Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна Серія "Математика, прикладна математика і механіка" Том 85, 2017, с.43–51

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics” Vol. 85, 2017, p. 43–51
DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-03

УДК 512.552

# Звичайні вагові функції допустимих сагайдаків

О. В. Зеленський, В. М. Дармосюк

*Кам'янець - Подільський національний університет імені Івана Огієнка*
*вул. Огієнка, 61, 32301, м. Кам'янець - Подільський, Україна*
*Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського*
*вул. Нікольська, 24, 54030, м. Миколаїв, Україна*
*zelik82@mail.ru, darmosiuk@gmail.com*

У роботі знайдено класи сагайдаків зі звичайними ваговими функціями та знайдено сагайдаки, для яких не існує звичайних вагових функцій.
*Ключові слова*: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників, вагова функція допустимого сагайдака.

Зеленский А. В., Дармосюк В. Н. **Обычные весовые функции допустимых колчанов.** В работе найдены классы колчанов с обычными весовыми функциями и найдены колчаны, для которых не существует обычных весовых функций.
*Ключевые слова*: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей, весовая функция допустимого колчана.

O. V. Zelenskiy, V. M. Darmosiuk. **The ordinary weight function of admissible quivers.** We found quivers classes with ordinary weight functions and quivers for which there are not ordinary weight functions.
*Keywords*: exponent matrix,weight function of admissible quiver, rigid quiver.

*2000 Mathematics Subject Classification:* 16G20, 16G30.

## 1. Вступ

Одним із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників [2],[3], зокрема, сагайдаки таких кілець [1]. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. В [4] доводиться нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю.

В [5] розглядаються вагові функції, які визначають допустимі сагайдаки. З їх появою з'явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [6]. В [7] знайдено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака. В [8] досліджуються цикли допустимих сагайдаків. В роботі знайдені допустимі сагайдаки, для яких не існує звичайних вагових функцій. Показано, що існують допустимі сагайдаки, у яких для довільної допустимої вагової функції вага хоча б однієї стрілки більше ніж одиниця. Також у статті виділено класи сагайдаків зі звичайними ваговими функціями та доведено, що всі допустимі сагайдаки з чотирма вершинами мають звичайні вагові функції.

## 2. Попередні відомості

Розглянемо матрицю $\mathcal{E}=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathcal{Z})(M_n(\mathcal{Z})$ — це кільце матриць $n \times n$ з цілими елементами).

**Означення 1.**[1, гл.14, с. 353] *Матриця $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$, для якої виконуються наступні умови:*

*1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всіх $i$, $j$, $k = 1, \ldots, n$,*

*2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$,*

*називається матрицею показників.*

*Матриця показників, для якої виконується умова*

*3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 1$ для всіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $(i \neq j)$*

*називається зведеною матрицею показників.*

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матриці $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \quad \in M_n(\mathbb{Z})$, де $E_n$ — одинична матриця, та $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min\limits_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

**Означення 2.** [1, гл.14, с. 357] *Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.*

**Означення 3.** [1] *Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називають еквівалентними, якщо одну можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:*

*1. Відняти ціле число $t$ від елементів $i$-го рядка і додати його до елементів $i$-го стовпця.*

*2. Поміняти місцями два рядки і два стовпці з такими ж номерами.*

**Означення 4.**[1, гл.14, с. 357] *Сагайдак $Q$ називається допустимим, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

**Означення 5.** [5] *Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називають зваженим, якщо визначена функція $\omega \colon AQ \to R$ . Функцію $\omega$ називають ваговою, а її значення на стрілці – вагою стрілки.*

Вага циклу дорівнює сумі ваг його стрілок та позначається $\omega(i_1, i_2, ..., i_n)$, де $i_1, i_2, ..., i_n$ вершини циклу.

**Теорема 1.**[3]. Якщо $\mathcal{E}$ - зведена матриця показників, $Q = Q(\mathcal{E})$-сагайдак матриці показників, то матриця $[Q]$ є (0, 1) - матрицею суміжності сильно зв'язного сагайдака.

