{на } \Gamma; \quad (5)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma; \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mu_k \widehat{\nabla}^{(k)} \psi^{(k)} = 0, \quad \text{в } \Omega_k, \quad k \in \overline{1, 4}; \quad (7)$$

$$\psi^{(1)} - \psi^{(2)} = \left( H_0^{(1)} - H_0^{(2)} \right) \zeta, \quad \mu_1 q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} = \mu_2 q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \quad \text{на } \Gamma; \quad (8)$$

$$\psi^{(j)} = \psi^{(k)}, \quad \mu_j q_j \frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial z} = \mu_k q_k \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial z} \quad \text{на } S_{jk}, \quad jk = 12, 13, 24; \quad (9)$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\vec{x}| \rightarrow \infty; \quad (10)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0(x, y), \quad \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t=0} = \zeta^1(x, y) \quad \text{на } \Gamma; \quad (11)$$

$$b := \frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\sigma}, \quad \widehat{\nabla}^{(k)}(\cdot) := \nabla(\cdot) + \frac{\mu_H^{(k)}}{\mu_k} \vec{H}_0^{(k)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z},$$

$$q_k := 1 + \frac{\mu_H^{(k)} H_0^{(k)}}{\mu_k}, \quad \mu_k := \mu^{(k)}(H_0^{(k)}), \quad \mu_H^{(k)} := \left. \frac{d\mu^{(k)}}{dH} \right|_{H=H_0^{(k)}}, \quad k \in \overline{1, 4}.$$

Здесь  $\rho_k$  – плотность  $k$ -й жидкости,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения на поверхности раздела жидкостей  $\Gamma$ ;  $H_0^{(k)} (= const)$  – напряженность магнитного поля в области  $\Omega_k$  в состоянии равновесия;  $S_{jk}$  – твердая поверхность раздела  $j$ -й и  $k$ -й областей;  $\Delta_\Gamma$  – оператор Лапласа на  $\Gamma$ ;  $\zeta^0, \zeta^1$  – начальные отклонения и скорости точек поверхности раздела жидкостей,  $c_\Gamma(t)$  – произвольная функция времени  $t$ .

Функция  $\zeta(t, x, y)$  должна удовлетворять условию

$$\int_\Gamma \zeta(t, x, y) d\Gamma = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (12)$$

Уравнения (2) – следствие потенциальности движения и условия несжимаемости жидкостей. Равенства (3) представляют собой линеаризованные кинематические условия на поверхности  $\Gamma$ , равенства (4) – условия непроницаемости твердых поверхностей, смоченных жидкостями. Уравнение (5) получено линеаризацией динамического условия для скачка нормальных напряжений на поверхности  $\Gamma$ , обусловленного капиллярными силами и намагничиванием жидкостей. Условие (6) означает, что контур  $\partial\Gamma$ , совпадающий с острой кромкой пластины, в процессе колебаний жидкостей остается неподвижным. Это условие подтверждается экспериментально для достаточно малых внешних возмущений. Уравнения (7)– (10) получены линеаризацией уравнений и граничных условий для потенциала магнитного поля.

## 2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

**2.1. Общие свойства спектра собственных значений и собственных мод колебаний.** Свободные колебания жидкостей описываются решениями задачи (2)–(10), зависящими от времени по закону

$$(\zeta, \varphi, \psi) = (\zeta(x, y), \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})) \exp(i\omega t) \quad (13)$$

где  $\zeta(x, y), \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})$  – моды колебаний поверхности раздела, потенциала смещений частиц жидкостей и потенциала возмущений напряженности магнитного поля,  $\omega$  – круговая частота колебаний. Подставляя (13) в (5), получим:

$$\begin{aligned} \sigma(-\Delta_\Gamma + b)\zeta - B_0 \left( q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \right) &= \\ &= \lambda(\rho_1 \varphi^{(1)} - \rho_2 \varphi^{(2)}) \quad \text{на } \Gamma \quad (\lambda := \omega^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Следуя [17], можно показать, что спектральная задача (2)–(10), где вместо (5) следует принять условие (14), имеет дискретный спектр  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  вещественных собственных значений, все собственные значения  $\lambda_k$  конечной кратности, причем  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Собственные значения  $\lambda_k$  будем нумеровать в порядке возрастания с учетом их кратности. Собственные моды колебаний поверхности раздела жидкостей, отвечающие  $\lambda_k$ , обозначим через  $\zeta_k$ . Аналогичные обозначения  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  введем для собственных мод потенциала смещений частиц жидкостей и потенциала магнитного поля. Обозначим через  $\mathcal{H}(\Gamma)$  подпространство функций, ортогональных константам в гильбертовом пространстве  $\mathcal{L}_2(\Gamma)$ . Можно показать, что система собственных функции  $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$  образует базис в пространстве  $\mathcal{H}(\Gamma)$ .

