УДК 517.9:535.4

РАСЧЁТ ПОЛЯ ВИТКА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА, РАССЕЯННОГО СПИРАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ СФЕРИЧЕСКИМ ДИСКОМ

В.А. Резуненко
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина
e-mail: varezunenko@yahoo.com
Поступила в редакцию 20 мая 2014 г.

Изучается электромагнитное поле витка радиального электрического тока, рассеянного спирально проводящим сферическим диском. Для решения задачи в строгой постановке использованы метод регуляризации парных функциональных сумматорных уравнений, метод интегральных преобразований, выделения и обращения главных частей сумматорных уравнений. Получена эффективно разрешимая бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве числовых последовательностей. Подтверждена эффективность построенного алгоритма. Рассмотрены некоторые резонансные частоты структуры.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: электродинамика, спирально проводящий сферический диск, интегральные уравнения, система алгебраических уравнений I I рода, резонансные частоты.

Вивчається електромагнітне поле витка електричного радіального струму, розсіяного спірально провідним сферичним диском. Для розв'язку задачі у строгій постановці використано метод регуляризації парних функціональних сумматорних рівнянь, метод інтегральних перетворень, виділення і обертання головних частин сумматорних рівнянь. Одержано ефективно досліджувана нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду з зовсім неперервнім оператором у Гільбертовому просторі числових послідовностей. Підтверджено ефективність побудованого алгоритму. Розглянуті деякі резонансні частоти структури.
КЛЮЧЕВІ СЛОВА: електродинаміка, спірально провідний сферичний диск, інтегральні рівняння, система алгебраїчних рівнянь I I роду, резонансні частоти.

The electromagnetic field of the radial electrical current coil, scattered of the spiral conductive spherical dick is analysed. The method of regularization in the strict formulation for functional summarized equations is used. The method of the integral transformations is applied. The principal part of the summarized equations is isolated and inverted. The effective solvability of the infinite system of the linear algebraic equations of the second kind with the completely continuous operator in the Hilbert space of the numerical sequences is obtained. The effectiveness of the constructed algorithm is confirmed. Some resonance frequencies of the structures are examined.
KEY WORDS: electrodynamics, spiral conductive spherical disk, integral equations, system algebraic equations of the second kind, resonance frequencies.