**Теорема 2.** [5] Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ допустимий тоді й тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to N \cup \emptyset$ , яка задовольняє такі умови:

1. Вага стрілки з точки $i$ у точку $j$ менша за вагу шляху з точки $i$ у точку $j$ довжини $l \geq 2$.

2. Вага петлі в точці $i$ менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку $i$, довжиною $l \geq 2$.

3. Вага будь-якого циклу більша або дорівнює 1.

4. Вага петлі дорівнює 1.

5. Через кожну точку без петлі проходить цикл довжиною $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

**Зауваження 1.** Згідно з умовами (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

**Означення 6.**[5]*Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 1, називатимемо допустимою ваговою функцією.*

За сагайдаком $Q$ і допустимою ваговою функцією $\omega$ можна побудувати матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$ таким чином: якщо сагайдак $Q$ містить стрілку $\sigma_{ij}$, то $\alpha_{ij} = \omega(\sigma_{ij})$, у протилежному випадку $\alpha_{ij}$ дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини $v_i$ у вершину $v_j$.

**Означення 7.**[6]*Допустимий сагайдак $Q$ називають жорстким, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

**Означення 8.** [6]*Простий цикл в сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати одиничним.*

**Твердження 1.** [7] В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$ між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок окрім стрілок цього циклу.

**Твердження 2.** [7] Допустимий сагайдак $Q$ не може містити двох стрілок $\sigma_{ia}$ та $\sigma_{ja}$, де вершини $i, j$ належать одному одиничному циклу.

**Твердження 3.** [7] Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$, не може містити стрілки $\sigma_{ai}, \sigma_{aj}$, де вершини $i, j$ належать деякому одиничному циклу.

**Означення 9.** *Допустима вагова функція називається звичайною, якщо вага всіх стрілок не перевищує одиницю.*

**Теорема 3.** [8] Нехай $Q$ допустимий сагайдак, $\sigma_{uv}$ - стрілка сагайдака $Q$, $Q^*$ - сагайдак, який утворюється з $Q$ видаленням стрілки $\sigma_{uv}$. Сагайдак $Q^*$ є допустимим, якщо виконуються умови:

1. В $Q$ існує шлях із вершини $u$ в вершину $v$, відмінний від стрілки $\sigma_{uv}$ ;

2. Існує вагова функція $\omega$, для якої $Q$ допустимий сагайдак і стрілка $\sigma_{uv}$ не належить одиничному циклу.

## 3. Основні результати

В наступних твердженнях виділимо класи сагайдаків, для яких завжди існують звичайні вагові функції.

**Твердження 4.** Якщо сагайдак $Q$ має петлі у всіх вершинах, то для сагайдака $Q$ існує звичайна вагова функція.

*Доведення.* Вагова функція $\omega$ з вагою всіх стрілок рівною одиниці задовольняє всі умови теореми 1, оскільки вага всіх циклів не менше двійки. Вага стрілки менше ніж вага шляху, тому вагова функція є звичайною ваговою функцією.

**Твердження 5.** Якщо сагайдак $Q = Q(\mathcal{E})$, $Q = (VQ, AQ)$ має єдиний одиничний цикл, то для сагайдака $Q$ існує звичайна вагова функція.

*Доведення.* За твердженням 1 одиничний цикл не містить інших стрілок, окрім стрілок самого циклу. Усі стрілки сагайдака $Q$ поділимо на дві групи: стрілки одиничного циклу та стрілки, які не належать одиничному циклу. Не зменшуючи загальності можна вважати, що одиничний цикл складається з вершин $(12\dots k)$. Для сагайдака побудуємо вагову функцію $\omega$ наступним чином:

1) $\omega(\sigma_{12}) = 1$, $\omega(\sigma_{23}) = 0$, ...,$\omega(\sigma_{k-1k}) = 0, \omega(\sigma_{k1}) = 0$;

2) вага інших стрілок сагайдака $Q$ рівна одиниці.