Для построения решений (13) рассмотрим вначале вспомогательную спектральную краевую задачу (относительно  $u(x, y), \nu, \eta = \text{const}$ );

$$-\Delta_\Gamma u(x, y) + \eta = \nu u(x, y) \quad \text{в } \Gamma, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma, \quad \int_\Gamma u d\Gamma = 0. \quad (15)$$

Как известно, задача (15) имеет дискретный спектр собственных значений  $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ , все собственные значения  $\nu_k$  положительны, конечной кратности,  $\nu_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Собственные функции  $u_k$  образуют ортогональный базис  $\{u_k\}_{k=1}^\infty$  в пространстве  $\mathcal{H}(\Gamma)$ ,

$$\int_\Gamma u_j u_k d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \nabla_\Gamma u_j \cdot \nabla_\Gamma u_k d\Gamma = 0 \quad \forall j \neq k. \quad (16)$$

Здесь  $\nabla_\Gamma(\cdot)$  – поверхностный градиент функций, определенных на  $\Gamma$ .

Обозначим через  $\varphi_k^{(1)}(\vec{x}), \varphi_k^{(2)}(\vec{x})$  решения задач (2)–(4) при  $\zeta = u_k(x, y)$ . Введем функции  $\psi_k(\vec{x}) := (\psi_k^{(1)}(\vec{x}), \psi_k^{(2)}(\vec{x}), \psi_k^{(3)}(\vec{x}))$  – решения задачи (7)–(10)

при  $\zeta = u_k(x, y)$ . Приближенное решение спектральной задачи о собственных колебаниях жидкостей будем отыскивать в виде:

$$\zeta \simeq \sum_{k=1}^N a^k u_k, \quad \varphi \simeq \sum_{k=1}^N a^k \varphi_k, \quad \psi \simeq \sum_{k=1}^N a^k \psi_k, \quad (17)$$

где  $a^k, k \in \overline{1, N}$  – заранее неизвестные коэффициенты, а число  $N$  в (17) выбирается из условий практической сходимости вычислительного процесса, описанного ниже.

Коэффициенты  $a^k$  и приближенные собственные значения  $\lambda^N$  будем определять как решения алгебраической спектральной задачи:

$$\sigma(\mathcal{B}^N + b\mathcal{D}^N)a - B_0\mathcal{M}^N a = \lambda^N \mathcal{C}^N a, \quad (18)$$

$$\mathcal{B}^N := [b_{jk}]_{j,k=1}^N, \quad \mathcal{C}^N := [c_{jk}]_{j,k=1}^N, \quad \mathcal{D}^N := [d_{jk}]_{j,k=1}^N, \quad \mathcal{M}^N := [m_{jk}]_{j,k=1}^N, \\ a := (a^1, a^2, \dots, a^N)^\tau.$$

Здесь индекс  $\tau$  означает операцию транспонирования, переводящую вектор–строку в вектор–столбец. Элементы матриц в (18) определяются следующими равенствами:

$$b_{jk} := - \int_{\Gamma} u_j \Delta_{\Gamma} u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u_j \cdot \nabla_{\Gamma} u_k d\Gamma; \quad c_{jk} := \int_{\Gamma} u_j \left( \rho_1 \varphi_k^{(1)} - \rho_2 \varphi_k^{(2)} \right) d\Gamma; \\ d_{jk} := \int_{\Gamma} u_j u_k d\Gamma; \quad m_{jk} := \int_{\Gamma} u_j \left( q_1 \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi_k^{(2)}}{\partial z} \right) d\Gamma. \quad (19)$$

Уравнения системы (18) легко следуют из динамического условия (14) в силу условий ортогональности (16).

Матрицы  $\mathcal{B}^N$  и  $\mathcal{D}^N$  – диагональные, что легко следует из (16). Выражения для элементов матриц  $\mathcal{C}^N$  и  $\mathcal{M}^N$  приводятся к виду:

$$c_{jk} := \sum_{m=1}^2 \int_{\Omega_m} \rho_m \nabla \varphi_j^{(m)} \cdot \nabla \varphi_k^{(m)} d\Omega, \quad m_{jk} := \sum_{m=1}^4 \int_{\Omega_m} \mu_0 \mu_m \nabla \psi_j^{(m)} \cdot \widehat{\nabla} \psi_k^{(m)} d\Omega. \quad (20)$$

Отсюда следует симметричность и положительная определенность матриц  $\mathcal{C}^N$  и  $\mathcal{M}^N$ .

Обозначим через  $\lambda_j^N, a_j := (a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^N)^\tau, j \in \overline{1, N}$  – собственные значения и собственные векторы задачи (18). Введем функции

$$\zeta_j^N = \sum_{k=1}^N a_j^k u_k, \quad \varphi_j^N = \sum_{k=1}^N a_j^k \varphi_k, \quad \psi_j^N = \sum_{k=1}^N a_j^k \psi_k. \quad (21)$$

Можно показать, что  $\lambda_j^N \rightarrow \lambda_j$  при  $N \rightarrow \infty$ , а функции  $\zeta_j^N(x, y)$  и их первые производные сходятся в норме пространства  $\mathcal{L}_2(\Gamma)$  к собственным функциям задачи о свободных колебаниях жидкостей  $\zeta_j(x, y)$  и их производным по переменным  $x$  и  $y$ .