ВВЕДЕНИЕ

Расчёт электромагнитных полей излученных, переданных и принятых различными устройствами и приборами является первоочередной задачей радиофизики и электроники, в том числе антенной техники и, в частности, спиральных антенн. Поэтому актуальным является использование и развитие численно – аналитических методов решения и анализа таких задач, к которым относятся методы математической физики, теоретической радиофизики, механики, моделирования. Большую роль в этом направлении играет исследование задач на классических, например, сферических поверхностях. Сфера с круговым отверстием имеет широкое применение, она может рассматриваться прототипом многих устройств и приборов. Сферические спиральные и иные поверхности были едва ли не самыми первыми составными частями устройств и антенн, которые разрабатывал Тесла в конце 19 века и в первой половине 20 века для передачи энергии на сверхдальние расстояния. Спиральные структуры могут рассматриваться моделью галактик. В настоящее время разрабатывается множество вариантов спиральных антенн и приборов [1–3]. Они обладают значительными преимуществами перед другими устройствами того же назначения, в том числе малое потребление энергии и малогабаритность. В антенной технике спиральные антенны привлекательны ещё и тем, что они, в частности, позволяют эффективно управлять поляризацией излучённого поля. Спиральные антенны имеют сравнительно большое отношение усиление/размер среди направленных антенн. Они используются в мобильной связи, в космических технологиях, в медицине. Для решения задач рассеяния и дифракции волн на различных, в том числе и на сферических поверхностях, известны эффективные методы решения прямых и обратных задач Харьковской школы радиофизики и математики. К таким методам относится метод регуляризации (в нашем случае – полуобращения) матричных и интегральных операторов задачи [4–16]. Метод особенно хорошо себя зарекомендовал при исследовании резонансных эффектов, когда характерные размеры рассеивающих структур сравнимы с длинами падающих волн. В данной работе применяется метод полуобращения матричного и интегрального операторов задачи рассеяния поля витка радиального электрического тока на спирально проводящем сферическом диске. Получена и исследована бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода $X = AX + B$ с вполне непрерывным матричным оператором A в Гильбертовом пространстве числовых последовательностей. Рассмотрены варианты постановки задачи. Рассмотрены некоторые резонансные частоты структуры.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разместим начало декартовой (x, y, z) и сферической (r, θ, φ) систем координат в центр спирально проводящей сферы радиуса $r = a$ с круговым отверстием (в центр диска). Плоскость ребра диска – ребра отверстия в сфере ориентируем параллельно плоскости OXY. Полярный угол θ ребра диска полагаем равным θ_0, на отверстии $\theta \in (\theta_0, \pi]$. Разместим круговой виток радиального электрического тока в плоскости, параллельной плоскости OXY. Пусть расстояние от начала системы координат до точек витка равно b, $r = b$, $b < a$, пусть полярный угол витка $\theta = \delta_1$; для центра витка $z = z_0 = b \cdot \cos\delta_1$, радиус витка равен $b \cdot \sin\delta_1$. Виток размещается внутри дополнения сферы с круговым отверстием (дополнения диска) до замкнутой полой сферы. Виток и диск являются азимутально–симметричными относительно оси OZ. Пусть полярный угол β определяет угол спиральной проводимости сферической поверхности – угол “спиральности” диска – и отсчитывается от линий меридианов на сфере. При этом полагаем $0 \le \beta < \pi / 2$. Спиральная поверхность диска является моделью многозаходной спирали (много линий спирали) с постоянным углом между линиями и меридианами на поверхности сферы, причём спирали “выходят” из одной точки на поверхности диска – из “северного ” полюса с координатами $r = a$, $\theta = 0, \varphi = 0.$ Поле витка тока $\vec{E}^{(0)}$, $\vec{H}^{(0)}$ в присутствии диска создаёт вторичное поле $\vec{E}^{(2)}$, $\vec{H}^{(2)}$ вне дополнения диска до сферы (при $r > a$) и создаёт полное поле $\vec{E}^{(1)}$, $\vec{H}^{(1)}$ внутри дополнения диска до сферы (при $r < a$). Полные поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла и материальным уравнениям вне поверхности диска и вне точек витка тока:

$$rot\vec{E} = ikH \, , \; rot\vec{H} = -ik\vec{E} \, , \; div\vec{D} = \rho, \; div\vec{B} = 0, \; \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \; \vec{B} = \mu\vec{H}, \; \vec{J} = \sigma\vec{E} \, . \qquad (1.a)$$

Полные поля должны удовлетворять также: 1) условию конечности энергии в любой ограниченной области w пространства, включая ребро диска и исключая точки витка тока:

$$\int_w (\varepsilon \left|\vec{E}\right|^2 + \mu \left|\vec{H}\right|^2) dw < \infty \, ; \qquad (1.b)$$

2) условию излучения на бесконечности:

$$\lim r(\partial\Psi / \partial r - ik\Psi) = 0, \quad r \to \infty \, ; \qquad (1.c)$$

3) граничным условиям. В формулах (1.a) – (1.c), в частности, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} / c$ – волновое число, ω – круговая частота, c – скорость света в вакууме, $\varepsilon, \; \mu$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно, Ψ – любая компонента полей $\vec{E}$, $\vec{H}.$

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для завершения постановки задачи – формулировки граничных условий – и решения задачи используем сначала метод разделения переменных в сферической системе координат. Граничные условия для полей являются обобщением граничных условий идеальной проводимости и являются частным случаем граничных анизотропных импедансных условий:

$$[\vec{n},\vec{E}]=0,[\vec{n},\vec{E}]=\zeta[\vec{n}[\vec{n},\vec{H}]], \tag{2.a}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности диска $(r=a,\ 0\le\theta<\theta_0)$, а коэффициент ζ пропорционален поверхностному импедансу диска и связан, в частности, с направлением спиральной проводимости на поверхности диска. Отметим, что одну спираль можно задать так:

$$x=\eta_1(t,\theta,\beta,\theta_0)\cdot\cos t,\quad y=\eta_2(t,\theta,\beta,\theta_0)\cdot\sin t,\quad z=\eta_3(t,\theta,\beta,\theta_0),$$

