Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 84, 2016, с.93–111

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 84, 2016, p. 93–111

УДК 517.946

Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена

Хилькова Л. А.

Институт химических технологий
Восточноукраинского национального университета им. В.Даля, Украина
LarisaHilkova@gmail.com

В работе рассматривается краевая задача для уравнения стационарной диффузии в перфорированной области, дополнительной большому числу не пересекающихся мелких шаров на поверхности которых задаётся нелинейное условие типа Робена. Изучается асимптотическое поведение решения задачи. Выводятся усреднённые уравнения, описывающие главный член асимптотики решений.
Ключевые слова: усреднение, диффузия, условие Робена, квазирешения.

Хількова Л. О. **Усереднення рівняння дифузії в областях з дрібнозернистою межею з нелінійною граничною умовою типу Робена.** В роботі розглядається крайова задача для рівняння стаціонарної дифузії в перфорованих областях, додаткових великому числу дрібних куль, що не перетинаються, на поверхні яких задається нелінійна умова типу Робена. Вивчається асимптотична поведінка розв'язків задачі. Виводяться усереднені рівняння, що описують головний член асимптотики розв'язків.
Ключові слова: усереднення, дифузія, умова Робена, квазірозв'язки.

L. O. Khilkova. **Homogenization of the diffusion equation in domains with the fine-grained boundary with the nonlinear boundary Robin condition.** In this paper we consider the boundary-value problem for the stationary diffusion equation in perforated domains, which are additional of a large number non-overlapping small balls on the surface of which is given the nonlinear Robin condition. We study the asymptotic behavior of the solution of the problem. We derive homogenization equations describing the principal term of the asymptotic of the solutions.
Keywords: homogenization, diffusion, Robin condition, quasisolutions.
2000 Mathematics Subject Classification 35J65, 35Q80.

Введение

Во многих естественных науках, в частности в экологии, химии, физике, возникает необходимость в изучении процессов диффузии в средах, содержащих инородные включения, на поверхности которых происходит поглощение диффундирующего вещества. Для стационарных процессов, плотность диффундирующего вещества $u^\varepsilon(x)$ (параметр ε характеризует расстояния между включениями) описывается краевыми задачами для эллиптических уравнений в перфорированных областях Ω^ε, дополнительных к поглощающим включениям F^ε ($\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$), с граничным условием типа Робена на поверхностях включений ∂F^ε:

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) = 0,\ x \in \partial F^\varepsilon.$$

При очень большом количестве малых включений $F^\varepsilon = \cup_{i=1}^{N(\varepsilon)} F_i^\varepsilon$ ($N(\varepsilon) \to \infty, diam F_i^\varepsilon \to 0$) прямое нахождение решения этой задачи практически невозможно в виду сложности области Ω^ε. Естественный подход в этой ситуации состоит в исследовании асимптотического поведения решения при уменьшении размеров включений и увеличении их числа, и, как следствие, построение усреднённой модели процесса диффузии с поглощением. Этот подход был развит достаточно полно для периодически распределённых включений (с малым периодом ε) как с линейным, так и нелинейным поглощением на границе ([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]). Почти во всех работах, посвященных такой задаче предполагалось, что размеры включений и плотность поглощения на их поверхности имеют тот же порядок малости ε, что и период; в этом случае предельное поглощение при $\varepsilon \to 0$ ненулевое и конечное.

В данной работе рассматривается случай, когда включения очень малы и располагаются произвольно (не периодически). Предполагается, что включения – это шары радиуса порядка ε^α, а плотность поглощения на их поверхности имеет порядок ε^β. Если шары очень малы, так что суммарная площадь поглощающей поверхности мала, то для того, чтобы предельное поглощение было отлично от 0 необходимо, чтобы плотность поглощения была велика. Такая ситуация характерна для процессов очистки воды с помощью мелкодисперсного сильнопоглощающего порошка. В данной работе мы предполагаем, что при $\varepsilon \to 0$ существует предельная плотность распределения центров шаров в области Ω, и выводим усреднённые уравнения диффузии в среде с поглощением для различных значений параметров $(\alpha, \beta) \in \Lambda := \{1 < \alpha < 3,\ 2\alpha + \beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\ -\infty < \beta < \infty\}$. Отметим, что ранее случай периодического распределения шаров при $(\alpha, \beta) \in \{2 < \alpha \leqslant 3,\ \beta = 3 - 2\alpha\}$ рассматривался в работе [10].

Данная работа организована следующим образом. В разделе 1 дана точная постановка задачи и сформулирован основной результат. В разделе 2 приведено доказательство основной теоремы. Этот раздел делится на несколько подразделов, которые соответствуют основным шагам доказательства. При доказательстве используется метод «квазирешений», который был развит в работе [15]. Этот метод основывается на вариационных энергетических методах, разработанных ранее при решении задач усреднения (например, [16]).

1. Постановка задачи и основной результат

Пусть Ω – ограниченная область в пространстве R^3 с границей $\partial\Omega$, в которой расположены включения $F_i^\varepsilon = B(x^{i\varepsilon}, r_i^\varepsilon)$ – не пересекающиеся шары радиусов r_i^ε с центрами в точках $x^{i\varepsilon}$ $(i = 1, ..., N(\varepsilon))$. Здесь ε – малый параметр, характеризующий «среднее» расстояние между ближайшими шарами. Радиусы шаров при $\varepsilon \to 0$ стремятся к нулю, а их количество $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-3})$ растёт.

В области $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ $(F^\varepsilon = \cup_{i=1}^{N(\varepsilon)} F_i^\varepsilon)$ рассматривается краевая задача

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = f^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon) = 0,\ x \in \partial F_i^\varepsilon,\ i = 1, ..., N(\varepsilon), \tag{2}$$

$$u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, ν – единичная нормаль к границе ∂F^ε, внешняя по отношению к области Ω^ε; функция источников $f^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ задана, а функция плотности поглощения $\sigma^\varepsilon(x, u)$ удовлетворяет условиям:

a_1: $\sigma^\varepsilon(x, u) = \varepsilon^\beta \sigma(x, u)$, где $\beta \in R^1$, $\sigma(x, u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$ и $\sigma(x, 0) = 0$;

a_2: $\forall\, x \in \Omega :\ 0 < k_1 \leqslant \frac{\partial}{\partial u}\sigma(x, u) \leqslant k_2(1 + |u|^\nu)$, где $0 \leqslant \nu < 1$.

Как известно, при каждом фиксированном ε существует единственное решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) (см.например [17]). В данной работе изучается асимптотическое поведение $u^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$, когда число шаров $N(\varepsilon) \to \infty$ и их радиусы $r_i^\varepsilon \to 0$ $(i = 1, ..., N(\varepsilon))$.

Уточним расположение и размеры шаров F_i^ε. Их радиусы определим равенством

$$r_i^\varepsilon = a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha,\ (i = 1, ..., N(\varepsilon)), \tag{4}$$

где параметр $\alpha > 1$, а числа a_i^ε выбираются так, что $0 < a \leqslant a_i^\varepsilon \leqslant A < \infty$ и a, A не зависят от ε.