**2.2. Случай кругового отверстия.** Рассмотрим случай кругового отверстия радиуса  $R$ . Перейдем к безразмерным переменным, полагая

$$\varphi_{nk}(r, \vartheta) = R^2 \bar{\varphi}_{nk}(\bar{r}, \vartheta), \quad \psi_{nk}(r, \vartheta) = \mu_0^{-1} B_0 R \bar{\psi}_{nk}(\bar{r}, \vartheta),$$

$$\lambda = \sigma \rho_1^{-1} R^{-3} \bar{\lambda}, \quad r = R\bar{r}, \quad h_1 = R\bar{h}_1, \quad h_2 = R\bar{h}_2.$$

Все приводимые ниже выражения вплоть до раздела 3.2 записаны в безразмерной форме, причем черта в обозначениях безразмерных величин отброшена.

В рассматриваемом случае собственные значения и собственные функции задачи (15) легко определяются в явном виде:

$$\nu_{nk} = (\alpha_{nk})^2, \quad u_{0k}(r) = k_{0k}(J_0(\alpha_{0k}r) - J_0(\alpha_{0k})), \quad (22)$$

$$u_{nk}(r, \vartheta) = k_{nk} J_n(\alpha_{nk}r) \cos n(\vartheta - \vartheta_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $J_n(\cdot)$  – функция Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка,  $r, \vartheta$  – полярные координаты,  $\vartheta_0$  – произвольная константа,  $k_{nk}$  – нормирующие коэффициенты,  $\alpha_{nk}$  – положительные корни уравнений:

$$2J_1(\alpha_{0k})/\alpha_{0k} - J_0(\alpha_{0k}) = 0, \quad J_n(\alpha_{nk}) = 0, \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Здесь и далее, в отличие от предыдущего раздела, используется двойная индексация собственных значений и собственных функций задачи (15).

Отметим, что корни первого из уравнений (23) в точности совпадают с корнями второго уравнения (23) при  $n = 2$ , т.е.  $\alpha_{0k} = \alpha_{2k} \forall k = 1, 2, \dots$ , что легко следует из рекуррентного соотношения для функций Бесселя:  $J_n(r) = 2(n-1)J_{n-1}(r)/r - J_{n-2}(r)$  при  $n = 2$ .

Функции  $u_{nk}(r, \vartheta)$  являются линейной комбинацией собственных функций  $u_{nk}^c(r, \vartheta)$  и  $u_{nk}^s(r, \vartheta)$ ,

$$\left. \begin{array}{l} u_{nk}^c(r, \vartheta) \\ u_{nk}^s(r, \vartheta) \end{array} \right\} := k_{nk} J_n(\alpha_{nk}r) \begin{cases} \cos(n\vartheta), \\ \sin(n\vartheta). \end{cases}$$

Решения краевых задач (2)–(4) при  $\zeta = u_{nk}(r, \vartheta)$  представим в виде:

$$\varphi_{nk}^{(m)}(r, \vartheta, z) = \overset{\circ}{\varphi}_{nk}^{(m)}(r, z) \cos n(\vartheta - \vartheta_0), \quad m = 1, 2. \quad (24)$$

Функции  $\overset{\circ}{\varphi}_{nk}^{(1)}(r, z)$ ,  $\overset{\circ}{\varphi}_{nk}^{(2)}(r, z)$  будем отыскивать в виде разложений в интеграл Ганкеля [16] по переменной  $r$ :

$$\overset{\circ}{\varphi}_{nk}^{(1)}(r, z) := \int_0^\infty f_{nk}(s) \frac{\text{ch}(s(h_1 + z))}{\text{sh}(sh_1)} J_n(sr) ds \quad (-h_1 < z < 0),$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_{nk}^{(2)}(r, z) := - \int_0^\infty f_{nk}(s) \frac{\text{ch}(s(h_2 - z))}{\text{sh}(sh_2)} J_n(sr) ds \quad (0 < z < h_2). \quad (25)$$

Функции  $\varphi_{nk}^{(m)}(r, \vartheta, z)$  удовлетворяют уравнениям (2) и граничным условиям (4) на поверхностях  $S_{13}, S_{24}$ . Удовлетворяя условиям (3), (4) на поверхностях  $\Gamma$  и  $S_{12}$ , получим:

$$\int_0^\infty f_{nk}(s) J_n(sr) s ds = \begin{cases} u_{nk}(r) & (0 < r < 1), \\ 0 & (1 < r < \infty). \end{cases} \quad (26)$$

Воспользуемся формулами обращения для преобразований Ганкеля [16]:

$$f_{nk}(s) = \int_0^1 u_{nk}(r) J_n(sr) r dr \quad (27)$$

Подставляя (22) в (27), получим:

$$f_{0k}(s) := \frac{k_{0k} \alpha_{0k} J_1(\alpha_{0k}) J_2(s)}{s^2 - \alpha_{0k}^2}, f_{nk}(s) := -\frac{k_{nk} \alpha_{nk} J_{n+1}(\alpha_{nk}) J_n(s)}{s^2 - \alpha_{nk}^2} \quad (n \neq 0). \quad (28)$$