где t – параметр, θ – полярный угол, а функции $\eta_j(t,\theta,\beta,\theta_0)$ определяют, в частности, переменный радиус спирали и переменный шаг между спиралями ($j=1,2,3$).

Следуя варианту (2.а), граничные условия на диске для тангенциальных θ и φ компонент полей запишем, в частности, в виде следующих равенств:

$$E_\theta^{(2)}+E_\varphi^{(2)}tg\beta=0,\quad E_\varphi^{(2)}=E_\varphi^{(1)}, \tag{2.в}$$

$$(H_\theta^{(2)}-H_\theta^{(1)})+(H_\varphi^{(2)}-H_\varphi^{(0)}-H_\varphi^{(1)})tg\beta=0. \tag{2.с}$$

а на отверстии $(r=a,\ \theta_0<\theta\le\pi)$ полные поля должны быть непрерывными. Для поиска компонент полей используем скалярные потенциалы Дебая: U –электрический и V –магнитный потенциал соответственно. Компоненты полей являются дифференциальными формами потенциалов Дебая. Потенциалы U (и V) удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\Delta U+k^2U=0, \tag{3}$$

которое следует из уравнений Максвелла (1.а). Разделим сферические переменные в уравнении Гельмгольца (3), решим три задачи Штурма–Лиувилля на собственные функции и собственные значения, и затем будем представлять потенциалы Дебая рядами Фурье–Бесселя–Лежандра. Для отыскания потенциала $U^{(0)}$ поля $\vec{E}^{(0)}$, $\vec{H}^{(0)}$ витка тока используем известную симметричную функцию Грина неоднородного уравнения Гельмгольца. В результате потенциал $U^{(0)}$ запишем так:

$$U^{(0)}=\sum_{n=1}^{\infty}M_nF(n)P_n(\cos\theta)\frac{1}{kr}\begin{cases}\psi_n(kr)\xi_n(kb), & r<b,\\ \psi_n(kb)\xi_n(kr), & r>b,\end{cases} \tag{4}$$

где

$$M_n=P_n(\cos\delta_1)/(kb)^2;\ F(n)=2n+1,\ z_0\ge0. \tag{5}$$

Здесь, в (4), (5), $P_n(\cos\theta)$ –полиномы Лежандра первого рода нулевого порядка степени n аргумента $\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$; $\psi_n(x)$, $\xi_n(x)$ – сферические функции Бесселя и Ханкеля первого и третьего рода соответственно порядка n аргумента x в обозначениях Дебая. Представление (4), (5) для потенциала Дебая витка тока обеспечивает требуемое убывание поля $\vec{E}^{(0)}$, $\vec{H}^{(0)}$ на бесконечности при $r\to\infty$ (1.с) и ограниченность этого поля в начале системы координат. Магнитный потенциал витка по условию равен нулю: $V^{(0)}=0$. При этом отметим, поле витка, являясь полем TM типа, при рассеянии на спирально проводящем сферическом диске, порождает вторичные поля с отличными от нуля не только электрическими, но и магнитными потенциалами. Поэтому искомые вторичные потенциалы, с учётом метода частичных областей, представим в форме рядов (4), (5):

$$\left.\begin{matrix}U^{(1)}\\ V^{(1)}\end{matrix}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}A_n\\ B_n\end{Bmatrix}F(n)P_n(\cos\theta)\psi_n(kr)/(kr),\quad r<a, \tag{6}$$

$$\left.\begin{matrix}U^{(2)}\\ V^{(2)}\end{matrix}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}C_n\\ D_n\end{Bmatrix}F(n)P_n(\cos\theta)\xi_n(kr)/(kr),\quad r>a. \tag{7}$$

Для потенциалов (6), (7) коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n ищем в гильбертовых пространствах комплекснозначных числовых последовательностей $\widehat{l}_2$, обеспечивающих выполнение условия конечности энергии (1.c), в частности, в окрестности ребра диска. При этом отметим, что пространства для коэффициентов рядов (6), (7) будут различными [16, 20].