Обозначим

$$d_i^\varepsilon = dist\left(x^{i\varepsilon}, \bigcup_{i\neq j} x^{j\varepsilon} \cup \partial\Omega\right) \tag{5}$$

расстояние от центра i – го до центра ближайшего шара или до границы $\partial\Omega$;

$$b_i^\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^\beta (r_i^\varepsilon)^2 \text{ при } (\alpha,\, \beta) \in \Lambda \cap \{\beta \geqslant \alpha\}; \\ r_i^\varepsilon \text{ при } (\alpha,\, \beta) \in \Lambda \cap \{\beta < -\alpha\}, \end{cases} \tag{6}$$

числа b_i^ε характеризуют порядок малости поглощающей способности каждого шара при различных значениях параметров α, β.

Будем предполагать, что шары в области Ω располагаются так, что выполняются условия

$$d_1\colon\ \exists\, \tfrac{2}{3} < \varkappa_1 < 1 :\ d_i^\varepsilon \geqslant (r_i^\varepsilon)^{\varkappa_1} \text{ и } \lim_{\varepsilon\to 0}\max_i d_i^\varepsilon \to 0;$$

$$d_2\colon\ \exists\, \tfrac{6}{4-\nu} < \varkappa_2 \leqslant 2 :\ \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(b_i^\varepsilon)^{\varkappa_2}}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa_2-1)}} \leqslant C_b, \text{ где } C_b \text{ не зависит от } \varepsilon.$$

Если учесть, что среднее расстояние между центрами шаров F_i^ε имеет порядок ε, то условия d_1, d_2 требуют, чтобы шары располагались не слишком близко друг к другу. В остальном расположение шаров можно считать произвольным.

Пространственное распределение плотности поглощения в области Ω зададим с помощью обобщенной функции от x, зависящей от параметров ε, u:

$$c^\varepsilon(x,u) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(u)\cdot\delta(x - x^{i\varepsilon}),\ (\forall\,\varepsilon > 0,\ \forall\, u \in R^1 :\ c^\varepsilon(x,u) \in \mathcal{D}'(\Omega)), \qquad (7)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функции Дирака, а $c_i^\varepsilon(u)$ – функции поглощательной способности шаров, определённые при $(\alpha,\beta) \in \Lambda = \{1 < \alpha < 3,\ 2\alpha+\beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\ -\infty < \beta < \infty\}$ равенствами

$$c_i^\varepsilon(u) = \begin{cases} 2\pi(a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon},u)\varepsilon^{2\alpha+\beta} \text{ при } \alpha+\beta > 0; \\ 2\pi a_i^\varepsilon\,[u - V_i^\varepsilon]^2\,\varepsilon^\alpha + 2\pi(a_i^\varepsilon)^2 g(x^{i\varepsilon},V_i^\varepsilon)\varepsilon^{2\alpha+\beta} \text{ при } \alpha+\beta = 0; \\ 2\pi a_i^\varepsilon u^2\varepsilon^\alpha \text{ при } \alpha+\beta < 0. \end{cases} \qquad (8)$$

В этом равенстве

$$g(x,u) = 2\int_0^u \sigma(x,r)\,dr \qquad (9)$$

и $V_i^\varepsilon = V_i^\varepsilon(u)$ – решение уравнения

$$V_i^\varepsilon(u) = u - a_i^\varepsilon\sigma(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon). \qquad (10)$$

В данной работе мы изучаем асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ решений $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) для различных значений параметров α, β, при условии, что шары распределены в области Ω объёмно, так что плотность распределения (7) сходится в слабой топологии $\mathcal{D}'(\Omega)$ к обычной функции $c(x,u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$. Для этого сначала определим в каком смысле понимается сходимость решений $u^\varepsilon(x)$, определённых в перфорированных областях Ω^ε.

Будем говорить, что последовательность функций $u^\varepsilon(x) \in L^p(\Omega^\varepsilon)$ сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$, если существует функция $u(x) \in L^p(\Omega)$ такая что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u^\varepsilon - \chi^\varepsilon u\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

где $\chi^\varepsilon(x)$ – характеристическая функция области Ω^ε.

Основной результат данной работы следующий:

Теорема 1 *Пусть области Ω^ε удовлетворяют условиям d_1, d_2 и при $\varepsilon \to 0$ выполняются условия:*

1. *обобщенные функции $c^\varepsilon(x,u)$ при $\forall\, u \in R^1$ сходятся в слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$ к функции $c(x,u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$;*

2. *функции $f^\varepsilon(x)$, продолженные нулём на множество F^ε, сходятся слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$.*

Тогда решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) сходятся в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ (при $p < 6$) к функции $u(x)$, являющейся решением усреднённой задачи

$$-\Delta u(x) + c_u(x,u) = f(x) \text{ в } \Omega, \tag{11}$$

$$u(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{12}$$

где $c_u(x,u) = \frac{\partial}{\partial u} c(x,u)$.

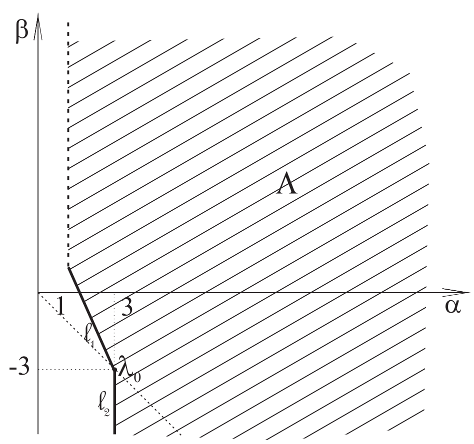

Рис. 1: Область изменения параметров α, β

Функция $c(x,u)$ зависит от параметра α, определяющего насколько малыми являются включения, и параметра β, характеризующего интенсивность поглощения на их поверхности. Областью изменения параметров α, β является область $\Lambda = \{1 < \alpha < 3,\, 2\alpha + \beta \geqslant 3\} \cup \{\alpha \geqslant 3,\, -\infty < \beta < \infty\}$. Из формул (7), (8) и условия 1) теоремы 1 следует, что функция $c(x,u)=0$, при $(\alpha,\,\beta)\in\Lambda\setminus\{\ell_1\cup\ell_2\cup\lambda_0\}$ и отлична от нуля и конечна на ломанной $\ell_1\cup\ell_2\cup\lambda_0$, где $\ell_1=\{1<\alpha<3,\ \beta=3-2\alpha\}$, $\ell_2=\{\alpha=3,\ \beta<-\alpha\}$, $\lambda_0=(3,-3)$.

Замечание. В нашей следующей работе будет показано, что при случайном распределении центров шаров и их радиусов условия d_1, d_2 и условие 1) теоремы 1 выполняются с вероятностью стремящейся к 1 при $\varepsilon\to 0$.

2. Доказательство теоремы 1

Сначала наметим схему доказательства. Определим вариационные постановки начальной и усреднённой задач.

Решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) минимизируют функционал

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w^\varepsilon|^2\,dx-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon w^\varepsilon\,dx+\varepsilon^\beta\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{\partial F_i^\varepsilon}g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)\,d\Gamma \qquad (13)$$

в классе функций $w^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)=\{w^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon):\ w^\varepsilon(x)|_{x\in\partial\Omega}=0\}$. Здесь $g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)$ определяется равенством (9) и в силу свойств функции $\sigma(x,u):\ g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)\geqslant 0$.