Для вагової функції $\omega$ вага циклу $(12\dots k)$ рівна 1, а вага інших циклів більша одиниці, тому умови 2), 3), 5) теореми 1 виконуються. Доведемо, що виконується умова 1) теореми 1: Якщо стрілка $\sigma_{ij} \in AQ$ належить одиничному циклу $(12\dots k)$, то в будь-якому шляху $\sigma_{ii_1}$,$\sigma_{i_1 i_2}$,...,$\sigma_{i_p j}$ (який починається в вершині "$i$" та завершується в вершині "$j$" ) є мінімум дві стрілки $\sigma_{ii_1}$,$\sigma_{i_p j}$, які не належать одиничному циклу, тому вага такого шляху не менше двійки.

Якщо вершина "$i$" та вершина "$j$", не належать одиничному циклу, то очевидно, що довільний шлях, який починається в вершині "$i$" та завершується в вершині "$j$" містить мінімум дві стрілки $\sigma_{ii_1}$, $\sigma_{i_p j}$, які не належать одиничному циклу, тому вага такого шляху не менше двійки.

Якщо вершина "$i$" належить одиничному циклу та вершина "$j$" не належить одиничному циклу, то з твердження 2 випливає, що в шляху $\sigma_{ii_1}$,$\sigma_{i_1 i_2}$,...,$\sigma_{i_p j}$ вершина $i_p$ не належить одиничному циклу, тому $\omega(\sigma_{i_{p-1} i_p}) = 1$, $\omega(\sigma_{i_p j}) = 1$ вага шляху $\sigma_{ii_1}$,$\sigma_{i_1 i_2}$,...,$\sigma_{i_p j}$ не менше двох. Якщо вершина "$i$" не належить та вершина "$j$" належить одиничному циклу, то з твердження 3 випливає, що в шляху $\sigma_{ii_1}$,$\sigma_{i_1 i_2}$,...,$\sigma_{i_p j}$ вершина $i_1$ не належить одиничному циклу, тому $\omega(\sigma_{ii_1}) = 1$, $\omega(\sigma_{i_1 i_2}) = 1$ вага шляху $\sigma_{ii_1}$,$\sigma_{i_1 i_2}$,...,$\sigma_{i_p j}$ не менше двох.

Отже, для довільної стрілки $\sigma_{ij} \in AQ$ вага шляху, який починається в вершині "$i$" та завершується в вершині "$j$", не менше двох, тому вагова функція

$\omega$ задовольняє всім умовам теореми 1. Отже, $\omega$ є допустимою ваговою функцією. Оскільки вага всіх стрілок не перевищує одиниці, то $\omega$ є звичайною ваговою функцією. Твердження доведено.

**Лема 1.** В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, $VQ = \{1, 2, 3, 4\}$ без петель, у якого довжина всіх одиничних циклів дорівнює два і не існує вершини, через яку проходять усі одиничні цикли, можна вибрати два одиничні цикли, які складаються з різних вершин.

*Доведення.* Вершина "1" без петлі, тому вона належить одиничному циклу. Нехай це буде цикл (1 2). Вершина "3" без петлі, тому вона належить одиничному циклу. Якщо це цикл (3 4), то сагайдак Q містить цикли (1 2), (3 4), які складаються з різних вершин. Лему доведено. Розглянемо випадок коли Q не містить цикл (3 4). Якщо через вершину "3" проходить цикл (1 3), (варіант коли проходить цикл (2 3) розглядається аналогічно), то сагайдак $Q$ не містить (1 4) (інакше всі одиничні цикли проходять через вершину "1" ), не містить (3 4), тому містить (2 4). Одержали, що сагайдак $Q$ містить цикли (1 3), (2 4), які складаються з різних вершин. Лему доведено.