Решения краевой задачи (7)–(10) при  $\zeta = u_{nk}(r, \vartheta)$  отыскиваем в виде аналогичном (24):

$$\psi_{nk}^{(m)}(r, \vartheta, z) = \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(m)}(r, z) \cos n(\vartheta - \vartheta_0), \quad m \in \overline{1, 4}. \quad (29)$$

Представляя функции  $\overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(m)}(r, z)$ ,  $m \in \overline{1, 4}$  в виде разложений в интеграл Ганкеля по переменной  $r$  и удовлетворяя условиям (7)–(10) при  $\zeta = u_{nk}(r, \vartheta)$ , получим:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(1)}(r, z) &= \int_0^\infty A_{nk}^{(1)}(s) \left[ \operatorname{ch} \frac{(h_1 + z)s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \operatorname{sh} \frac{(h_1 + z)s}{\sqrt{q_1}} \right] J_n(rs) s ds, \\ \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(2)}(r, z) &= \int_0^\infty A_{nk}^{(2)}(s) \left[ \operatorname{ch} \frac{(h_2 - z)s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2} \sqrt{\frac{q_4}{q_2}} \operatorname{sh} \frac{(h_2 - z)s}{\sqrt{q_2}} \right] J_n(rs) s ds, \\ \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(3)}(s, z) &= \int_0^\infty A_{nk}^{(3)}(s) \exp \frac{(h_1 + z)s}{\sqrt{q_3}} J_n(rs) s ds, \\ \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(4)}(s, z) &= \int_0^\infty A_{nk}^{(4)}(s) \exp \frac{(h_2 - z)s}{\sqrt{q_4}} J_n(rs) s ds, \end{aligned} \quad (30)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} A_{nk}^{(1)}(s) = A_{nk}^{(3)}(s) &= -\frac{(\mu_1 - \mu_2) \sqrt{q_2} f_{nk}(s) S_2(s)}{\mu_1 D(s)}, \\ A_{nk}^{(2)}(s) = A_{nk}^{(4)}(s) &= \frac{(\mu_1 - \mu_2) \sqrt{q_1} f_{nk}(s) S_1(s)}{\mu_2 D(s)}, \\ D(s) &= \mu_1 \sqrt{q_1} S_1(s) C_2(s) + \mu_2 \sqrt{q_2} S_2(s) C_1(s), \end{aligned}$$



$$C_1(s) = \operatorname{ch} \frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \operatorname{sh} \frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}}, \quad C_2(s) = \operatorname{ch} \frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2} \sqrt{\frac{q_4}{q_2}} \operatorname{sh} \frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}},$$

$$S_1(s) = \operatorname{sh} \frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \operatorname{ch} \frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}}, \quad S_2(s) = \operatorname{sh} \frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2} \sqrt{\frac{q_4}{q_2}} \operatorname{ch} \frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}}.$$

Уравнения (18) распадаются на независимые уравнения при каждом  $n$ :

$$(\mathcal{B}_n^N + \operatorname{Bo} \mathcal{D}_n^N - \operatorname{WM}_n^N) a = \lambda_n^N \mathcal{C}_n^N a, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (31)$$

$$\operatorname{Bo} := \frac{g(\rho_1 - \rho_2) R^2}{\sigma}, \quad \operatorname{W} := \frac{B_0^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 \sqrt{q_1 q_2} R}{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \sigma}.$$

Безразмерные параметры  $\operatorname{Bo}$  (– число Бонда) и  $\operatorname{W}$  характеризуют отношение сил, обусловленных гравитационным и магнитным полями, к капиллярным силам, соответственно.

Элементы матриц  $\mathcal{B}_n^N$  и  $\mathcal{D}_n^N$  имеют вид:

$$b_{jk} = (\varkappa_{nj})^2 d_{jk}, \quad d_{jk} := \frac{1}{2} (k_{nj})^2 J_{n+1}^2(\varkappa_{nj}) \delta_{jk}, \quad (32)$$

$$j, k \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя (24) в (19) и учитывая при этом (25), (28), после несложных преобразований получим:

$$c_{jk} = k_{nj} k_{nk} \int_0^\infty \left[ \operatorname{cth}(h_1 s) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{cth}(h_2 s) \right] f_{nj}(s) f_{nk}(s) ds, \quad (33)$$

$$j, k \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя (29) в последнее из выражений (19), будем иметь:

$$m_{jk} = k_{nj} k_{nk} \int_0^\infty \frac{S_1(s) S_2(s)}{D(s)} f_{nj}(s) f_{nk}(s) s^2 ds, \quad (34)$$

$$j, k \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим через  $\lambda_{nj}^N$ ,  $a_{nj} := (a_{nj}^1, a_{nj}^2, \dots, a_{nj}^N)^\tau$ ,  $j \in \overline{1, N}$  собственные значения и собственные векторы спектральной задачи (31). Будем считать, что собственные значения  $\lambda_{nj}^N$  при каждом  $n$  упорядочены по  $j$ , так что  $\lambda_{n1}^N \leq \lambda_{n2}^N \leq \dots \leq \lambda_{nN}^N$ . Согласно (21) приближенные выражения для собственных мод колебаний поверхности раздела жидкостей имеют вид:

$$\zeta_{nj} = \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}(r, \vartheta), \quad j \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