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Для поиска последовательностей коэффициентов $A_n, ..., D_n$ потенциалов (6) – (7) применим граничные условия (2.в), (2.с) для компонент полей. Из граничных условий, используя ортогональность $P_n^1(\cos\theta)$ – присоединённых функций Лежандра первого рода первого порядка степени n аргумента $\cos\theta$ – с весом $\sin\theta$ на сегменте $[0,\pi]$, получаем систему из трёх линейных уравнений связи между 4 последовательностями коэффициентов потенциалов (4) – (7), в частности:

$$D_n\xi_n^1(ka) - B_n\psi_n^1(ka) + itg\beta\{C_n\xi_n(ka) - M_n\psi_n(ka)\xi_n(kb) - A_n\psi_n(ka)\} = 0, \quad (8.a)$$

$$C_n\xi_n^1(ka) = A_n\psi_n^1(ka) + M_n\psi_n(kb)\xi_n^1(ka). \quad (8.b)$$

В (8.a), (8.b) у сферических функций $\xi_n^1(ka)$, $\psi_n^1(ka)$ верхний индекс $(^1)$ обозначает дифференцирование по аргументу. Из системы 3-х уравнений связи с 4 – мя коэффициентами, в частности из (8.a), (8.b), исключим три коэффициента A_n, B_n, D_n, выразив их через коэффициенты C_n (7). Для этого используем правило Крамера. Отметим, что определитель $\det$ этой системы таков:

$$\det = \psi_n^1(ka)W(\psi_n(ka), \xi_n(ka)), \quad (9)$$

где $W(\psi_n(ka), \xi_n(ka))$ – детерминант Вронского. После некоторых преобразований из граничных условий получаем для коэффициентов C_n (7) систему парных сумматорных функциональных уравнений первого рода в виде равенств рядов Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\{\sigma_n^{(1)}(ka,\beta)\}[\psi_n^1(ka)]^{-1}F(n)P_n^1(\cos\theta) =$$

$$= (tg\beta)^2\sum_{n=1}^{\infty} M_n\xi_n(ka)\psi(ka)\psi(kb)[\psi_n^1(ka)]^{-1}F(n)P_n^1(\cos\theta), \quad 0 \le \theta < \theta_0, \quad (10.a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n[\psi_n^1(ka)]^{-1}F(n)P_n^1(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M_n\psi_n(kb)[\psi_n^1(ka)]^{-1}F(n)P_n^1(\cos\theta), \quad \theta_0 < \theta \le \pi, \quad (10.b)$$

где

$$\sigma_n^{(1)}(ka,\beta) = \xi_n^1(ka)\psi_n^1(ka) + (tg\beta)^2\xi_n(ka)\psi_n(ka). \quad (10.c)$$

Функциональные уравнения (10.a) – (10.c) имеют сложные ядра, содержащие специальные функции. Общим у них есть то, что они есть ряды по присоединённым функциям Лежандра, являющимися ортогональными с весом $\sin\theta$ на $[0,\pi]$. Однако, мы не можем воспользоваться непосредственно ортогональностью функций Лежандра, так как ряды в функциональных уравнениях имеют различную скорость сходимости и плохо “сшиваются” в точке $\theta = \theta_0$. Прямые численные методы для решения систем уравнений первого рода вида (10.a) – (10.c) даже на современных компьютерах не достаточно эффективны. Они, в частности, не устойчивы. Вместе с тем проводится интенсивная разработка численных методов регуляризации для решения систем таких уравнений, рассматриваемых, в частности, аналогами интегральных уравнений первого рода вида $AX = B$, где оператор A действует в некотором функциональном пространстве, связанном, например, с условием конечности энергии (1.b) электромагнитного поля [12, 20]. При этом, естественно, важной проблемой является возрастание размерности алгоритмов и увеличение погрешностей вычислений.