Введём функционал усреднённой задачи (11)-(12):

$$\Phi[w]=\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2\,dx-2\int\limits_{\Omega}fw\,dx+2\int\limits_{\Omega}c(x,w)\,dx, \qquad (14)$$

где функция $c(x,w)$ определена в условии 1) теоремы 1. Решение усреднённой задачи $u(x)$ минимизирует этот функционал в классе функций $w(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$.

В разделе 2.1 мы показываем, что решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) можно продолжить на множество F^ε так, что продолженные решения $\tilde u^\varepsilon(x)$ будут равномерно ограничены по ε в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ и, следовательно, из последовательности $\{\tilde u^\varepsilon(x)\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $\mathring{H}^1(\Omega)$ подпоследовательность $\{\varepsilon=\varepsilon_k,\ k=1,..,\infty\}$, которая в силу теорем вложения сходится сильно в $L^p(\Omega)\,(p<6)$ к некоторой функции $u(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$.

В разделах 2.2 – 2.4 мы показываем, что функция $u(x)$ является минимизантом функционала (14) и, значит, решением усреднённой задачи (11)-(12). Это делается следующим образом. В разделе 2.2 мы вводим специальные тестовые функции $w^\varepsilon(x)$, аппроксимирующие минимизант функционала (13). Они строятся по произвольной функции $w(x)\in C_0^2(\Omega)$ и удовлетворяют следующим свойствам: $w^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$, в малых окрестностях шаров F_i^ε они удовлетворяют уравнению Лапласа, на поверхности шаров краевому условию (2) и достаточно далеко от шаров $w^\varepsilon(x)=w(x)$. Такие функции мы будем называть «квазирешениями».

Так как решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) минимизируют функционал (13) в $H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)$, то справедливо неравенство

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\leqslant\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]. \qquad (15)$$

В разделе 2.3 мы показываем, что при выполнении условий теоремы 1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]=\Phi[w], \tag{16}$$

где $\Phi[w]$ – функционал, определённый в (14). Из (15), (16) в силу плотности $C_0^2(\Omega)$ в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ следует неравенство

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\leqslant\Phi[w],\ \forall\, w\in\mathring{H}^1(\Omega). \tag{17}$$

В разделе 2.4 мы показываем, что если $u^\varepsilon(x)$ сходится слабо в $\mathring{H}^1(\Omega)$ к функции $u(x)$ по подпоследовательности $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$, то справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\geqslant\Phi[u]. \tag{18}$$

Из (17), (18) следует, что предельная функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству $\Phi[u]\leqslant\Phi[w]$ для произвольной функции $w(x)\in\mathring{H}^1(\Omega)$. Следовательно, $u(x)$ минимизирует функционал $\Phi[w]$ в классе $\mathring{H}^1(\Omega)$ и, значит, является решением усреднённой задачи (11)-(12).

В разделе 2.5 мы показываем, что усреднённая задача (11)-(12) имеет единственное решение, значит, вся последовательность продолженных решений $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}$ сходится сильно в $L^p(\Omega)$ к функции $u(x)$, и, следовательно, последовательность решений $\{u^\varepsilon(x)\}$ начальной задачи (1)-(3) сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ к решению $u(x)$ усреднённой задачи (11)-(12).

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1 *Пусть выполнено условие 1 теоремы 1, тогда для любой функции* $w(x)\in C_0^1(\Omega)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))=\int\limits_\Omega c(x,w(x))\,dx. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $K'_\delta\subset K_\delta\subset K''_\delta$ – концентрические кубы со сторонами $\delta'<\delta<\delta''$ соответственно. Рассмотрим функции $\varphi_{\delta'}(x)$, $\varphi_{\delta''}(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие условиям $0\leqslant\varphi_{\delta'}(x)\leqslant 1$ и $\varphi_{\delta'}(x)=1$ при $x\in K'_\delta$, $\varphi_{\delta'}(x)=0$ при $x\notin K_\delta$, $0\leqslant\varphi_{\delta''}(x)\leqslant 1$ и $\varphi_{\delta''}(x)=1$ при $x\in K_\delta$, $\varphi_{\delta''}(x)=0$ при $x\notin K''_\delta$.

Из определения обобщенной функции $c^\varepsilon(x,u)$ (7) и положительности функций $c_i^\varepsilon(u)$ (8) справедливы неравенства

$$\langle c^\varepsilon(x,u),\varphi_{\delta'}(x)\rangle\leqslant\sum_{x^{i\varepsilon}\in K_\delta}c_i^\varepsilon(u)\leqslant\sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}_\delta}c_i^\varepsilon(u)\leqslant\langle c^\varepsilon(x,u),\varphi_{\delta''}(x)\rangle.$$

Перейдём в них к пределу при $\varepsilon\to 0$. Тогда, учитывая условие 1 теоремы 1, получаем

$$\int\limits_\Omega c(x,u)\cdot\varphi_{\delta'}(x)\,dx\leqslant\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\sum_{x^{i\varepsilon}\in K_\delta}c_i^\varepsilon(u)\leqslant\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sum_{x^{i\varepsilon}\in\overline{K}_\delta}c_i^\varepsilon(u)\leqslant\int\limits_\Omega c(x,u)\cdot\varphi_{\delta''}(x)\,dx.$$

Теперь перейдём к пределу при $\delta' \to \delta$, $\delta'' \to \delta$. Учитывая свойства функций $\varphi_{\delta'}(x)$, $\varphi_{\delta''}(x)$, заключаем что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{x^{i\varepsilon}\in K_\delta} c_i^\varepsilon(u) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta} c_i^\varepsilon(u) = \int\limits_{K_\delta} c(x,u)\,dx. \tag{20}$$

Разрежем область Ω на не пересекающиеся кубы K_δ^j со сторонами δ, так чтобы $supp\; w(x) \in \bigcup\limits_j K_\delta^j$, тогда

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})), \tag{21}$$

здесь $\sum'$ означает, что $x^{i\varepsilon}$ принадлежит только одному $\overline{K}_\delta^j$.

Обозначим $\overline{w}_j$ – среднее значение функции $w(x)$ в кубе $\overline{K}_\delta^j$, тогда так как $w(x) \in C_0^1(\Omega)$

$$|\overline{w}_j - w(x)| < C\cdot\delta, \text{ при } x \in \overline{K}_\delta^j. \tag{22}$$

Учитывая (21), запишем

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' (c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - c_i^\varepsilon(\overline{w}_j)) + \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' c_i^\varepsilon(\overline{w}_j), \tag{23}$$

Оценим первое слагаемое. Из определения $c_i^\varepsilon(u)$ (8) и неравенства (22), следует

$$\left|\sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' (c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - c_i^\varepsilon(\overline{w}_j))\right| \leqslant \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' \left|c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - c_i^\varepsilon(\overline{w}_j)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\delta \sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' b_i^\varepsilon = C\delta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} b_i^\varepsilon.$$

Применяя неравенство Гёльдера для значения $\varkappa_2$ из условия d_2 и пользуясь этим условием, имеем

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} b_i^\varepsilon \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{(b_i^\varepsilon)^{\varkappa_2}}{(d_i^\varepsilon)^{3(\varkappa_2-1)}}\right)^{\frac{1}{\varkappa_2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (d_i^\varepsilon)^3\right)^{\frac{\varkappa_2-1}{\varkappa_2}} \leqslant C_b^{\frac{1}{\varkappa_2}} |\Omega|^{\frac{\varkappa_2-1}{\varkappa_2}}. \tag{24}$$

Тогда для первого слагаемого в (23) справедлива оценка

$$\left|\sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' (c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) - c_i^\varepsilon(\overline{w}_j))\right| \leqslant \tilde{C}\delta, \tag{25}$$

где константа $\tilde{C}$ не зависит от ε, δ.