**Лема 2.** Для допустимого сагайдака з чотирма вершинами без петель існує звичайна вагова функція.

*Доведення.* Нехай $Q = (VQ, AQ)$, $VQ = \{1, 2, 3, 4\}$ допустимий сагайдак з чотирма вершинами без петель. Якщо сагайдак $Q$ містить одиничний цикл з чотирма вершинами, то він не містить інших стрілок, крім стрілок самого циклу, тому його довільна допустима вагова функція є звичайною. Якщо сагайдак $Q$ містить одиничний цикл з трьома вершинами, то через четверту вершину може проходити одиничний цикл з двома або з трьома вершинами, тому з точністю до ізоморфізму таких сагайдаків є тільки два: $[Q_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[Q_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Усі стрілки цих сагайдаків належать одиничним циклам, тому допустимі вагові функції є звичайними. Розглянемо випадок, коли довжина всіх одиничних циклів дорівнює два. Можливі два випадки:

Випадок 1. Усі одиничні цикли проходять через одну вершину, наприклад, через вершину "1", тоді сагайдак $Q$ містить цикли (1 2), (1 3), (1 4) і з тверджень 2, 3 випливає, що він не містить інших стрілок, які не належать цим циклам, тому для сагайдака $Q$ існує звичайна вагова функція.

Випадок 2. У сагайдаку $Q$ не існує вершини через яку проходять усі одиничні цикли.

Доведемо, що в сагайдаку $Q$ можна вибрати два одиничні цикли, які складаються з різних вершин.

Не зменшуючи загальності можна вважати, що сагайдак $Q$ містить одиничні цикли (1 2), (3 4). Оскільки $Q$ сильнозв'язний, то він містить стрілку по якій можна потрапити з циклу (1 2) до циклу (3 4). З точністю до ізоморфізму можна вважати, що $Q$ містить стрілку $\sigma_{13}$. З тверджень 2,3 випливає, що сагайдак $Q$ не містить стрілок $\sigma_{23}$, $\sigma_{14}$. Оскільки $Q$ сильнозв'язний, то він містить стрілку по якій можна потрапити з циклу (3 4) до циклу (1 2). Розглянемо два випадки.

Випадок 1. $Q$ містить стрілку $\sigma_{31}$, або $\sigma_{42}$, або обидві стрілки. З тверджень 2,3 випливає, що сагайдак $Q$ не містить стрілок $\sigma_{23}$, $\sigma_{14}$, $\sigma_{32}$, $\sigma_{41}$. Якщо $Q$ містить обидві стрілки $\sigma_{31}$, $\sigma_{42}$ та містить стрілку $\sigma_{24}$, то ми одержали сагайдак $Q_1$ з матрицею суміжності $[Q_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Побудуємо звичайну вагову функцію для $Q_1$ наступним чином: вага стрілок $\sigma_{21}$, $\sigma_{43}$ дорівнює нулю, а вага інших стрілок дорівнює одиниці.

Тобто $Q_1 = Q(\mathcal{E}_1)$, $\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що вагова функція задовольняє всім вимогам теореми 1. Якщо в $Q_1$ видалити стрілку $\sigma_{24}$ та одну з стрілок $\sigma_{31}$ або $\sigma_{42}$, то сильнозв'язність сагайдака не порушиться. Крім того видалені стрілки одиничним циклам не належать, тому за теоремою 2 сагайдак залишиться допустимим з тією ж вагою стрілок. Отже, для довільного сагайдака $Q$, який належить до випадку 1, існує звичайна вагова функція.

Випадок 2. $Q$ містить стрілку $\sigma_{32}$ , або $\sigma_{41}$, або обидві стрілки. З тверджень 2,3 випливає, що сагайдак $Q$ не містить стрілок $\sigma_{23}$, $\sigma_{14}$, $\sigma_{31}$, $\sigma_{42}$. Аналогічно до попереднього випадку розглянемо допустимий сагайдак $Q_2$ з матрицею суміжності $[Q_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = Q(\mathcal{E}_2)$, $\mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що вага всіх стрілок не перевищує одиниці, тому допустима вагова функція є звичайною. Якщо з $Q_2$ видалити стрілку $\sigma_{24}$ та одну з стрілок $\sigma_{32}$ або $\sigma_{41}$, то за теоремою 2 сагайдак залишиться допустимим з тією ж вагою стрілок. Отже, для довільного сагайдака $Q$, який належить до випадку 2, існує звичайна вагова функція. Лему доведено.

