

УДК 535.326:537.874

**ВЛИЯНИЕ ФУНКЦИИ-ИСТОЧНИКА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ  
ПРИ ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ ПЛАЩА НЕВИДИМОСТИ****В. И. Вьюнник, А. А. Звягинцев***Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина**Харьков, пл. Свободы, 4, 61077**тел.: (057) 707-53-19, e-mail: [vladdal@gmail.com](mailto:vladdal@gmail.com)**Поступила в редакцию 25 октября 2013 г.*

В работе исследуется влияние функции-источника в уравнении Пуассона на характеристики плаща невидимости, рассчитанного численным методом. Проведена оптимизация с использованием генетического алгоритма для нахождения константных значений функций-источников, обеспечивающих максимальную производительность плаща. Проведено сравнение характеристик такого плаща с характеристиками плаща, рассчитанного с использованием уравнения Лапласа.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** плащ невидимости, уравнение Пуассона, функция-источник, численный метод.

У роботі досліджується вплив функції-джерела в рівнянні Пуассона на характеристики плаща невидимості, розрахованого численим методом. Проведена оптимізація з використанням генетичного алгоритму для знаходження константних значень функцій-джерел, що забезпечують максимальну продуктивність плаща. Проведено порівняння характеристик такого плаща з характеристиками плаща, розрахованого з використанням рівняння Лапласа.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** плащ невидимості, рівняння Пуассона, функція-джерело, численим метод.

In this paper investigated the influence of the source function in the Poisson equation on the characteristics of invisibility cloak, calculated numerically. Performed optimization, using genetic algorithm for finding the constant values of the source functions, providing maximum cloak performance. Comparison of the characteristics of such cloak with characteristics of cloak calculated with use of the Laplace equation was carried out.

**KEY WORDS:** invisibility cloak, Poisson equation, source function, numerical method.

**ВВЕДЕНИЕ**

При расчете плащей невидимости используется как традиционный аналитический подход, описанный в работах [1] и [2], так и численный подход, представленный в работах [3], [4].

При этом координатная трансформация трактуется как пространственная деформация, что обуславливает возможность использования решения уравнения Лапласа, для установления координатных зависимостей. Поскольку уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона, в работе [5] была показана возможность использования уравнения Пуассона при расчете плащей.

Однако влияние функций-источников в уравнении Пуассона на характеристики рассеяния плаща оставалось неисследованным. В настоящей работе проведено исследование влияния выбора различных значений функций-источников на характеристики рассеяния плаща невидимости.

**МЕТОДИКА КОНСТРУИРОВАНИЯ ПЛАЩА**

Рассмотрим координатную трансформацию в системе координат кругового цилиндра, как изображено на рис. 1, где область  $r \in [0, b]$  отображается в область  $r' \in [a', b']$ .

Исходная область в трансформационной оптике носит название виртуального пространства, а область, в которую производится отображение – физическим пространством. Все величины в физическом пространстве обозначим буквами со штрихом, а в виртуальном пространстве – буквами без штриха.

Как показано в [6], при координатной трансформации декартовы компоненты материальных параметров в виртуальном и физическом пространстве связаны следующими соотношениями:

$$\varepsilon' = \frac{J \varepsilon J^T}{\det(J)}; \quad \mu' = \frac{J \mu J^T}{\det(J)}, \quad (1)$$

где  $J$  представляет Якобианову матрицу трансформации, состоящую из элементов вида

$$J_{\alpha}^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}, \quad (2)$$

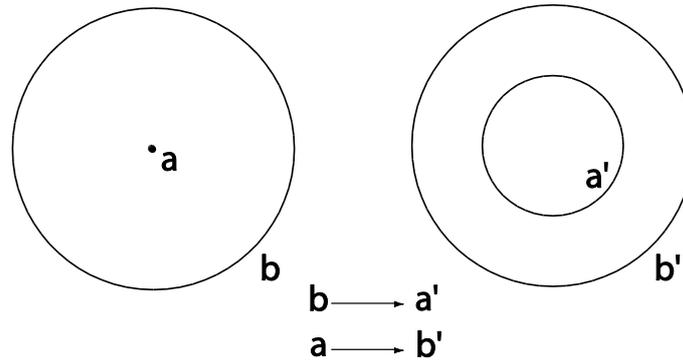


Рис. 1. Схема координатной трансформации.

