УДК. 621.317; 621.317.33

МОДИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДА ПРОДОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ТОКОМ

Л. П. Яцук

[1)]Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, 61022, пл. Свободы, 4
e-mail:Yatsuk38@gmail.com
Поступила в редакцию 23 апреля 2014 г.

Предлагается сводить решение задачи возбуждения волновода продольным магнитным током к сходящемуся ряду путем разложения в ряд расходящегося слагаемого, содержащего дельта функцию Дирака, и объединения этого ряда с разложением искомого поля в области источника по полям собственных волн. Показано, что такой подход и использование функции Грина в случаях, когда она известна, обеспечивает тождественное совпадение решений задачи возбуждения. Это обосновывает возможность получения альтернативного решения задачи возбуждения, когда построение функции Грина затруднительно.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: волновод, задача возбуждения, магнитный ток, собственные волны, разложение в ряд.

Пропонується зводити рішення задачі збудження хвилеводу поздовжнім магнітним струмом до збіжного ряду шляхом розкладання в ряд розбіжного доданка, що містить дельта функцію Дірака, і об'єднання цього ряду з розкладанням шуканого поля в області джерела за полями власних хвиль. Показано, що такий підхід і використання функції Гріна у випадках, коли вона відома, забезпечує тотожний збіг рішень задачі збудження. Це обґрунтовує можливість отримання альтернативного вирішення задачі збудження, коли побудова функції Гріна зустрічає труднощі.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: хвилевід, задача збудження, магнітний струм, власні хвилі, розкладання в ряд.

It is proposed to reduce the solution of the problem of a waveguide excitation by a longitudinal magnetic current to a convergent series by means of series expansion of the divergent term containing Dirac delta function, and combining this with the expansion of the desired field in the source region in terms of eigen waves. It is shown that such an approach and the use of the Green's function in a case where it is known provide identically coincident solutions of the problem. This justifies the possibility of an alternative solution of the problem of excitation, when the construction of the Green's function is difficult.
KEY WORDS: waveguide excitation problem, magnetic current, own wave series expansion.

ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи возбуждения волновода магнитным током необходимо для определения амплитуды поля в отверстии, наведенного полем первичной волны. В случае, когда затрудняется построение функции Грина для векторного потенциала, решение получают в виде суммы полей собственных волн в волноводе, дополненной отдельным слагаемым, содержащим продольную составляющую вектора объемной плотности магнитного тока. Поскольку магнитный ток является поверхностным, его объемная плотность стремится к бесконечности, что затрудняет расчеты. Для получения решения, пригодного для расчетов, его необходимо модифицировать. Это и является целью настоящей работы.

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Физический процесс рассеяния электромагнитного поля на неоднородности в волноводе можно разбить на 2 этапа. Сначала на неоднородности наводится ток (электрический на металле, магнитный – на отверстии). Затем наведенный ток возбуждает вторичное поле внутри волновода и во внешней области (при рассеянии на отверстии). Это поле и является предметом исследования. Точно так же и решение задачи рассеяния производится в два этапа. Сначала определяется наведенный ток, затем возбужденное (рассеянное) этим током поле.

Первый этап решения задачи рассеяния оказывается наиболее сложным. На основе граничных условий на идеальном металле (равенство нулю тангенциальной составляющей электрического поля на его поверхности) и условия непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля на отверстии формулируются интегральные уравнения относительно искомых наведенных токов. Решение этих уравнений связано с определенными трудностями.

Остановимся подробнее на решении задачи рассеяния волноводной волны на щелевой неоднородности. Условие непрерывности магнитного поля на поверхности щели в бесконечно тонкой стенке волновода имеет вид [1]

$$\vec{H}_\tau^0 + \vec{H}_\tau^i\left(\vec{e}_S\right) = \vec{H}_\tau^e\left(\vec{e}_S\right), \tag{1}$$

где индексы «i» и «e» соответствуют внутреннему и внешнему объемам, $\vec{e}_S$ – поле на поверхности щели, $\vec{H}_\tau^0$ – первичное магнитное поле, $\vec{H}_\tau^i(\vec{e}_S)$ и $\vec{H}_\tau^e(\vec{e}_S)$ – векторы магнитного поля, возбужденного щелью во внутренней и внешней областях.