Для решения системы уравнений (10.a) – (10.c), т. е. для поиска коэффициентов C_n мы применим численно – аналитический метод регуляризации [4–5] и его варианты [6–15]. Методы основаны на идее восстановления аналитической функции комплексного переменного по предельным значениям искомой функции на контуре единичной окружности, а также на использовании интегрального преобразования Абеля. Эти методы хорошо себя зарекомендовал при решении ряда актуальных задач дифракции электромагнитных волн, антенной техники, акустики, электростатики на плоских и объёмных периодических решетках, цилиндрических, сферических и иных структурах [6–15]. Методы особенно эффективны, в частности, при исследовании резонансных режимов в задачах дифракции и распространения волн, когда длина волны источника сравнима с характерными размера изучаемой структуры. Различают несколько вариантов метода регуляризации [4–16]. Мы применим вариант метода, основанный на использовании интегральных представлений для полиномов Лежандра и присоединённых функций Лежандра, а также решении вспомогательных интегральных уравнений типа Абеля [6–16]. В результате приходим к эффективно разрешимой системе линейных алгебраических уравнений второго рода вида $Y = AY + B$ с вполне непрерывным матричным оператором в l_2 [10, 20]. Полученная система разрешима численно для любых геометрических и волновых параметров задачи и аналитически для предельных значений параметров задачи.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Выполним регуляризацию системы парных функциональных уравнений (10.a) – (10.c) за несколько шагов. Сначала введём обозначение для новых неизвестных y_n:

$$y_n = C_n F(n) n(n+1) / [\psi_n^1(ka)(2n+1)]. \qquad (11.a)$$

Используя достаточную скорость сходимости рядов в (10.a), выполним почленное интегрирование уравнения (10.a), учтя, что $P_n^1(\cos\theta) = -[P_n(\cos\theta)]'_\theta$. При этом возникает константа интегрирования $C^{(1)}$, которую найдём ниже, в (16). Затем используем для полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ интегральное представление Мелера – Дирихле [19, 20]:

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{2}(\pi^{-1})\int_0^\theta [\cos(n+0.5)x][\cos x - \cos\theta]^{-0.5} dx. \qquad (11.в)$$

Представление (11.в) можно получить путём модификации интегральной формулы Лапласа [19, 20] для полиномов Лежандра, в частности, путём некоторой замены переменных и интегрирования по контуру единичной окружности. Теперь, в проинтегрированное уравнение (10.a) подставим вместо полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ их представление (11.в) и вновь поменяем порядок интегрирования и суммирования. Этим, после некоторых линейных преобразований, получаем однородное интегральное уравнение типа Абеля:

$$\int_0^\theta f(\cos x)(\cos x - \cos\theta)^{-0.5} dx = 0, \quad \theta \in [0, \theta_0). \qquad (11.c)$$

Интегральное уравнение (11.c) имеет единственное тривиальное решение $f(\cos x) = 0$ в пространстве функций интегрируемых по модулю с квадратом на сегменте $x \in [0, \pi]$. Решение уравнения (11.c) можно найти несколькими методами, в том числе композицией с ядром самого уравнения (11.c). В итоге, используя решения уравнения (11.c), получаем функциональное уравнение по тригонометрическим функциям, которое запишем так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{2n+1}{n(n+1)} \sigma_n^{(1)}(ka,\beta) \cos(n+\tfrac{1}{2})x = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(ka,kb,\beta)\cos(m+\tfrac{1}{2})x +$$
$$+ C^{(2)} \cos\tfrac{1}{2}x, \; x \in [0, \theta_0), \qquad (12)$$

где

$$R_m(ka,kb,\beta)=(tg\beta)^2 M_m F(m)\psi_m(ka)\xi_m(ka)\psi_m(kb)/\psi_m^1(ka). \quad (13)$$