которые представляют собой производную трансформированных координат по исходным координатам.

Эти элементы могут быть получены как аналитически, определяя в явном виде зависимость между исходными и трансформированными координатами, так и численным методом.

Запишем уравнение Пуассона, которое вместе с граничными условиями  $u'(a) = a'$ ;  $u'(b) = b'$  будет характеризовать связь между исходными и трансформированными координатами в виде:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3^2} \right) u'_i = f_i(u_1, u_2, u_3); \\ u'(a) = a', \quad u'(b) = b', \end{cases} \quad (3)$$

где  $u'_i$  ( $i=1,2,3$ ) обозначает компоненты трансформированной координатной системы, а  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты первоначальной не трансформированной координатной системы.

С целью избежать сингулярности решений уравнения Пуассона используется инверсная форма уравнения Пуассона, подобно тому, как это сделано в работе [5]. в виде:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial u_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3'^2} \right) u_i = f_i(u'_1, u'_2, u'_3); \\ u(a') = a, \quad u(b') = b. \end{cases} \quad (4)$$

Решая уравнение (4) мы получаем элементы обратной Якобиановой матрицы  $J_{\alpha'}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha}}$  и затем находим прямую Якобианову матрицу, как  $J_{\alpha}^{\alpha'} = \left( J_{\alpha'}^{\alpha} \right)^{-1}$ .

Как было отмечено в [5], использование различных функций-источников в уравнении Пуассона при расчете плаща невидимости приводит к различным координатным преобразованиям, и как следствие, к плащам с различными характеристиками.

Уравнение Пуассона вместе с граничными условиями имеет бесконечное множество решений, соответствующих различным функциям-источникам  $f_i(u_1, u_2, u_3)$ . В настоящей работе мы ограничились заданием функций-источников как численных константных значений.

При этом мы исследуем, как влияют функции-источники на суммарную величину рассеяния плаща. Более конкретно ищется такое решение, при котором интеграл рассеянного поля в домене свободного пространства (см. рис. 3) будет минимальным.

Это задача на оптимизацию решения. Существуют различные подходы к решению таких задач. В данной работе используется генетический алгоритм (ГА) (см. [7]. [5]).

### ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

Идея ГА пришла из теории естественного отбора или выживания наиболее приспособленных индивидов Чарльза Дарвина.

Поскольку в двумерной задаче мы имеем два уравнения Пуассона, то мы имеем две функции-источника, обозначаемые как  $f_1$  и  $f_2$ . В генетическом алгоритме пара (комбинация) значений этих

двух величин ( $f_1$  и  $f_2$ ) может трактоваться как хромосома (или индивид). Каждое из этих значений представляет собой ген.

При старте генетической оптимизации первоначально генерируется  $N$  хромосом со случайными значениями генов (первоначальная популяция). Для каждой хромосомы затем определяется фитнес значение, показывающее “качество” хромосомы. Это значение определяет величину шансов данной хромосомы участвовать в дальнейшем размножении, т.е. чем больше это значение, тем выше шансы данной хромосомы быть выбранной для дальнейшего размножения. Процесс выбора лучших хромосом называется селекцией.

Для отобранных хромосом затем с определенной вероятностью применяется скрещивание (кроссовер), а затем мутации (используется двоичное представление числа) и с определенной вероятностью каждый бит (ген) заменяется на свою противоположность (0 на 1 и наоборот).

Также в алгоритме применяется выборка некоторого числа (5%) лучших хромосом, которые без изменения переходят в следующее поколение (элитизм).

Полученные в результате всех этих операций хромосомы составляют следующее (дочернее) поколение, и цикл повторяется.

Блок-схема генетической оптимизации представлена на рис. 2.



Рис. 2. Блок-схема генетической оптимизации.

В нашей оптимизации функция фитнеса представляет собой абсолютное значение интеграла рассеянного поля взятого по домену свободного пространства.

Само численное моделирование проводится с использованием метода конечных элементов. В работе исследуется двумерная задача для случая распространения плоской  $E$  – поляризованной волны. Длина волны составляла 0.25 м, радиус идеально проводящего тела, окруженного плащом, равнялся 0.15 м., внешний радиус плаща – 0.45 м. (см. рис.3).