**Теорема 4.** Для довільного допустимого сагайдака $Q$ з чотирма вершинами існує звичайна вагова функція.

*Доведення.* Нехай $Q = (VQ, AQ)$, $VQ = \{1, 2, 3, 4\}$. Якщо сагайдак $Q$ має чотири петлі, то за твердженням 4 сагайдак $Q$ має звичайну вагову функцію з вагою всіх стрілок рівною одиниці.

Сагайдак $Q$ не може мати три петлі, оскільки з того що в сагайдаку є вершина без петлі, випливає існування в сагайдаку одиничного циклу, який містить принаймні дві вершини, тому в $Q$ не менше двох вершин без петель.

Якщо сагайдак $Q$ має дві петлі, то в сагайдаку є один одиничний цикл з двох вершин, тому за твердженням 5 сагайдак $Q$ має звичайну вагову функцію.

Якщо сагайдак $Q$ має одну петлю, то або в сагайдака $Q$ є одиничний цикл з трьох вершин, або два одиничні цикли, які складаються з двох вершин кожен та мають спільну вершину. У першому випадку з твердження 5 випливає існування звичайної вагової функції. Розглянемо другий випадок. Нехай (1 2) та (2 3) одиничні цикли. Зауважимо, що з тверджень 2 та 3 випливає, що сагайдак $Q$ не містить стрілку $\sigma_{13}$ та стрілку $\sigma_{31}$. Розглянемо вагову функцію $\omega$: $\omega(\sigma_{12}) = \omega(\sigma_{32}) = 1$, $\omega(\sigma_{21}) = \omega(\sigma_{23}) = 0$, вага інших стрілок сагайдака $Q$ дорівнює одиниці. Доведемо, що в $Q$ виконується нерівність: вага шляху із вершини "$i$" у вершину "$j$" більше ніж $\omega(\sigma_{ij})$ . Якщо стрілка $\sigma_{ij}$ належить одиничному циклу, то інший шлях із вершини "$i$" у вершину "$j$" проходить через вершину "4", тому його вага не менше двох. Нерівність виконується. Якщо сагайдак $Q$ містить стрілку $\sigma_{24}$, то іншого шляху із вершини "2" у вершину "4" не існує, оскільки з твердження 2 випливає, що сагайдак $Q$ не містить стрілки $\sigma_{14}$ та $\sigma_{34}$. Аналогічно з твердження 3 випливає, що якщо сагайдак $Q$ містить стрілку $\sigma_{42}$, то іншого шляху із вершини "4" у вершину "2" не існує. Якщо сагайдак містить стрілку $\sigma_{14}$, то з твердження 3 випливає, що він не містить стрілку $\sigma_{24}$ тому, якщо інший шлях із вершини "1" у вершину "4" існує, то він проходить через стрілку $\sigma_{34}$ і його вага не менше двох. Отже, нерівність виконується. З аналогічних міркувань випливає, що якщо сагайдак $Q$ містить стрілку $\sigma_{34}$, або стрілку $\sigma_{41}$, або стрілку $\sigma_{43}$, то для цих стрілок нерівність виконується. Отже, нерівність, згідно з якою вага шляху більше ніж вага стрілки, виконується для будь-якої стрілки сагайдака $Q$ з однією петлею. В лемі 2 доведено, що для допустимого сагайдака з чотирма вершинами без петель існує звичайна вагова функція.

Отже, для довільного допустимого сагайдака з чотирма вершинами існує звичайна вагова функція. Теорему доведено.