Функции  $\zeta_{nj}$  являются линейными комбинациями функций

$$\zeta_{nj}^c := \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}^c(r, \vartheta), \quad \zeta_{nj}^s := \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}^s(r, \vartheta), \quad j \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

Собственные векторы задачи (31) можно выбирать так, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{p,q=1}^N c_{pq} a_{nj}^p a_{nk}^q = \delta_{jk}, \quad \sum_{p,q=1}^N b_{pq} a_{nj}^p a_{nk}^q = \lambda_{nj} \delta_{jk} \quad (37)$$

$$\forall j, k \in \overline{1, N}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Функции  $\zeta_{nj}^c, \zeta_{nj}^s$  будут при этом удовлетворять условиям, аналогичным (16).

### 3. ГРАНИЦА ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ. ЭВОЛЮЦИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ.

**3.1. Решение эволюционной задачи.** В общем случае спектр задачи (31) при каждом  $n$  может иметь  $N_n^-$  отрицательных,  $N_n^0$  нулевых и  $N_n^+ = N - N_n^- - N_n^0$  положительных собственных значений,

$$\lambda_{nj}^- := \lambda_{nj} < 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^-}, \quad \lambda_{nj}^0 := \lambda_{n(N_n^-+j)} = 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^0}, \quad (38)$$

$$\lambda_{nj}^+ := \lambda_{n(N_n^-+N_n^0+j)} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^+}.$$

Собственные моды колебаний, отвечающие собственным значениям  $\lambda_{nj}^\pm$ , будем обозначать через  $\zeta_{nj}^{c\pm}, \zeta_{nj}^{s\pm}$ , а собственным значениям  $\lambda_{nj}^0$  – через  $\zeta_{nj}^{c0}, \zeta_{nj}^{s0}$ . Введем также обозначения:

$$\gamma_{nj} := |\lambda_{nj}^-|^{1/2} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^-}, \quad \omega_{nj}^+ := (\lambda_{nj}^+)^{1/2} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^+}.$$

Следуя [17] можно показать, что решение эволюционной задачи (2) – (11) представляется в виде:

$$\begin{aligned} \zeta(t, r, \vartheta) &\simeq \zeta^N(t, r, \vartheta) = \\ &= \sum_{n=0}^N \left\{ \sum_{j=1}^{N_n^-} \left[ (\alpha_{nj}^{c-} \zeta_{nj}^{c-} + \alpha_{nj}^{s-} \zeta_{nj}^{s-}) \operatorname{ch} \gamma_{nj} t + \frac{1}{\gamma_{nj}} (\beta_{nj}^{c-} \zeta_{nj}^{c-} + \beta_{nj}^{s-} \zeta_{nj}^{s-}) \operatorname{sh} \gamma_{nj} t \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N_n^0} [(\alpha_{nj}^{c0} \zeta_{nj}^{c0} + \alpha_{nj}^{s0} \zeta_{nj}^{s0}) + (\beta_{nj}^{c0} \zeta_{nj}^{c0} + \beta_{nj}^{s0} \zeta_{nj}^{s0}) t] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N_n^+} \left[ \frac{1}{2} (\alpha_{nj}^{c+} \zeta_{nj}^{c+} + \alpha_{nj}^{s+} \zeta_{nj}^{s+}) \cos \omega_{nj}^+ t + \frac{1}{\omega_{nj}^+} (\beta_{nj}^{c+} \zeta_{nj}^{c+} + \beta_{nj}^{s+} \zeta_{nj}^{s+}) \sin \omega_{nj}^+ t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь  $\alpha_{nj}^c, \alpha_{nj}^s$  и  $\beta_{nj}^c, \beta_{nj}^s$  – коэффициенты разложений в ряды Фурье функций  $\zeta^0(r, \vartheta)$  и  $\zeta^1(r, \vartheta)$  в начальных условиях (10),(11) по системе базисных функций  $\{u_{nj}^c(r, \vartheta), u_{nj}^s(r, \vartheta)\}_{j=1}^\infty$ .

В аналогичной форме можно представить потенциалы смещений частиц жидкостей и возмущений магнитного поля. Соответствующие выражения здесь не приводятся, поскольку в дальнейшем они не используются.

Как видно из приведенных выражений, при наличии отрицательных  $\lambda_{nj}^-$  или нулевых  $\lambda_{nj}^0$  собственных значений начальные возмущения поверхности раздела жидкостей неограниченно возрастают со временем  $t$ . Неограниченное возрастание объясняется тем, что в принятой математической модели не учитываются нелинейные эффекты. Приведенное решение (40) описывает начальную стадию эволюции поверхности раздела жидкостей в закритическом магнитном поле. Безразмерные величины  $\gamma_{nj}, \omega_{nj}^+$  в (40) имеют при этом физический смысл инкремента роста возмущений и круговой частоты колебаний, соответственно.