При проведении данной оптимизации мы установили диапазон возможных значений функций-

источников от  $-50$  до  $50$  с шагом  $0.1$ , количество индивидов в одном поколении  $80$ , количество поколений –  $40$ .

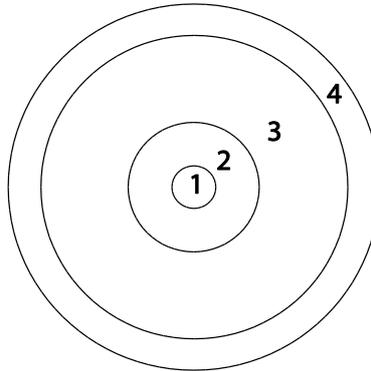


Рис. 3. Геометрия задачи: 1 – идеально проводящий цилиндр, 2 – плащ невидимости, 3 – домен свободного пространства, 4 – идеально согласованный слой.

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В результате проведенной оптимизации было получено наименьшее значение интеграла рассеянного поля в домене свободного пространства равное  $8.79996 \cdot 10^{-6}$  В·м. Этому наименьшему значению соответствуют значения функций-источников  $f_1 = -7.7$  и  $f_2 = -48.2$ .

Сравним это с решением, где  $f_1$  и  $f_2 = 0$  (уравнения Лапласа). Интеграл от рассеянного поля в домене свободного пространства в этом случае будет равен  $0.02384$  В·м. Видно, что значение интеграла при  $f_1 = -7.7$  и  $f_2 = -48.2$  меньше интеграла решения при  $f_1$  и  $f_2 = 0$  на несколько порядков величины.

Известно что в случае идеального плаща одна из компонент материальных параметров (в данном случае компонента  $\mu_\varphi$ ) должна стремиться к бесконечности на внутренней границе плаща. Плащ невидимости, материальные компоненты которого получены численным методом, путем решения уравнения Лапласа, должен быть идеальным. Однако при реальных вычислениях, производится усечение величины компоненты  $\mu_\varphi$  к большому, но все-таки конечному значению.

Таким образом, идеальный плащ оказывается неидеальным, и как мы видим его производительность (способность скрывать окружаемое им тело) может быть улучшена.

На рис 4 представлена картина распределения рассеянного поля в ближней зоне для случая  $f_1, f_2 = 0$  и случая  $f_1 = -7.7, f_2 = -48.2$ .

Видно, что в обоих случаях практически все рассеянное поле сосредоточено внутри плаща. В то же время видно, что решение  $f_1, f_2 = 0$  дает симметричное распределение поля, чего очевидно не наблюдается во втором случае.

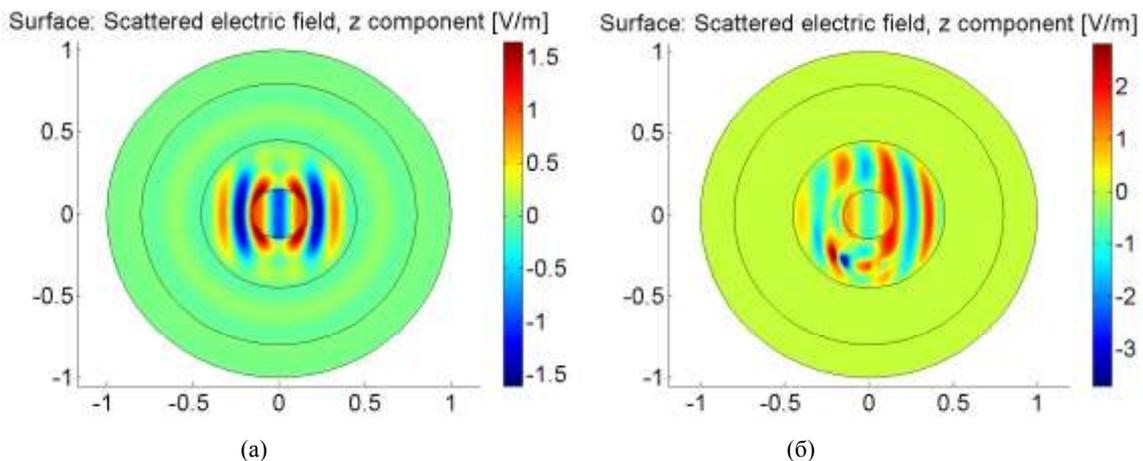


Рис. 4. Распределение  $z$  – компоненты рассеянного электрического поля: (а) для случая  $f_1, f_2 = 0$ , (б) для случая  $f_1 = -7.7, f_2 = -48.2$

Еще более яркая картина несимметричности распределения поля для решения, полученного в результате оптимизации, дают диаграммы распределения рассеянного поля в дальней зоне, представленные на рис.5.