**Теорема 5.** Існують допустимі сагайдаки, для яких не існує звичайних вагових функцій.

*Доведення.* Розглянемо допустимий сагайдак з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, який одержується з матриці показників $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

В сагайдаку $Q$ через вершину "1" проходить тільки один простий цикл (1 3 2) з вершинами без петель, тому цикл (1 3 2) одиничний. Аналогічно одиничними є цикли (4 2 5) та (3 6 5). Всередині циклу (1 3 6 5 4 2 1) є стрілки (наприклад $\sigma_{32}$ ), тому за твердженням 1 цикл (1 3 6 5 4 2 1) не є одиничним тобто його вага не менше двох. Тобто

$$\omega(1365421) \geq 2 \qquad (1).$$

$$\omega(1365421) = \omega(132) + \omega(425) + \omega(365) - \omega(253);$$

$$\omega(1365421) = 3 - \omega(253) \geq 2. \qquad (2).$$

З (1) та (2) випливає, що $\omega(1365421)$ дорівнює 2. Тому $\omega(136) + \omega(654) + \omega(421) = 2$. Ліва частина рівності складається з трьох доданків, один з яких рівний нулю. Не зменшуючи загальності можна вважати, що $\omega(654) = 0$ (інші випадки розглядаються аналогічно). Оскільки вага шляху більше ніж вага стрілки, ми одержуємо нерівності:

$$\omega(\sigma_{76}) + \omega(\sigma_{65}) + \omega(\sigma_{54}) > \omega(\sigma_{74}) \leftrightarrow \omega(\sigma_{76}) > \omega(\sigma_{74}). \qquad (3).$$

Оскільки вершина "7" з петлею, то за теоремою 1 довільний цикл, який проходить через вершину "7", не менше двох, тобто

$$\omega(\sigma_{74}) + \omega(\sigma_{47}) \geq 2 \qquad (4).$$

Якщо $\omega(\sigma_{74}) = 0$, то з (4) випливає, що $\omega(\sigma_{47}) \geq 2$ . Якщо $\omega(\sigma_{74}) \geq 2$ , то з (3) випливає, що $\omega(\sigma_{74}) \geq 2$ .

Отже, ми довели, що не існує допустимої вагової функції сагайдака $Q$ з вагою стрілок не більше ніж одиниця, тобто для сагайдака $Q$ не існує звичайної вагової функції. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules: vol. 1 /M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko/ Kluwer Academic Publisheers, 2004. – 380 p.

2. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules: vol 2. /M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko / Kluwer Academic Publisheers, 2007. – 400 p.

3. Kirichenko, V. V. Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev// International J. of Algebra and Computation, 2005. – Vol. 15, N. **5–6**. – P. 1–16.

4. Зеленський, О. В. Жорсткi сагайдаки зведених матриць показникiв/ О.В. Зеленський// Вiсн. Київ. ун-ту. Сер: Фiз.-мат. науки, 2007. – № **3**. – С. 27-31.

5. Журавлев, В. Н. Допустимые колчаны/ В. Н. Журавлев// Фундамент. и прикл. математика, 2008. – Т. 14, вып.7. – С. 121–128.

6. Кириченко, В.В. О жестких колчанах/В.В Кириченко, В.Н. Журавлёв, И.Н. Цыгановская/ Фундамент. и прикл. математика, 2006. – Т.**12**, вып. 8. – С. 105–120.

7. Журавльов В. М. Одиничнi сагайдаки матриць показникiв./Журавльов В. М., Зеленський О. В., Дармосюк В. М. / Вiсник Київського унiверситету. Серiя: фiзико-математичнi науки, 2012. – № **4**. – С. 27-31.

8. Зеленський О. В. Цикли допустимих сагайдакiв. /Зеленський О.В.// Математисні студiї., 2014. – № **42**. – С. 3–8.

Стаття одержана: 21 лютого 2017; перероблений вариант: 1 жовтня 2017; прийнята: 12 жовтня 2017.