При наличии только положительных собственных значений  $\lambda_{nj} > 0$  малые начальные возмущения равновесного состояния жидкостей остаются малыми для  $\forall t > 0$ . Таким образом, об устойчивости (или неустойчивости) равновесного состояния жидкостей можно судить по знаку наименьшего собственного значения  $\lambda_{nj}$ .

**3.2. Численные результаты.** Будем считать, что жидкость в области  $\Omega_1$  намагничивается по закону Ланжевена, а намагниченность всех остальных сред пренебрежимо мала:

$$M^{(1)} = M_s L \left( \frac{3\chi_0 H^{(1)}}{M_s} \right), \quad M^{(k)} = 0 \quad \forall k = \overline{2, 4}, \quad L(\xi) := \text{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi}. \quad (40)$$

Здесь  $M_s$  – намагниченность насыщения,  $L(\xi)$  – функция Ланжевена,  $\chi_0$  – магнитная восприимчивость жидкости в  $\Omega_1$  при  $H = 0$ . Введем безразмерные индукцию и напряженность магнитного поля, полагая

$$\overline{B} = \frac{B_0}{\mu_0 M_s}, \quad \overline{H}_0^{(k)} = \frac{H^{(k)}}{M_s} = \overline{B} - \overline{M}_0^{(k)} \quad \forall k = \overline{1, 4}, \quad (41)$$

$$\overline{M}_0^{(1)} = L \left( 3\chi_0 \overline{H}_0^{(1)} \right), \quad \overline{M}_0^{(k)} = 0 \quad \forall k = \overline{2, 4}.$$

Величины  $\mu_k, q_k$  в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\mu_1 \left( \overline{H}_0^{(1)} \right) = \frac{\overline{B}}{\overline{H}_0^{(1)}}, \quad q_1 \left( \overline{H}_0^{(1)} \right) = \frac{(1 + L_H) \overline{H}_0^{(1)}}{\overline{B}}, \quad \mu_k = q_k = 1 \quad \forall k = \overline{2, 4}, \quad (42)$$

где

$$L_H = -\frac{3\chi_0}{\text{sh}^2 \left( 3\chi_0 \overline{H}_0^{(1)} \right)} + \frac{1}{3\chi_0 \overline{H}_0^{(1)}}$$

Безразмерную величину  $W$  представим в виде:

$$W := W_0 L^2 \left( 3\chi_0 \overline{H}_0^{(1)} \right) \mu_1 \sqrt{q_1}, \quad W_0 := \frac{\mu_0 M_s^2 R}{\sigma}. \quad (43)$$

Заметим теперь, что напряженность  $\overline{H}_0^{(1)}$  и индукция  $\overline{B}$  магнитного поля связаны взаимно однозначным соотношением (41), так что величины  $\mu_1, q_1$

однозначно определяются по заданному значению  $\bar{B}$ . Примем  $\bar{B}$  в качестве одного из определяющих параметров рассматриваемой системы. Состояние равновесия жидкостей характеризуется, таким образом, безразмерными параметрами:

$$\bar{B}, Bo, W_0, \chi_0, h_1/R, h_2/R, \rho_2/\rho_1.$$

Собственные значения  $\lambda_{nk}$  зависят, очевидно, от всей совокупности этих параметров. Нетрудно показать, что возрастание индукции магнитного поля  $\bar{B}$  приводит к появлению отрицательных собственных значений  $\lambda_{nk}^-$ , если  $\bar{B}$  превышает некоторое критическое значение  $\bar{B}^*$ . При  $\bar{B} < \bar{B}^*$  равновесное состояние устойчиво, а в случае  $\bar{B} > \bar{B}^*$  – неустойчиво. Граница области устойчивости в пространстве безразмерных параметров определяется уравнением:

$$\lambda_{n^*j^*} := \min_{n,j} \lambda_{nj}(\bar{B}, Bo, W, \chi_0, h_1/R, h_2/R, \rho_2/\rho_1) = 0. \quad (44)$$

Собственный вектор  $a_{n^*j^*} := (a_{n^*j^*}^1, a_{n^*j^*}^2, \dots, a_{n^*j^*}^N)^T$ , отвечающий  $\lambda_{n^*j^*}$ , определяет наиболее опасное возмущение поверхности раздела жидкостей  $\zeta_{n^*j^*}$ , приводящее к потере устойчивости равновесия:

$$\zeta_{n^*j^*} = \sum_{k=1}^N a_{n^*j^*}^k u_{n^*k}(r, \vartheta). \quad (45)$$

Собственные значения  $\lambda_{nj}$  спектральных задач (31) отыскивались численно с использованием метода Холесского. В проведенных вычислениях число базисных функций варьировалось в диапазоне  $50 \leq N \leq 100$ . Дальнейшее увеличение  $N$  не приводило к существенному уточнению результатов.