Теперь преобразуем функциональное уравнение на полуинтервале $(\theta_0,\pi]$ (10.b). Для этого получим интегральное представление вида (11.в) для присоединённых функций Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$, используя рекуррентные формулы связи между полиномами Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и присоединёнными функциями Лежандра, а также используя формулу (11.в). Затем, подставим в (10.b) вместо присоединённых функций Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$ их интегральные представления. После этого, используя достаточную сходимость рядов в (10.b), поменяем порядки суммирования и интегрирования. Получаем новое однородное интегральное уравнение типа Абеля (11.c) на $(\theta,\ \pi]$. Это уравнение также имеет только нулевое решение $g(\cos x)=0$, $x\in(\theta_0,\ \pi]$. Функция $g(\cos\theta)$ есть ряд Фурье по тригонометрическим функциям $\cos(n+\frac{1}{2})x$ с неизвестными коэффициентами C_n, а равенство $g(\cos x)=0$ есть функциональное уравнение вида (12) для $x\in(\theta_0,\ \pi]$. Этим мы получили два функциональных уравнениях на $[0,\theta_0)$ и $(\theta_0,\ \pi]$, содержащих ряды Фурье по функциям $\cos(n+\frac{1}{2})x$. Теперь выделим в полученных функциональных уравнениях главную обращаемую часть с помощью введения параметра малости:

$$\varepsilon_n^{(s)}=1+ika(2n+1)\sigma_n^{(1)}(ka,\beta)/[n(n+1)], \qquad \varepsilon_n^{(s)}=O(n^{-2}),\ n\to\infty. \quad (14)$$

Завершим регуляризацию задачи. Для этого воспользуемся ортогональностью и полнотой в $L_2(0,\pi)$ последовательности функций $\cos(n+\frac{1}{2})x$, $n=0,1,2,\ldots$ и применим дискретное обратное преобразование Фурье к обоим функциональным уравнениям. В результате получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода (15) и константу интегрирования $C^{(1)}$ (16):

$$y_n=\sum_{m=1}^{\infty} y_m\varepsilon_m^{(s)}\tilde\alpha_{n,m}(\theta_0)-ikaC^{(1)}\tilde\alpha_{n,0}(\theta_0)-\sum_{m=1}^{\infty}T_m^{(2)}[\tilde\alpha_{n,m}(\theta_0)-\delta_{n,m}]-$$

$$-ika\sum_{m=1}^{\infty}R_m(ka,kb,\beta)\tilde\alpha_{n,m}(\theta_0), \quad (15)$$

где

$$-ikaC^{(1)}=-\sum_{m=1}^{\infty}[y_m\varepsilon_m^{(s)}-ikaR_m(ka,kb,\beta)]\frac{\tilde\alpha_{m,0}(\theta_0)}{\tilde\alpha_{0,0}(\theta_0)}+\sum_{m=1}^{\infty}T_m^{(2)}\frac{\tilde\alpha_{m,0}(\theta_0)}{\tilde\alpha_{0,0}(\theta_0)}, \quad (16)$$

$$T_m^{(2)}=M_mF(m)\psi(kb)m(m+1)/[\psi_m^1(ka)(2m+1)], \quad (17)$$

$$\tilde\alpha_{n,m}(\theta_0)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m}+\frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1}\right],\ n\neq m; \quad (18)$$

$$\tilde\alpha_{n,n}(\theta_0)=\frac{1}{\pi}\left[\theta_0+\frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1}\right],\ \theta_0\in[0,\pi]. \quad (19)$$

В системе (15) искомые коэффициенты y_n введены в (11.а), параметр малости $\varepsilon_n^{(s)}$ – в (14), величины $\tilde\alpha_{n,m}(\theta_0)$ –в (18) и (19), константа интегрирования $C^{(1)}$– в (16) , величины