Оценим второе слагаемое в (23). Из (20) с учётом того, что $w(x) \in C_0^1(\Omega)$ и $c(x,u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$, следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_j \sum_{x^{i\varepsilon}\in \overline{K}_\delta^j}{}' c_i^\varepsilon(\overline{w}_j) = \sum_j \int\limits_{K_\delta^j} c(x,\overline{w}_j)\,dx = \int\limits_\Omega c(x,w(x))\,dx + O(\delta) \qquad (26)$$

Из (23), (25), (26) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) = \int\limits_\Omega c(x,w(x))\,dx + O(\delta),$$

и переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем требуемое равенство (19).

2.1. Компактность минимизантов функционала (13)

Так как $\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \leqslant \Phi^\varepsilon[0] = 0$, то при $(\alpha,\beta) \in \Lambda$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon)\,d\Gamma \leqslant 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\,dx.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши-Буняковского и неотрицательности функции $g(x,u^\varepsilon)$, получим

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant 2\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,. \qquad (27)$$

Из условия d_1 следует, что области Ω^ε удовлетворяют условию сильной связности ([18]), т.е. функции $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ допускают продолжение $\tilde{u}^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$ на всю область Ω с выполнением неравенства

$$\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1\,\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,, \qquad (28)$$

где константа C_1 не зависит от ε.

Из (27) и (28) и неравенства Фридрихса $\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_2\,\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ получим

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant C_3\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,,$$

откуда, учитывая сходимость f^ε к f в $L^2(\Omega)$, имеем

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leqslant \tilde{C},$$

где константы C_2, C_3, $\tilde{C}$ не зависят от ε. Таким образом функции $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ равномерно ограничены по ε в $\mathring{H}^1(\Omega)$. Отсюда следует, что последовательность функций $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}$ слабо компактна в $\mathring{H}^1(\Omega)$, и, значит, из неё можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon = \varepsilon_k,\, k = 1,...,\infty\}$, слабо сходящуюся в $\mathring{H}^1(\Omega)$ и в силу компактности вложения $\mathring{H}^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)\,(p < 6)$ сильно сходящуюся в $L^p(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Таким образом, подпоследовательность $\{u^{\varepsilon_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ к функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Далее, мы покажем, что функция $u(x)$ минимизирует функционал (14).

2.2. Построение квазирешений

По произвольной функции $w \in C_0^2(\Omega)$ построим следующие функции:

$$w^\varepsilon(x) = w_1^\varepsilon(x) - w_2^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon, \tag{29}$$

$$w_1^\varepsilon(x) = w(x) - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (w(x) - w(x^{i\varepsilon})) \cdot \varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right), \tag{30}$$

$$w_2^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{A_i^\varepsilon}{r} \cdot \varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right), \tag{31}$$

где $r = |x - x^{i\varepsilon}|$, $\varphi(t)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая и монотонная на $[0, \infty)$ функция, такая что $\varphi(t) = 1$ для $t \leqslant 1/2$ и $\varphi(t) = 0$ для $t \geqslant 1$ и числа A_i^ε являются решением уравнения

$$A_i^\varepsilon = (a_i^\varepsilon)^2 \varepsilon^{2\alpha+\beta} \sigma\left(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon}) - \frac{A_i^\varepsilon}{a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha}\right). \tag{32}$$

Из свойств функции $\sigma(x, u)$ следует, что это уравнение имеет единственное решение.

Используя свойства функций $w(x)$, $\varphi(t)$ нетрудно убедиться, что $w^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$; при $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2)$: $w^\varepsilon(x) = w(x)$; при $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} B(x^{i\varepsilon}, 2r_i^\varepsilon)$: $\Delta w^\varepsilon(x) = 0$; при $x \in \partial F_i^\varepsilon$ функция $w^\varepsilon(x)$ удовлетворяет краевому условию (2). Таким образом, функция $w^\varepsilon(x)$ обладает всеми свойствами квазирешений.

Квазирешения могут быть естественным образом продолжены на множество F^ε:

$$\tilde{w}^\varepsilon(x) = \begin{cases} w^\varepsilon(x),\ x \in \Omega^\varepsilon; \\ w(x^{i\varepsilon}) - \dfrac{A_i^\varepsilon}{r_i^\varepsilon},\ x \in F_i^\varepsilon,\ i = 1, ..., N(\varepsilon), \end{cases} \tag{33}$$

здесь значение продолженного квазирешения $\tilde{w}^\varepsilon(x)$ внутри шара F_i^ε $(i = 1, ..., N(\varepsilon))$ постоянно и равно значению на его поверхности ∂F_i^ε, которое обозначим

$$w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) - \frac{A_i^\varepsilon}{r_i^\varepsilon}. \tag{34}$$

Из (32) нетрудно видеть, что w_i^ε является решением уравнения

$$w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) - \varepsilon^{\alpha+\beta} a_i^\varepsilon \sigma\left(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon\right). \tag{35}$$

Получим необходимые в дальнейшем оценки A_i^ε и w_i^ε. В силу свойств a_1, a_2 функции $\sigma(x, u)$ уравнение (35) имеем единственное решение, которое удовлетворяет оценке

$$|w_i^\varepsilon| \leqslant |w(x^{i\varepsilon})| \tag{36}$$

и может быть при $(\alpha,\, \beta) \in \Lambda$ представлено равенствами

$$w_i^\varepsilon = \begin{cases} w(x^{i\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\alpha+\beta}) \text{ при } \alpha+\beta > 0; \\ V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) \text{ при } \alpha+\beta = 0; \\ \dfrac{w(x^{i\varepsilon})\varepsilon^{-\alpha-\beta}}{a_i^\varepsilon \cdot \sigma_u(x_i^\varepsilon, 0)} + O(\varepsilon^{-2\alpha-2\beta}) \text{ при } \alpha+\beta < 0, \end{cases} \tag{37}$$

где $V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))$ – решение уравнения (10) при $u = w(x^{i\varepsilon})$.