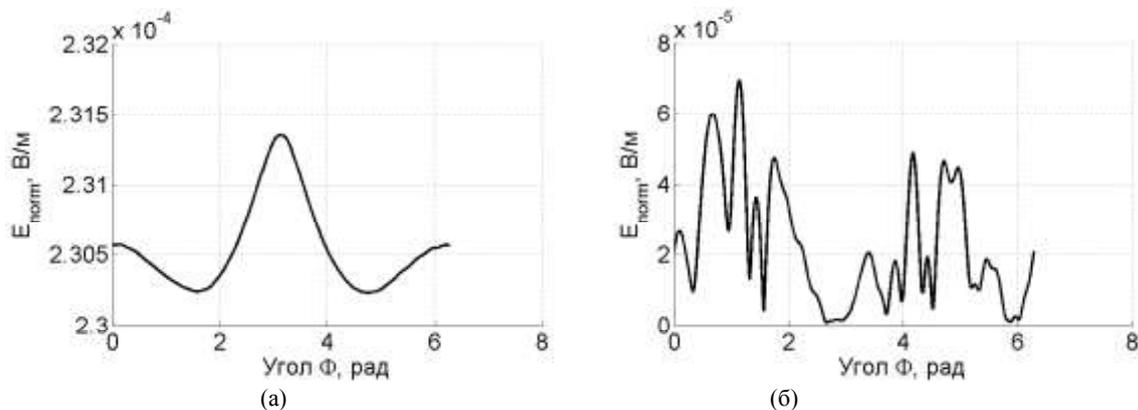


Рис. 5. Диаграмма рассеяния: (а) для случая  $f_1, f_2 = 0$ , (б) для случая  $f_1 = -7.7, f_2 = -48.2$ .

Несложно заметить, что плащ, материальные компоненты которого получены в результате решения уравнения Лапласа, дает строго симметричную диаграмму, в отличие от плаща, полученного в результате оптимизации. Во втором случае диаграмма рассеяния имеет несимметричный хаотический вид.

Необходимо также отметить, что полученный результат крайне чувствителен к изменению как величин функций-источников так и длины волны, а также угла падения волны.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование влияния константных значений функций-источников в уравнении Пуассона на характеристики рассчитанного численным методом плаща невидимости.

Показана возможность увеличения производительности плаща путем выбора соответствующих значений функций-источников, посредством проведения генетической оптимизации.

Исследовано рассеяние поля таким плащом и продемонстрировано, что диаграмма рассеяния такого плаща имеет ассиметричный вид.

В то же время производительность такого плаща имеет резонансный характер и крайне чувствительна к изменению значений функций-источников.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith. Controlling electromagnetic fields. Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 1780 – 1782.
2. U. Leonhardt. Optical conformal mapping. Science. – 2006. – Vol. 312. – P. 1777 – 1780.
3. J. Hu, X. Zhou, G. Hu. Design method for electromagnetic cloak with arbitrary shapes based on Laplace's equation. Optics Express. – 2009. – Vol. 17, No. 3. – P. 1308 – 1320.
4. Вьюнник В.И., Звягинцев А.А. Мимикрия объектов с использованием подхода трансформационной оптики. Радиофизика и радиоастрономия. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 169 – 175.
5. J. J. Ma, X. Y. Cao, K. M. Yu, and T. Liu. Determination the material parameters for arbitrary cloak based on Poisson's equation. Progress In Electromagnetics Research. – М. – 2009. – Vol. 9. – P. 177 – 184.
6. P. Zhang. Theory of transformation optics and invisibility cloak design. Ph.D. thesis / KTH, Electromagnetic Engineering. – KTH Royal Institute of Technology, 2011. – Pp. xii, 55, QC 20110415.
7. Mitchell, M. An introduction to genetic algorithms. – Cambridge (Mass.): MIT press, 1996. – 158 p.
8. Coley D. "An Introduction to Genetic Algorithms for scientists and engineers" World Scientific Publishing, 1999. – 223 p.