$R_m(ka,kb,\beta)$ – в (13), $T_m^{(2)}$ – в (17), $m \geq 1.$ Здесь отметим важное свойство величин $\tilde{\alpha}_{n,m}(\theta_0)$ СЛАУ второго рода (15): они обладают симметрией относительно индексов n и m:

$$\tilde{\alpha}_{n,m}(\theta_0) = \tilde{\alpha}_{m,n}(\theta_0), n = m = 1,2,3,... \qquad (20)$$

ВЫВОДЫ

1. Система (15) является системой второго рода вида $Y = AY + B$ и имеет вполне непрерывный матричный оператор A в пространстве l_2. Это следует, в частности, из оценки (14) для $\varepsilon_m^{(s)}$, а также из того, что в (18) величины $\tilde{\alpha}_{n,m} \to 0$ при $m = m_0$ и $n \to \infty$, а также из того, что $\tilde{\alpha}_{n,m}$ равномерно ограничены для всех $n,m \geq 1$ и всех θ_0 из сегмента $[0,\pi]$. Ряды по R_m и по $T_m^{(2)}$ в (15) – (17) сходятся равномерно по $\theta_0 \in [0,\pi]$. Правый столбец B системы также принадлежит l_2. Кроме того, число единица не является собственным значением матричного оператора A системы (15). В силу полученных оценок устанавливаем, что система (15) витка эффективно разрешима численно для произвольных геометрических и частотных параметров задачи и разрешима аналитически для малых отверстий в диске при $(\pi - \theta_0) \ll 1$ и для больших отверстий в диске при $\theta_0 \ll 1$ [10, 16].

2. .Тестовым вариантом построенного алгоритма является случай превращения диска в замкнутую полую сферу ($\theta_0 \to \pi$). В этом случае, решая поставленную задачу дважды: с помощью решения системы (15) при $\theta_0 \to \pi$ и отдельно решая задачу для замкнутой полой спирально проводящей сферы с витком тока внутри сферы, получаем тождественные результаты. Так, в частности, для расчёта полного поля $E^{(1)}, H^{(1)}$ при $r \in [0,a]$ (при наличии витка тока внутри спирально проводящей сферы) коэффициенты A_n электрического потенциала Дебая $U^{(1)}$ (6) таковы:

$$A_n = M_n \psi_n(kb)[\xi_n^1(ka)] / \sigma_n^1(ka,\beta). \qquad (21)$$

Для (21) величины M_n и $\sigma_n^1(ka,\beta)$ известны и введены в (5) и (10.c) соответственно.

3. Поляризация полного поля спирально проводящего сферического диска изменяется немонотонно от линейной до почти круговой и эллиптической, в частности, с изменением величины отверстия в сфере.

4. При изменении угла $\beta \in [0, \pi/2)$ (угла β спиральной проводимости диска) существенно изменяются свойства диска и, следовательно, свойства полных полей структуры. При $\beta = 0$ диск становится идеально проводящим, а при $\beta \to \pi/2$ поле полностью проникает через диск.

5. Резонансные частоты вынужденных колебаний исследуемой структуры тесно связаны с резонансными частотами электрических колебаний замкнутой полой идеально проводящей сферы (9) [10–12, 17, 20, 21]. Некоторые резонансные приведённые частоты $(ka)_{n,m}$ электрического типа замкнутой полой сферы (при $\theta_0 = \pi$) даны в таблице 1.

Таблица 1. Корни $(ka)_{n,m}$ уравнения $\psi_n^{1}(ka) = 0$.

m /n	n=21	n=22	n=23
m=8	52.0423	53.2968	54.5461
m=9	55.4703	56.7398	58.0041
m=10	58.8612	60.1441	61.4218

При прорезании отверстия в сфере и превращении сферы в диск добавки к резонансным частотам замкнутой сферы (Таблица 1) становятся комплексными и пропорциональны величине отверстия.