Из (4), (6), (32), (34) и (37) имеем

$$A_i^\varepsilon = \begin{cases} \sigma(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})) \cdot b_i^\varepsilon + O(\varepsilon^{3\alpha+2\beta}) \text{ при } \alpha+\beta > 0; \\ \sigma(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))) \cdot b_i^\varepsilon \text{ при } \alpha+\beta = 0; \\ w(x^{i\varepsilon}) \cdot b_i^\varepsilon + O(\varepsilon^{-\beta}) \text{ при } \alpha+\beta < 0. \end{cases} \tag{38}$$

Кроме того, из (34)

$$A_i^\varepsilon = a_i^\varepsilon \varepsilon^\alpha (w(x^{i\varepsilon}) - w_i^\varepsilon). \tag{39}$$

Из (36), (38), (39) в силу свойств функции $\sigma(x,u)$ при всех $(\alpha,\beta) \in \Lambda$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} A_i^\varepsilon &= O(\varepsilon^\alpha), \\ |A_i^\varepsilon| &\leqslant C\left(|w(x^{i\varepsilon})| + |w(x^{i\varepsilon})|^{1+\nu}\right) \cdot b_i^\varepsilon. \end{aligned} \tag{40}$$

Далее, положив $C_{1w} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N(\varepsilon)} C\left(|w(x^{i\varepsilon})| + |w(x^{i\varepsilon})|^{1+\nu}\right)$ и используя оценку (24), получаем

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} |A_i^\varepsilon| \leqslant C_{1w} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} b_i^\varepsilon \leqslant C_{2w}, \tag{41}$$

константы C_{1w}, C_{2w} не зависят от ε, но зависят от выбора функции $w(x)$.

Для квазирешений справедлива следующая лемма.

Лемма 2 *Последовательность продолженных квазирешений $\{\tilde{w}^\varepsilon(x)\}$ при $\varepsilon \to 0$ сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к функции $w(x)$, при этом функции $\tilde{w}_1^\varepsilon(x)$ сходятся сильно к функции $w(x)$ и функции $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ сходятся слабо к 0.*

Доказательство. Обозначим $B_i^1 = B(x^{i\varepsilon}, 4r_i^\varepsilon) \setminus B(x^{i\varepsilon}, 2r_i^\varepsilon)$, $\hat{B}_i^1 = B(x^{i\varepsilon}, 4r_i^\varepsilon)$. В силу (30), (33) и оценок (40), (41), имеем

$$\|\tilde{w}_1^\varepsilon - w\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \Bigg[\int\limits_{\hat{B}_i^1} (w(x) - w(x^{i\varepsilon}))^2\, dx + \int\limits_{B_i^1} (w(x) - w(x^{i\varepsilon}))^2 \left|\nabla\varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right)\right|^2 dx$$

$$+ \int\limits_{B_i^1} \left(2|w(x) - w(x^{i\varepsilon})| \left(\nabla w(x), \nabla\varphi\left(\frac{r}{4r_i^\varepsilon}\right)\right) + |\nabla w(x)|^2\right) dx \Bigg] = O(\varepsilon^{3(\alpha-1)}),$$

Перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\tilde{w}_1^\varepsilon - w\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

таким образом, функции $\tilde{w}_1^\varepsilon(x)$ сходятся сильно к функции $w(x)$ в $H^1(\Omega)$.

Обозначим $B_i^2 = B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2)\setminus B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/4)$, $\hat{B}_i^2 = B(x^{i\varepsilon}, d_i^\varepsilon/2)\setminus F_i^\varepsilon$. В силу (31), (33), условия d_1 и оценок (40), (41), имеем

$$\|\tilde{w}_2^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left[\int\limits_{F_i^\varepsilon}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{(r_i^\varepsilon)^2}\,dx + \int\limits_{\hat{B}_i^2}\frac{(A_i^\varepsilon)^2(r^2+1)}{r^4}\,dx + \int\limits_{B_i^2}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r^2}\left|\nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{B_i^2}\frac{2(A_i^\varepsilon)^2}{r}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}, \nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right)\right)dx \leqslant 2\pi\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}(A_i^\varepsilon)^2 d_i^\varepsilon + \frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}(A_i^\varepsilon)^2 r_i^\varepsilon$$
$$+4\pi\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon} + C\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{d_i^\varepsilon} \leqslant 8\pi C_{2w}\max_{1\leqslant i\leqslant N(\varepsilon)} w(x^{i\varepsilon}) + O\left(\varepsilon^{\alpha(1-\varkappa_1)}\right) \leqslant \hat{C},$$

где $\hat{C}$ не зависит от ε, и, значит, функции $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ равномерно ограничены по ε в $H^1(\Omega)$. Кроме того, для любой функции $\psi(x)\in C^2(\Omega)$, имеем

$$\left|(\tilde{w}_2^\varepsilon, \psi)_{H^1(\Omega)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}|A_i^\varepsilon|\left[\int\limits_{F_i^\varepsilon}\frac{|\psi(x)|}{r_i^\varepsilon}\,dx + \int\limits_{B_i^2}\frac{1}{r}\cdot\left|\left(\nabla\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right), \nabla\psi\right)\right| dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\hat{B}_i^2}\left(\frac{|\psi(x)|}{r}\cdot\varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right) + \varphi\left(\frac{2r}{d_i^\varepsilon}\right)\cdot\left|\left(\nabla\frac{1}{r}, \nabla\psi\right)\right|\right)dx\right] \leqslant C_1\varepsilon^{3(\alpha-1)} + C_2\max_{1\leqslant i\leqslant N(\varepsilon)} d_i^\varepsilon,$$

где константы C_1, C_2 не зависят от ε. Перейдём к пределу при $\varepsilon\to 0$. В силу условия d_1, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\tilde{w}_2^\varepsilon, \psi)_{H^1(\Omega)} = 0,\ \forall\psi(x)\in C^2(\Omega).$$

Таким образом, функции $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ равномерно ограничены по ε и слабо сходятся к 0 на всюду плотном в $H^1(\Omega)$ множестве $C^2(\Omega)$, и, значит, функции $\tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ слабо сходятся к 0 в пространстве $H^1(\Omega)$.

Следовательно, функции $\tilde{w}^\varepsilon(x) = \tilde{w}_1^\varepsilon(x) + \tilde{w}_2^\varepsilon(x)$ слабо сходятся к функции $w(x)$ в пространстве $H^1(\Omega)$.

2.3. Доказательство неравенства (17)

Подставим квазирешение $w^\varepsilon(x)$ (29) в функционал (13) и запишем его в следующем виде

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon]=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w_1^\varepsilon|^2\,dx-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\nabla w_1^\varepsilon,\nabla w_2^\varepsilon)\,dx+\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx-$$
$$-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon w^\varepsilon\,dx+\varepsilon^\beta\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{\partial F_i^\varepsilon}g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon)\,d\Gamma. \tag{42}$$

Оценим третье слагаемое в (42). Обозначим $\hat{B}_i=B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\backslash B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)$. Используя определение функций $w_2^\varepsilon(x)$ (31), оценки (40), (41), условие d_1 для областей Ω^ε и применяя интегрирование по частям по областям $B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)\setminus B(x^{i\varepsilon},2r_i^\varepsilon)\,(i=1,...,N(\varepsilon))$ с учётом равенства $\Delta w_2=0$ в этих областях, получаем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx=\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/2)\backslash F_i^\varepsilon}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx=\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left[\int\limits_{\partial B(x^{i\varepsilon},d_i^\varepsilon/4)}\frac{\partial w_2^\varepsilon}{\partial\nu}\cdot w_2^\varepsilon\,d\Gamma+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\hat{B}_i}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx+\int\limits_{\partial F_i^\varepsilon}\frac{\partial w_2^\varepsilon}{\partial\nu}\cdot w_2^\varepsilon\,d\Gamma\right]\leqslant C_1\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{d_i^\varepsilon}+4\pi\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon}\leqslant$$
$$\leqslant 4\pi\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{(A_i^\varepsilon)^2}{r_i^\varepsilon}+O\left(\varepsilon^{(1-\varkappa_1)\alpha}\right)=4\pi\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}a_i^\varepsilon\varepsilon^\alpha(w(x^{i\varepsilon})-w_i^\varepsilon)^2+O\left(\varepsilon^{(1-\varkappa_1)\alpha}\right).$$