На рис.2 приведены результаты расчета границы области устойчивости на плоскости  $(Bo, \bar{B})$  при  $W_0 = 10^3$  для различных значений  $\chi_0$ . Вычисления показали, что в (45), как правило, один из коэффициентов  $a_{n^*j^*}^k$  значительно превосходит остальные. Пунктирные линии в области неустойчивости  $\bar{B} > \bar{B}^*$  выделяют зоны, в пределах которых наиболее быстро растущим возмущениям отвечают номера гармоник  $(n^*, k^*)$ . Именно эти моды дают наглядное представление о начальной эволюции поверхности раздела жидкости при потере устойчивости и переходе в новое равновесное состояние. При этом необходимо считать, что индукция магнитного поля  $\bar{B}$  принимает за критические значения за время значительно меньшее характерного времени гидродинамических процессов.

При малых числах Бонда наиболее опасными являются осесимметричные возмущения ( $n = 0$ ), либо возмущения по первой ( $n = 1$ ) или второй ( $n = 2$ ) гармонике. Формы наиболее опасных возмущений для некоторых значений параметров показаны на рис.3. Отметим, что в определенном диапазоне значений числа Бонда в равной мере могут быть опасными осесимметричные возмущения и возмущения по второй гармонике. Это объясняется совпадением спектров собственных значений  $\{\lambda_{nk}\}$  задачи (31) при  $n = 0$  и  $n = 2$ .

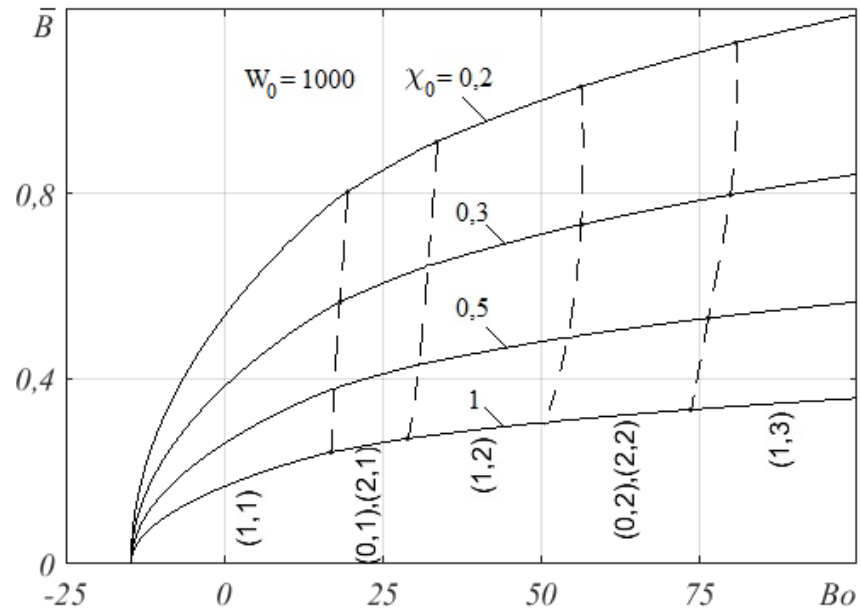


Рис. 2. Зависимость критических значений индукции магнитного поля  $\bar{B}^*$  от числа Бонда  $Bo$  при  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0.1$ .

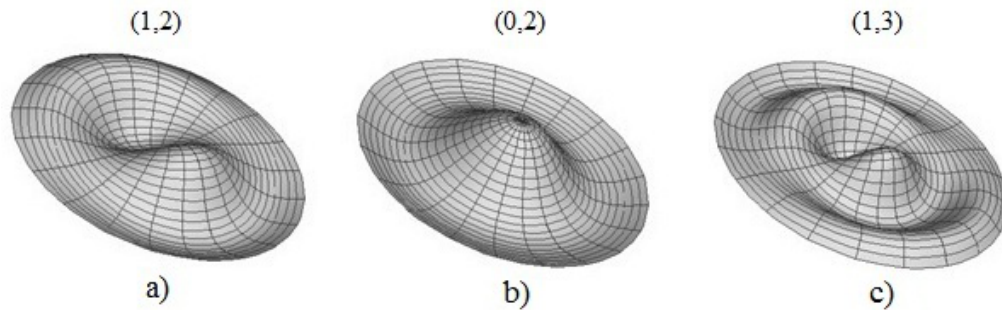


Рис. 3. Формы наиболее опасных возмущений при  $W_0 = 10^3$ ,  $\chi_0 = 0.2$ : а)  $Bo = 40$ ,  $\bar{B} = 0.95$ ; б)  $Bo = 60$ ,  $\bar{B} = 1.05$ ; в)  $Bo = 90$ ,  $\bar{B} = 1.15$ .