Полю $\vec{e}_S$ эквивалентен *поверхностный* магнитный ток с поверхностной плотностью $\vec{j}_S^m = [\vec{e}_S, \vec{n}]$ ($\vec{n}$ – орт нормали к поверхности щели). Соответствующая этому току объемная плотность тока $\vec{j}_V^m$ связана с плотностью поверхностного тока соотношением

$$\vec{j}_V^m = [\vec{e}_S, \vec{n}]\delta(n), \tag{2}$$

$\delta(n)$ - дельта-функция Дирака, n – координата вдоль нормали к щели, отсчитываемая от ее поверхности.

Полагаем, что поле $\vec{e}_S$ можно аппроксимировать некоторой векторной функцией. Амплитудный коэффициент при этой функции находим из (1).

Для того, чтобы функциональное уравнение (1) свести к конкретному виду, необходимо найти поля $\vec{H}_\tau^i(\vec{e}_S)$ и $\vec{H}_\tau^e(\vec{e}_S)$, другими словами, решить задачу возбуждения связываемых электродинамических объемов магнитным током (2). Это достаточно просто сделать, если известны функции Грина для этих объемов, таких, например, как однородно заполненный диэлектриком (или полый) прямоугольный волновод, полупространство, ограниченное бесконечной идеально проводящей плоскостью и др. В случае волновода с частичным диэлектрическим заполнением (при наличии внутри бесконечно протяженного слоя диэлектрика) построение функции Грина для векторного потенциала затруднительно. Это значит, что надо переходить к альтернативным методам решения задачи возбуждения. Наиболее приемлемым является метод представления магнитного поля, возбужденного щелью в волноводе, в виде набора полей собственных волн [2]. Решение для вектора магнитного поля представляется в виде:

$$\vec{H}(z) = \sum_\mu C_\mu(z)\vec{H}_\mu + \sum_\mu C_{-\mu}(z)\vec{H}_{-\mu} - \frac{\vec{z}^0 j_z^m}{i\omega\mu_a}. \tag{3}$$

Здесь $\vec{z}^0$ - орт вдоль координатной линии Z, параллельной оси волновода, $\vec{H}_{\pm\mu}$ – векторные функции, описывающие магнитные поля собственных волн, распространяющихся в сторону $z > 0$ ($+\mu$) и $z < 0$ ($-\mu$), $C_{\pm\mu}(z)$ –амплитуды этих волн в поперечном сечении Z; μ – обобщенный индекс, указывающий тип волны. Следует подчеркнуть, что J_z^m в (3) представляет собой проекцию на ось Z вектора ***объемной*** плотности магнитного тока $\vec{j}_V^m$, кроме того, не следует забывать, что функциональное уравнение (1) формулируется именно на поверхности щели. Последнее слагаемое в выражении (3) на поверхности щели, где координата n принимает нулевое значение, обращается в бесконечность из-за присутствия в (2) дельта-функции Дирака. Поскольку магнитное поле $\vec{H}(z)$ является конечной величиной, бесконечность, вызванная присутствием дельта - функции Дирака, должна компенсироваться предыдущими слагаемыми. Следовательно, и они являются расходящимися. Таким образом, выражение (3) является непригодным для расчетов. Его необходимо модифицировать с целью получения выражения, пригодного для расчетов. Расходящиеся ряды надо превратить в сходящиеся. Для этого надо и третье слагаемое представить в виде ряда. Возникает вопрос, по каким функциям следует разлагать его в ряд. Полная система собственных векторных функций состоит из вихревых и потенциальных функций [3]. Как показано в [4], в области, ограниченной идеально проводящим экраном с отверстием, в разложении магнитного поля по собственным векторным функциям должны присутствовать не только вихревые, но и потенциальные функции. Дивергенция вектора, представленного третьим слагаемым, отлична от нуля. Следовательно, этот вектор является невихревым, а это значит, что его следует раскладывать в ряд по потенциальным функциям.

Подчеркнем, что дополнительное слагаемое в решении (3) задачи возбуждения в [2] получено в результате строгих математических преобразований. В [5] подвергнуто сомнению свойство полноты системы вихревых собственных функций в области источника. Полнота решения достигается путем введения в него дополнительного невихревого слагаемого, обеспечивающего выполнение равенства $\nabla\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (речь идет о возбуждении волновода электрическим током). Как оказалось, это слагаемое тождественно совпадает со слагаемым, расположенном вне суммы ряда в решении (3), полученном ранее Л.А.Вайнштейном. Отсюда также следует, что внесуммарное слагаемое следует раскладывать в ряд по потенциальным функциям.

ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР

Проверим правильность этого предположения на тестовом примере. Рассмотрим структуру, для которой известна функция Грина, например, прямоугольный волновод с узкой продольной щелью в его широкой стенке (Рис.1). Найдем поле H, возбужденное щелью в области ее расположения, модифицируя выражение (1) в соответствии с предложенным набором действий. Разложим внесуммарное слагаемое в выражении (1) по потенциальным функциям и добавим новый ряд к основному ряду.

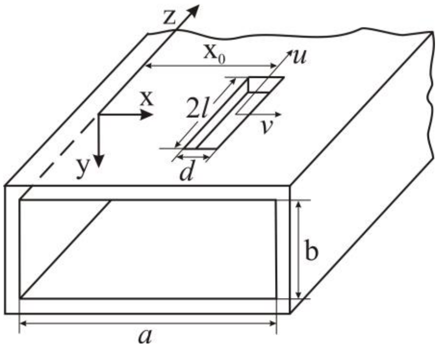

Рис. 1. Геометрия системы

Выбираем простейшую функцию распределения магнитного тока вдоль щели в виде полуволны синусоиды.

$$\vec{e}_S = V\vec{x}^0 \frac{1}{d}\cos\frac{\pi u}{2l}\,. \tag{4}$$

Здесь $u = z$, $\vec{u}^0 = \vec{z}^0$, $v = x - x_0$, $\vec{v}^0 = \vec{x}^0$, V – амплитудный коэффициент.

В соответствии с (2), магнитный ток направлен вдоль оси z. Он возбуждает в волноводе *H*-волны. Индекс μ определяет тип волны. Магнитное поле под щелью определяется выражением (3). Амплитудные коэффициенты $C_{\pm\mu}(z)$ определяются интегралами

$$C_{\mu}(z) = -\frac{1}{N_{|\mu|}}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-l}^{z}\left[\vec{e}_S, \vec{H}^{(-\mu)}\right]\vec{n}dS\,, \tag{5}$$

$$C_{-\mu}(z) = -\frac{1}{N_{|\mu|}}\int_{-d/2}^{d/2}\int_{z}^{l}\left[\vec{e}_S, \vec{H}^{(\mu)}\right]\vec{n}dS\,. \tag{6}$$

Векторные функции $\vec{H}^{(\pm\mu)}$ описывают магнитное поле собственных волн единичной амплитуды, $N_{|\mu|}$ – нормирующий множитель из условия ортогональности собственных волн волновода [1]. Интеграл поперек щели назовем J_m

$$J_m = \frac{1}{d}\int_{x_0-d/2}^{x_0+d/2}\cos\frac{m\pi x}{a}dx = \cos\frac{m\pi x_0}{a}\frac{\sin\left(m\pi d/(2a)\right)}{m\pi d/(2a)}\,. \tag{7}$$

Первая и вторая суммы в (3) определяют суммарное магнитное поле в точке z, порожденное волнами, пришедшими к этой точке слева и справа. Поскольку собственные волны описываются вихревыми функциями, обозначим эти две суммы как

$$\vec{H}^{rot}(z)=\sum_{\mu}C_{\mu}(z)\vec{H}_{\mu}+\sum_{\mu}C_{-\mu}(z)\vec{H}_{-\mu}\,. \qquad (8)$$

Поскольку мы пришли к выводу, что последнее слагаемое в (3) должно описываться потенциальными функциями, введем для него такое обозначение

$$\vec{H}^{p}(z)=-\vec{z}^{0}\,\frac{J_z^m}{i\omega\mu_a}\,. \qquad (9)$$

Рассмотрим $\vec{H}^{rot}(z)$ и $\vec{H}^{p}(z)$ подробнее. Проекцию на ось z вихревой части решения запишем в виде

$$H_z^{rot}(z)=\sum_{m,n}H_{z,mn}^{rot}(z)\,. \qquad (10)$$

Выражение для $H_{zmn}^{rot}(z)$, полученное с учетом (4-8) имеет вид

$$H_{z,mn}^{rot}(z)=-V\,\frac{\left(\kappa_{mn}^2\right)^2}{N_{mn}}\,J_m\left\{e^{-i\gamma_{mn}z}\int_{-l}^{z}\cos\frac{\pi u}{2l}e^{i\gamma_{mn}u}du+e^{i\gamma_{mn}z}\int_{z}^{l}\cos\frac{\pi u}{2l}e^{-i\gamma_{mn}u}du\right\}\cos\kappa_x x\cos\kappa_y y\,. \qquad (11)$$