В силу (37) при $\varepsilon\to0$ и $(\alpha,\beta)\in\Lambda$, имеем

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}|\nabla w_2^\varepsilon|^2\,dx=\begin{cases}o(1)\text{ при }\alpha+\beta>0;\\ 4\pi\sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)}a_i^\varepsilon\left(w(x^{i\varepsilon})-V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))\right)^2\varepsilon^\alpha+o(1)\\ \text{ при }\alpha+\beta=0;\\ 4\pi\sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)}a_i^\varepsilon\left(w(x^{i\varepsilon})\right)^2\varepsilon^\alpha+o(1)\text{ при }\alpha+\beta<0,\end{cases} \tag{43}$$

здесь $V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))$ – решение уравнения (10) при $u=w(x^{i\varepsilon})$.

Оценим последнее слагаемое в (42). Так как при $x\in\partial F_i^\varepsilon$ значение квазирешения $w^\varepsilon(x)=w_i^\varepsilon$, имеем

$$\varepsilon^\beta\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{\partial F_i^\varepsilon}g(x^{i\varepsilon},w^\varepsilon(x))\,d\Gamma=\varepsilon^\beta\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{\partial F_i^\varepsilon}g(x^{i\varepsilon},w_i^\varepsilon)\,d\Gamma=4\pi\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}(a_i^\varepsilon)^2g(x^{i\varepsilon},w_i^\varepsilon)\varepsilon^{2\alpha+\beta}.$$

Используя определение функции $g(x,u)$ (9) и свойства a_1, a_2 функции $\sigma(x,s)$, оценим $g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon)$ при $\alpha+\beta\neq 0$. В силу (37) при $\alpha+\beta<0$ значения $w_i^\varepsilon = O(\varepsilon^{-\alpha-\beta})$ малы, тогда

$$g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon) = 2\int\limits_0^{w_i^\varepsilon} \sigma(x^{i\varepsilon}, s)\, ds = 2\int\limits_0^{w_i^\varepsilon} \left(\sigma(x^{i\varepsilon},0) + \sigma_s'(x^{i\varepsilon},0)s + O(s^2)\right)\, ds =$$
$$= \sigma_s'(x^{i\varepsilon},0)\cdot(w_i^\varepsilon)^2 + O((w_i^\varepsilon)^3) = O(\varepsilon^{-2\alpha-2\beta}),$$

при $\alpha+\beta>0$ значения $w_i^\varepsilon = w(x^{i\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\alpha+\beta})$, тогда

$$g(x^{i\varepsilon}, w_i^\varepsilon) = g(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})) + 2\int\limits_{w(x^{i\varepsilon})}^{w(x^{i\varepsilon})+O(\varepsilon^{\alpha+\beta})} \sigma(x^{i\varepsilon}, s)\, ds = g(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})) + O(\varepsilon^{\alpha+\beta}).$$

Таким образом при $\varepsilon\to 0$ и $(\alpha,\beta)\in\Lambda$, имеем

$$\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} g(x^{i\varepsilon}, w^\varepsilon)\, d\Gamma = \begin{cases} 4\pi \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} (a_i^\varepsilon)^2 g\left(x^{i\varepsilon}, w(x^{i\varepsilon})\right) \varepsilon^{2\alpha+\beta} + o(1) \\ \text{ при } \alpha+\beta>0; \\ 4\pi \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} (a_i^\varepsilon)^2 g\left(x^{i\varepsilon}, V_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon}))\right) \varepsilon^{\alpha} \\ \text{ при } \alpha+\beta=0; \\ o(1) \text{ при } \alpha+\beta<0. \end{cases} \tag{44}$$

В силу формул (8), (42) и полученных оценок (43), (44) при малых ε, имеем

$$\Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_1^\varepsilon|^2\, dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla w_1^\varepsilon, \nabla w_2^\varepsilon)\, dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w^\varepsilon\, dx + 2\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} c_i^\varepsilon(w(x^{i\varepsilon})) + o(1).$$

Перейдём к пределу при $\varepsilon\to 0$. Так как $w(x)\in C_0^2(\Omega)$, в силу (7), условий теоремы 1, лемм 1, 2, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi^\varepsilon[w^\varepsilon] = \int\limits_\Omega |\nabla w|^2\, dx - 2\int\limits_\Omega fw\, dx + 2\int\limits_\Omega c(x,w)\, dx.$$

Таким образом, для любой функции $w(x)\in C_0^2(\Omega)$ справедливо равенство (16), где $\Phi[w]$ – функционал, определённый в (14). Учитывая что пространство $C_0^2(\Omega)$ плотно в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ и $u^\varepsilon(x)$ – минимизант функционала Φ^ε, мы убеждаемся в справедливости неравенства (17) для $\forall\, w(x)\in \mathring{H}^1(\Omega)$.

2.4. Доказательство неравенства (18)

Рассмотрим теперь функцию $u(x)$ – слабый предел в $H^1(\Omega)$ продолженных решений $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ задачи (1)-(3) по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$. Как следует из теорем вложения следы $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ и $u(x)$ на $\partial\Omega$ сохраняются и равны 0. Таким образом, функция $u(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Мы не можем утверждать, что функция $u(x) \in C_0^2(\Omega)$, и следовательно, не можем построить квазирешение, используя функцию $u(x)$, поэтому, используя (29)-(31), вначале мы построим квазирешение $u_\delta^\varepsilon(x)$ для функции $u_\delta(x) \in C_0^2(\Omega)$, такой что

$$\|u - u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \delta \tag{45}$$

для произвольного малого $\delta > 0$.

Представим решение задачи (1)-(3) в форме

$$u^\varepsilon(x) = u_\delta^\varepsilon(x) + \zeta_\delta^\varepsilon(x), \tag{46}$$

так как функции $u^\varepsilon(x), u_\delta^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, тогда $\zeta_\delta^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$. Продолжим квазирешение $u_\delta^\varepsilon(x)$ в шары F_i^ε описанным ранее способом (33). Продолжение функции $\zeta_\delta^\varepsilon(x)$ определим соответственно

$$\tilde{\zeta}_\delta^\varepsilon(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x) - \tilde{u}_\delta^\varepsilon(x). \tag{47}$$

Так как последовательность продолженных решений $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к функции $u(x)$ по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0\,(k = 1, ..., \infty)$ и последовательность функций $\tilde{u}_\delta^\varepsilon(x)$ в силу леммы 2 сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к функции $u_\delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$, тогда последовательность функций $\tilde{\zeta}_\delta^\varepsilon(x)$ сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к функции $u(x) - u_\delta(x)$ по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0\,(k = 1, ..., \infty)$.