Вопрос о том, какая из этих мод реализуется в экспериментах остается открытым. С ростом значений числа Бонда при фиксированных значениях остальных параметров возрастают критические значения индукции магнитного поля  $\bar{B}^*$ . Можно показать, что  $\bar{B}^*$  асимптотически возрастает как  $Bo^{1/2}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от случая бесконечно протяженных горизонтальных слоев МЖ собственные частоты колебаний жидкости с ограниченной свободной поверхностью образуют дискретный спектр, а отвечающие им моды колебаний качественно отличаются друг от друга. Это позволяет объяснить многообразие форм МЖ, наблюдаемых в реальных экспериментах.

В связи с этим отметим, что в теоретических исследованиях неустойчивости безграничных слоев МЖ, как правило, ограничиваются рассмотрением одномерного синусоидального возмущения свободной поверхности, непрерывно зависящего от одного параметра (волнового числа), либо суперпозиции двух или трех таких возмущений. Это позволяет аппроксимировать одномерные, квадратные или гексагональные структуры, наблюдаемые в экспериментах с МЖ в прямоугольных, гексагональных или круглых кюветах в далекой закритической области значений параметров, когда влияние границы области, занимаемой МЖ, существенно ослабевает.

В случаях, когда свободная поверхность жидкости (или поверхность раздела жидкостей) ограничена, а индукция магнитного поля близка к критическим значениям, наиболее опасные возмущения имеют более сложную структуру. Это подтверждается расчетами, проведенными в данной статье. Для МЖ, намагничивающихся по закону Ланжевена, построены границы области устойчивости равновесных состояний в пространстве определяющих параметров. Показано, что область значений параметров, отвечающих неустойчивым равновесным состояниям, разбивается на зоны, каждая из которых характеризуется вполне определенной модой наиболее быстро растущих возмущений. Изменения индукции магнитного поля, вызывающие переход физических параметров из одной зоны в другую, сопровождаются качественной перестройкой форм поверхности раздела МЖ. С увеличением числа Бонда критические значения индукции магнитного поля стремятся к значениям, соответствующим случаю двухслойной системы жидкостей с безграничной поверхностью раздела.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. – М.: Мир, 1989. – 389 с.
2. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. – М.: Наука, 1985. – 188 с.
3. Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. – Рига: Зинатне, 1989. – 386 с.
4. Odenbach S., Beiglbock W., Ehlers J. et al. Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids. –Berlin: Springer, 2009. – 430 p.

5. Abou B, Westfreid J.E., Roux S. The instability in ferrofluids: hexagon-square transition mechanism and wavenumber selection. // *J. Fluid Mech.*, 2000. – Vol. 416. – P. 217–237.
6. Lange A., Richter R., Tobiska L. Linear and nonlinear approach to the Rosensweig instability. // *GAMM-Mitt.*, 2007.– Vol. 30, №1. – P. 171–184.
7. Knieling H., Richter R., Rehberg I. Growth of surface undulations at the Rosensweig instability. // *Phys. Rev. E*, 2007.– Vol. 76, 066301.– P. 1–11.
8. Gollwitzer C., Matthies G., Richter R. et al. The surface topography of a magnetic fluid: a quantitative comparison between experiment and numerical simulation. // *J. Fluid Mech.*, 2007. – Vol. 571. – P. 455 – 474.
9. Диканский Ю.М., Закинян А.Р., Мкртчян Л.С. Неустойчивость тонкого слоя магнитной жидкости в перпендикулярном магнитном поле. // *Журнал технической физики*, 2010. – Т.80.– Вып.9. – С. 38 – 43.
10. Бушуева К.А., Костарев К.Г., Лебедев А.В. Капельные структуры, образуемые феррожидкостью в однородном магнитном поле. // *Конвективные течения*, 2011.– Вып. 5.– С. 159 – 170.
11. Коровин В.М. Неустойчивость Розенцвейга в тонком слое магнитной жидкости. // *Журнал технической физики*, 2013.– Т.83, Вып.12.– С. 17 – 25.
12. Коровин В.М. О влиянии горизонтального магнитного поля на неустойчивость Розенцвейга нелинейно намагничивающейся феррожидкости. // *Журнал технической физики*, 2014. – Т.84.– Вып.11.– С. 1 – 8.
13. Rannacher D., Engel A. Suppressing the Rayleigh-Taylor instability with a rotating magnetic field. // *Phys. Rev. E*, 2007.– Vol. 75, 016311.– P. 1 – 8.
14. Poehlmann A., Richter R., Rehberg I. Unravelling the Rayleigh-Taylor instability by stabilization. // *J. Fluid Mech.*, 2013. – Vol. 732, R3. – P. 1 – 10.
15. Borysov I.D., Potseluev S.I, Yatsenko T.Yu. Instability of equilibrium and appearance of ordered spatial structures on the free surface of ferrofluid. // *Magnetohydrodynamics*, 2014. – Vol. 50, №1. – P. 3 – 12.
16. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматлит., 1961. – 524 с.
17. Borisov I.D., Yatsenko T.Yu. Small Oscillations of Magnetizable Ideal Fluid. // *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*, 2010. – Vol. 6, №4. – P. 383 – 395.

Статья получена: 1.12.2016.; окончательный вариант: 18.12.2016.;  
принята: 20.12.2016.