После выполнения процедуры интегрирования в (11) имеем:

$$H_{z,mn}^{rot}(z)=-V\,\frac{2\left(\kappa_{mn}^2\right)^2}{\left[\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2-\gamma_{mn}^2\right]N_{mn}}\,J_m\left\{i\gamma_{mn}\cos\frac{\pi z}{2l}+\left(\frac{\pi}{2l}\right)e^{-i\gamma_{mn}l}\cos\gamma_{mn}z\right\}\cos\kappa_x x\cos\kappa_y y\,. \qquad (12)$$

Здесь $\kappa_{mn}^2=\kappa_x^2+\kappa_y^2$, $\kappa_x=\frac{m\pi}{a}$, $\kappa_y=\frac{n\pi}{b}$, $N_{mn}=\frac{2ab\omega\mu_0\kappa_{mn}^2\gamma_{mn}}{\varepsilon_m\varepsilon_n}$, $\varepsilon_m=2-\delta_{0m}$, $\varepsilon_n=2-\delta_{0n}$, введем еще одно обозначение $\varphi_{\perp}^{m}=\cos\kappa_x x\cos\kappa_y y$.

Вихревую часть магнитное поля (12) необходимо просуммировать по индексам m и n от нуля до бесконечности, как это записано в (10).

После подстановки N_{mn} и $\varphi_{\perp}^{m}$ имеем

$$H_{z,mn}^{rot}=-V\,\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n\kappa_{mn}^2}{\left[\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2-\gamma_{mn}^2\right]ab\omega\mu_0\gamma_{mn}}\,J_m\left\{i\gamma_{mn}\cos\frac{\pi z}{2l}+\left(\frac{\pi}{2l}\right)e^{-i\gamma_{mn}l}\cos\gamma_{mn}z\right\}\varphi_{\perp}^{m}\,. \qquad (13)$$

Принимая во внимание выражение (7) для J_m, видим, что при суммировании полученного выражения по m и n сумма по n расходится.

Запишем теперь проекцию на ось z потенциальной части магнитного поля, возбужденного щелью.

$$H_z^{p}(z)=-\frac{J_z^m}{i\omega\mu_a}=-V\,\frac{1}{di\omega\mu_a}\cos\frac{\pi z}{2l}\,\delta(y)\,f(x). \qquad (14)$$

Это выражение может быть представлено в виде комбинации потенциальных функций. Разложим его в ряд по магнитным потенциальным функциям прямоугольного волновода с идеально проводящими стенками. Векторные потенциальные функции $\vec{L}^{m}$ имеют вид (верхний индекс m использован для представления магнитного поля)

$$\vec{L}^{m}(\vec{r})=grad\,\varphi^{m}(\vec{r})\,. \qquad (15)$$

В системе с разделяющимися переменными функцию $\varphi(\vec{r})$ полезно представить в виде

$$\varphi(\vec{r})=\varphi\left(\vec{r}_{\perp},z\right)=\varphi(\vec{r}_{\perp})\varphi(z)\,.$$

Продольная компонента вектора $\vec{L}$ имеет вид:

$$\left(\vec{L}^{m}\right)_{z}=\frac{\partial\varphi^{m}(z)}{\partial z}\varphi^{m}\left(\vec{r}_{\perp}\right), \tag{16}$$

где $\varphi\left(\vec{r}_{\perp}\right)$ удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на контуре поперечного сечения волновода.

Разложим внесуммарное слагаемое в выражении (3) в ряд по функциям $\varphi^{m}\left(\vec{r}_{\perp}\right)$.. Его структура такова

$$H_{z}^{p}=D(z)\,f(x)\,\delta(y), \tag{17}$$

где $D(z)=-V\dfrac{1}{di\omega\mu_{a}}\cos\dfrac{\pi z}{2l}$, $f(x)=1$ в области щели, за ее пределами $f(x)=0$.