Подставляя функцию $u^\varepsilon(x)$ (46) в функционал (13) и пользуясь теоремой о среднем для функции $g(x, u)$ на интервале $(u_\delta^\varepsilon, u_\delta^\varepsilon + \zeta_\delta^\varepsilon)$, запишем

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \Phi^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\zeta_\delta^\varepsilon|^2\,dx + 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_\delta^\varepsilon, \nabla\zeta_\delta^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx +$$
$$+ 2\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} \sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon + \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon)\zeta_\delta^\varepsilon\,d\Gamma,$$

где $0 \leqslant \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon \leqslant \zeta_\delta^\varepsilon$ при $\zeta_\delta^\varepsilon > 0$ и $\zeta_\delta^\varepsilon \leqslant \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon \leqslant 0$ при $\zeta_\delta^\varepsilon < 0$. Далее, учитывая представление (29)-(31) $u_\delta^\varepsilon(x) = u_{\delta1}^\varepsilon(x) + u_{\delta2}^\varepsilon(x)$, с помощью интегрирования по частям с учётом краевого условия, получаем

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] = \Phi^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] + \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla\zeta_\delta^\varepsilon|^2\,dx + 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u_{\delta1}^\varepsilon, \nabla\zeta_\delta^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Delta u_{\delta2}^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx -$$
$$-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta_\delta^\varepsilon\,dx + 2\varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \int\limits_{\partial F_i^\varepsilon} \Big(\sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon + \hat{\zeta}_\delta^\varepsilon) - \sigma(x^{i\varepsilon}, u_\delta^\varepsilon)\Big)\,\zeta_\delta^\varepsilon\,d\Gamma.$$

Отсюда, в силу монотонности функции $\sigma(x,u)$, следует

$$\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon] \geqslant \Phi^\varepsilon[u^\varepsilon_\delta] - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon_{\delta 1}, \nabla \zeta^\varepsilon_\delta)\, dx\right| - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \Delta u^\varepsilon_{\delta 2}\zeta^\varepsilon_\delta\, dx\right| - 2\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta^\varepsilon_\delta\, dx\right|. \quad (48)$$

Оценим слагаемые в правой части этого неравенства.

Пользуясь неравенствами Коши-Буняковского и (45) и учитывая, что функции $\tilde u^\varepsilon_{\delta 1}(x)$ сходятся сильно в $H^1(\Omega)$ к функции $u_\delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$, $\tilde\zeta^\varepsilon_\delta(x)$ сходятся слабо в $H^1(\Omega)$, и в силу компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)\,(p<6)$ сильно в $L^p(\Omega)$, к функции $u(x)-u_\delta(x)$ по подпоследовательности $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$ и $f^\varepsilon(x)$, продолженные нулём на множество F^ε, сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$, получаем

$$\begin{gathered}\varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon_{\delta 1}, \nabla\zeta^\varepsilon_\delta)\, dx\right| \leqslant \varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega} (\nabla \tilde u^\varepsilon_{\delta 1}, \nabla\tilde\zeta^\varepsilon_\delta)\, dx\right| = \\ = \left|\int\limits_{\Omega}(\nabla u_\delta, \nabla(u-u_\delta))\, dx\right| \leqslant \|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\delta.\end{gathered} \quad (49)$$

$$\begin{gathered}\varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\zeta^\varepsilon_\delta\, dx\right| = \varlimsup_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\left|\int\limits_{\Omega} \tilde f^\varepsilon\tilde\zeta^\varepsilon_\delta\, dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega} f(u-u_\delta)\, dx\right| \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u-u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\delta.\end{gathered} \quad (50)$$

Обозначим $B_i = B(x^{i\varepsilon}, d^\varepsilon_i/2)\setminus B(x^{i\varepsilon}, d^\varepsilon_i/4)$, $\hat B_i = B(x^{i\varepsilon}, d^\varepsilon_i/2)$. Используя свойства функций $\varphi(t)$, $u_\delta(x)$, условие d_2 для областей Ω^ε и неравенства Коши-Буняковского и Гёльдера при значении $\varkappa_2$ из условия d_2, а также значение объёма шара $|\hat B_i| = \frac{\pi}{6}(d^\varepsilon_i)^3$, получаем

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Delta u^\varepsilon_{2\delta}\cdot\zeta^\varepsilon_\delta\, dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{B_i}|\Delta u^\varepsilon_{2\delta}\cdot\zeta^\varepsilon_\delta|\, dx \leqslant C_1\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{|A^\varepsilon_i[u_\delta]|}{(d^\varepsilon_i)^3}\int\limits_{B_i}|\zeta^\varepsilon_\delta|\, dx \leqslant \\ \leqslant C_2\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{1+\nu}b^\varepsilon_i}{(d^\varepsilon_i)^3}\int\limits_{\hat B_i}|\tilde\zeta^\varepsilon_\delta|\, dx \leqslant C_2\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{1+\nu}b^\varepsilon_i}{(d^\varepsilon_i)^3}|\hat B_i|^{1-1/p_1}\|\tilde\zeta^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\hat B_i)} \leqslant \\ \leqslant C_3\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{(b^\varepsilon_i)^{\varkappa_2}}{(d^\varepsilon_i)^{3(\varkappa_2-1)}}\right)^{\frac{1}{\varkappa_2}}\left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}|u_\delta(x^{i\varepsilon})|^{(1+\nu)p_2}|\hat B_i|\right)^{1/p_2}\|\tilde\zeta^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant C_4\|u_\delta\|^{1+\nu}_{L^{(1+\nu)p_2}(\Omega)}\|\tilde\zeta^\varepsilon_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)},\end{gathered}$$

где $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{\varkappa_2}=1$. В силу условий a_2, d_2 имеем $\frac{2+\nu}{6}<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant\frac{1}{2}$ и, значит, мы можем выбрать такие p_1, p_2, чтобы $p_1<6$ и $(1+\nu)p_2<6$. Используя далее тот факт, что пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в пространство $L^p(\Omega)$ при $p<6$, получаем справедливость следующей оценки

$$\overline{\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}}\left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Delta u_{2\delta}^\varepsilon\cdot\zeta_\delta^\varepsilon\,dx\right|\leqslant\tilde{C}\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}^{1+\nu}\cdot\overline{\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}}\|\tilde{\zeta}_\delta^\varepsilon\|_{L^{p_1}(\Omega)}=\tilde{C}\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}^{1+\nu}\cdot$$
$$\cdot\|u-u_\delta\|_{L^{p_1}(\Omega)}\leqslant\tilde{C}\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}^{1+\nu}\cdot\|u-u_\delta\|_{H^1(\Omega)}\leqslant\tilde{C}\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}^{1+\nu}\cdot\delta. \tag{51}$$

Перейдём в неравенстве (48) к пределу при $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$. Используя оценки (49), (50), (51), получаем

$$\underline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\geqslant\underline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon]-2\left(\left(\tilde{C}\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}^\nu+1\right)\cdot\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\cdot\delta.$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $\delta\to 0$. Учитывая непрерывность функционала Φ в $H^1(\Omega)$ и равенство (16) при $w^\varepsilon=u_\delta^\varepsilon$, $w=u_\delta$, получаем

$$\underline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_k\to 0}\Phi^\varepsilon[u^\varepsilon]\geqslant\lim_{\delta\to 0}\Phi[u_\delta]=\Phi[u].$$

Таким образом, неравенство (18) доказано.