6. Развитый алгоритм может быть обобщен на более сложные структуры. Алгоритм удобен для применения дополнительных вариантов аналитической и численной регуляризации. Так, матрицу СЛАУ II (15), учтя (20), можно представить в виде произведения двух матриц. Также, с помощью линейной

замены неизвестных величин Y_n (15) можно улучшить алгоритм в частности так, чтобы убывание элементов по строкам и столбцам было почти одинаковым при $n, m \to \infty$, что важно при расчёте резонансных частот структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nakano H., Shimizu T., Kataoka H.,Yamauchi J. Circularly and linearly polarized waves from a metamaterial spiral antenna// International Symposium AP and USNC-URSI RSM. – 2014, July 6-11. paper 226.2.
2. Yoon I.J. and Ling H. Realizing efficient wireless power transfer using small folded cylindrical helix dipoles // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. –2010. – vol. 9.–pp. 846–849.
3. Назаров А.В., Попов Е. А., Раевский С. Б. Круглый диэлектрический волновод со спирально проводящей поверхностью // Антенны: Научно–технический и теоретический журнал. Н.– Новгород :–2011.–**N 1**.–С. 27-36.
4. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решётках // Журнал технической физики.–1962.–Т.32, вып.4.–С. 381–394.
5. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. –Харьков: Изд. ХГУ . –1973 – 288 с.
6. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции.–Харьков: Основа. – 1997.– 284 с.
7. Кравченко В.Ф., Сиренко Ю.К., Сиренко К. Ю. Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами.– М: Физматлит.– 2011.– 318 с.
8. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур //Электромагнитные волны и электронные системы. –М.:– 2003.–Т.8, вып. 10–11.– С. 4–78.
9. Свищёв Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах // ДАН УССР, сер. А.–1987.– Т.12. – С. 56 – 60.
10. **R**adin A.M., Rezunenko V.A., Shestopalov V.P. Wave radiation by a sphere with a circular aperture. *[J]U.S.S. Comput. Math. Math. Phys*.–1977.–Vol.17, NO 2.– P.104-116, (in rus.).
11. Вязьмитинов И.А., Вязьмитинова С.С., Резуненко В.А., Расчёт потенциалов электронно – оптических систем с разгруженным сферическим катодом // Радиотехника. Всеукр. межвед. научно– техн. сб. – Харків: Изд. ХГУ .– 1990.–Т.89.–С. 130–134.
12. Вязьмитинов И.А., Резуненко В.А., Удянская Л.В. Возбуждение сверх низкочастотного резонанса магнитного типа в незамкнутой сферической полости // Материалы конференции " 4-я Крымская конференция и выставка "СВЧ – техника и спутниковый прием ". –Севастополь: СТУ. Том 1. 26–28 сентября 1994. – С.58-59.
13. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием // Электромагнитные волны и электронные системы. –М.:–2005.–Т.10, вып.8.–С. 3–15.
14. Резуненко В.А. Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка".–Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна. – 2006. – №749, вип.56. – С. 50-56.
15. Резуненко В.А. Потенциал сферического сегмента внутри сферического слоя с круговым отверстием // Вісник Харківського національного університету імені В.Н Каразіна. Серія " Радіофізика та електроніка ".–Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна.– 2008.–№ 834, вип.13.– С. 120–126.
16. Резуненко В.А. Дифракция плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием // Вісник Харківського національного університету імені В.Н Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". –Харків: ХНУ імені В.Н.Каразіна.–2009.–№850, вип.59.– С. 71-77.
17. Zolotariov D., Nerukh A. Extension of approximation functions method for 2D nonlinear Volterra integral equations// Applied radio electronics.–2011.–V.10, №1.–P. 39–44.
18. Легенький М. Н., Бутрым А. Ю, Колчигин Н. Н. Расчет импульсного излучения круглой диэлектрической стержневой антенны методом согласования мод во временной области // Радиотехника. техника. Всеукр. межвед. научно–техн. сб.–Харків:ХНУРЕ.–2010.– Вып.62.– С. 5–12.
19. Бейтмен Г. , Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2.–М.: Наука.–1974.–295 с.
20. Садовничий В.А. Теория операторов.–М.: Высшая школа.–1999.–368 с.
21. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовиц М., Стиган И.–М.: ФМЛ.–1979.– 832 с.