Представим его в виде разложения в ряд по функциям $\varphi^{m}\left(\vec{r}_{\perp}\right)=\varphi^{m}_{mn\perp}$.

$$H_{z}^{p}=D(z)\,f_{1}(x)\,f_{2}(y)=\sum_{m,n}A_{mn}(z)\varphi^{m}_{mn\perp} \tag{18}$$

Умножаем обе части этого равенства на функцию $\varphi^{m}_{m'n'\perp}$ и интегрируем по площади поперечного сечения волновода. В силу ортогональности в поперечном сечении волновода функций $\varphi^{m}_{mn\perp}$ и $\varphi^{m}_{m'n'\perp}$ получаем

$$D(z)\int_{0}^{a}f_{1}(x)\cos\frac{m'\pi x}{a}dx\int_{0}^{b}\delta(y)\cos\frac{n'\pi y}{b}dy=\frac{ab}{\varepsilon_{m'}\varepsilon_{n'}}A_{m'n'}(z).$$

Раскрывая введенные обозначения и опуская штрихи в обозначениях m и n, после интегрирования получаем

$$A_{mn}=-V\frac{\varepsilon_{m}\varepsilon_{n}}{ab}\frac{1}{i\omega\mu_{a}}\cos\frac{\pi z}{2l}J_{m}. \tag{19}$$

Это выражение для A_{mn} подставляем в (18), что приводит к такому выражению для общего члена ряда $H^{p}_{z,mn}$

$$H^{p}_{z,mn}=-V\frac{\varepsilon_{m}\varepsilon_{n}}{ab}\frac{1}{i\omega\mu_{a}}\cos\frac{\pi z}{2l}J_{m}\varphi^{m}_{mn\perp}. \tag{20}$$

Видим, что ряд с таким общим членом расходится при суммировании его по n от нуля до бесконечности. С учетом (13) и (20) запишем суммарный член ряда $H^{rot}_{z,mn}$ + $H^{p}_{z,mn}$ для полного поля, возбужденного щелью в области ее расположения.

$$H_{z}(z)=\frac{V}{i\omega\mu_{a}ab}\sum_{m,n}\frac{\varepsilon_{m}\varepsilon_{n}J_{m}}{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^{2}-\gamma_{mn}^{2}}\left[\left(k^{2}-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^{2}\cos\frac{\pi z}{2l}+\left(\frac{\pi}{2l}\right)\frac{\kappa_{mn}^{2}}{i\gamma_{mn}}\right)e^{i\gamma_{mn}l}\cos\gamma_{mn}z\right]\varphi^{m}_{mn\perp}. \tag{21}$$

Полученное выражение (10) тождественно совпадает с выражением для поля $H_{z}(z)$, полученным с использованием тензорной функции Грина. Легко убедиться в том, что оно сходится как по m, так и по n.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования показано, каким образом следует модифицировать выражение для продольной компоненты магнитного поля, возбужденного в области источника продольным магнитным током, для того, чтобы оно стало пригодным для расчетов в тех случаях, когда возникают проблемы построения тензорной функции Грина для векторного потенциала. Примером может служить продольная щель в волноводе со слоистым диэлектрическим заполнением. Для него достаточно просто строятся потенциальные векторные функции векторного уравнения Гельмгольца, которые в дальнейшем позволяют получить сходящееся решение задачи возбуждения волновода продольной щелью в области ее расположения [6,7]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенно-фидерные устройства. М.: Изд ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1959. ч.2.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. —М.: Сов.радио, 1957.– 581с.
3. Морс Ф.М, Фешбах Г. Методы теоретической физики. — М.: ИИЛ, 1958. – Т.1.– 930с. 1960.– Т.2– 886с.
4. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. – М.: Наука, 1967. – 460с.
5. Collin R.E. On the incomplettness of E- and H- modes in waweguide // Canadian Journalof Phys.- 1973.- V.51.-P. 1135- 1140.
6. Яцук Л.П. Потенциальные функции в задаче возбуждения волновода с трехслойным диэлектриком продольным
7. магнитным током // Радиофизика и электроника: Сб. науч. тр. -Харьков: ИРЭ НАН Украины, 2001, № 2-3, - с.212-217.
8. Яцук Л.П. Ляховский А.А. Энергетические и резонансные свойства продольной щели в волноводе, частично заполненном диэлектриком // Изв. Вузов. Радиоэлектроника.-2006.-№ 5-6.- С. 40-51.