2.5. Единственность решения усреднённой задачи (11)-(12)

Рассмотрения требуют лишь случаи, когда параметры (α,β) принадлежат ломанной $\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2$. Поскольку при $(\alpha,\beta)\in\Lambda\setminus\{\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2\}$ $c(x,u)=0$ (т.е. $c_u(x,u)=0$) и задача (11)-(12) становится задачей Дирихле для уравнения Пуассона.

Будем рассматривать функцию $c^\varepsilon(x,u)$, заданную формулой (7), как обобщённую функцию переменных x, u из $\mathcal{D}'(\Omega\times R^1)$, зависящую от параметра ε ([19]). Рассмотрим обобщённую функцию $\tilde{c}^\varepsilon(x,u)\in\mathcal{D}'(\Omega\times R^1)$: $\tilde{c}^\varepsilon(x,u)=\frac{\partial^2}{\partial^2 u}c^\varepsilon(x,u)=\sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)}\tilde{c}_i^\varepsilon(u)\cdot\delta(x-x^{i\varepsilon})$. В силу формул (8), (9), (10) при $(\alpha,\beta)\in\ell_1\cup\lambda_0\cup\ell_2$ имеем

$$\tilde{c}_i^\varepsilon(u)=\begin{cases}4\pi(a_i^\varepsilon)^2\sigma_u(x^{i\varepsilon},u)\varepsilon^3,\ \text{при }(\alpha,\beta)\in\ell_1;\\ \dfrac{4\pi(a_i^\varepsilon)^2\sigma_u(x^{i\varepsilon},V_i^\varepsilon)}{1+a_i^\varepsilon\sigma_u(x^{i\varepsilon},V_i^\varepsilon)}\varepsilon^3,\ \text{при }(\alpha,\beta)\in\lambda_0;\\ 4\pi a_i^\varepsilon\varepsilon^3,\ \text{при }(\alpha,\beta)\in\ell_2.\end{cases} \tag{52}$$

Из условия 1 теоремы 1 следует, что функции $\tilde{c}^\varepsilon(x,u)$ сходятся в слабой топологии $\mathcal{D}'(\Omega)$ к второй производной $\frac{\partial^2}{\partial u^2}c(x,u)$. В силу свойства функции плотности поглощения $\sigma(x,u)$ ($\sigma_u(x,u)\geqslant 0$) и формул (52) имеем $\tilde{c}_i^\varepsilon(u)\geqslant 0$. Отсюда заключаем, что вторая производная $\frac{\partial^2}{\partial u^2}c(x,u)\geqslant 0$ и следовательно справедливо неравенство

$$(c_u(x,u_1)-c_u(x,u_2))(u_1-u_2)\geqslant 0\;\forall\,u_1,\,u_2\in R^1. \tag{53}$$

Предположим, что существует два различных решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ задачи (11)-(12). Тогда их разность $u_1(x) - u_2(x)$ будет удовлетворять соотношениям

$$-\Delta(u_1 - u_2) + (c_u(x, u_1) - c_u(x, u_2)) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{54}$$

$$u_1 - u_2 = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{55}$$

Умножим (54) на $u_1(x) - u_2(x)$ и проинтегрируем по области Ω. Применяя интегрирование по частям и (55), получаем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} (c_u(x, u_1) - c_u(x, u_2))(u_1 - u_2) \, dx = 0.$$

В силу (53) из этого равенства следует, что $u_1(x) = u_2(x)$ при почти всех $x \in \Omega$ и единственность решения $u(x)$ усреднённой задачи (11)-(12) доказана. Теорема доказана.

Литература

1. Берлянд Л.В., Гончаренко М.В. Осреднение уравнения диффузии в пористой среде со слабым поглощением // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1989. – № **52**. – С. 113 – 122.

2. Cabarrubias B., Donato P. Homogenization of a quasilinear elliptic problem with nonlinear Robin boundary condition // Applicable Analysis: An International Journal, 2012. – Vol.**91**, №6. – P. 1111 – 1127.

3. Chourabi I., Donato P. Homogenization and correctors of a class of elliptic problems in perforated domains // Asymptotic Analysis, 2015. – № **92**, P. 1 – 43.

4. Chourabi I., Donato P. Homogenization of elliptic problems with quadratic growth and nonhomogenous Robin conditions in perforated domains // Chinese Annals of Mathematics, 2016. – Vol. **37B**, №6. – P. 833 – 852.

5. Cioranescu D., Donato P. On Robin problems in perforated domains //Mathematical sciences and applications, 1997. – № **9**. – P. 123 – 135.

6. Cioranescu D., Donato P., Zaki R. Asymptotic behaviour of elliptic problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions // Asymptotic Analysis, 2007. – № **53**. – P. 209 – 235.

7. Conca C., Diaz J., Linan A., Timofte C. Homogenization in chemical reactive floes // Electronic Journal of Differential Equations, 2004. – № **40**. – P. 1 – 22.

8. Conca C., Diaz J., Linan A., Timofte C. Homogenization results for chemical reactive flows through porous media // New Trends in Continuum Mechanics, 2005. – № **6**. – P. 99 – 107.

9. Conca C., Diaz J., Timofte C. On the homogenization of a transmission problem arising in chemistry // Romanian Reports in Physics, 2004. – Vol. **56**, №4. – P. 613 – 622.

10. Goncharenko M. The asymptotic behaviour of the third boundary-value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // Mathematical sciences and applications, 1997. – № **9**. – P. 203 – 213.

11. Mel'nyk T.A., Sivak O.A. Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinean multiphase interactions in a perforated domain // Ukrainian Mathematical Journal, 2009. – Vol.61, № **4**. – P. 494 – 512.

12. Mel'nyk T.A., Sivak O.A. Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains // Asymptotic Analysis, 2011. – № **5**. – P. 79 – 92.

13. Timofte C. On the homogenization of a climatization problem // Studia Universitatis «Babes-Bolyai», Mathematica, 2007. – Vol.LII, № **2**. – P. 117 – 125.

14. Timofte C., Cotfas N., Pavel G. On the asymptotic behaviour of some elliptic problems in perforated domains // Romanian Reports in Physics, 2012. – Vol.64, № **1**. – P. 5 – 14.

15. Berlyand L.V., Khruslov E.Ya. Competition between the surface and the boundary layer energies in a Ginzburg-Landau model of a liquid crystal composite // Asymptotic Analysis, 2002. – № **29**. – P. 185 – 219.

16. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Усреднённые модели микронеоднородных сред. – К: Наукова думка, 2005. – 551 с.

17. Cabarrubias B., Donato P. Existence and Uniqueness for a Quasilinear Elliptic Problem With Nonlinear Robin Condition // Carpathian Journal of Mathematics, 2011. – Vol.27, № **2**. – P. 173 – 184.

18. Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Математический сборник, 1978. – Т.106(148), № **4(8)**. – С. 604 – 621.

19. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

Статья получена: 15.11.2016; окончательный вариант: 10.12.2016; принята: 15.12.2016.