УДК 517.9:535.4

СФЕРА, СОСТАВЛЕННАЯ ИЗ МЯГКОГО И ЖЁСТКОГО КРУГОВЫХ СЕГМЕНТОВ, В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

В.А. Резуненко
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина
e-mail: varezunenko@yahoo.com
Поступила в редакцию 16 мая 2016 г.

Изучается потенциал скоростей плоской акустической волны, рассеянной на сфере. Сфера составлена из мягкого и жесткого круговых сегментов. Для поиска потенциала решена смешанная краевая задача для уравнения Гельмгольца. Использован метод регуляризации матричного оператора задачи. Метод основан на использовании аналитических решений вспомогательных интегральных уравнений типа Абеля. Применено дискретное преобразование Фурье. Получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений Фредгольма второго рода. Система разрешима численно и аналитически в гильбертовом пространстве l_2. Рассмотрены некоторые варианты постановки задачи и резонансные свойства структуры.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: акустика, мягкий и жёсткий сегменты сферы, интегральные уравнения, система алгебраических уравнений второго рода, резонансы.

Вивчається потенціал швидкостей плоскої акустичної хвилі, що розсіяна на сфері. Сфера складена із мя'кого та жорсткого кругових сегментів. Для пошука потенциала розв'язана змішана крайова задача для рівняння Гельмгольца. Використано метод регуляризації матричного оператора задачі. Основу метода складає аналітичне розв'язання допоміжних інтегральних рівнянь типа Абеля. Використано дискретне перетворення Фур'є. Одержано нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь Фредгольма другого роду. Система розв'язна аналітично та чисельно у гільбертовому просторі l_2. Розглянуто деякі варіанти постановки задачі та резонансні властивості структури.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: акустика, м'який та жорсткий сегменти сфери, інтегральні рівняння, система алгебраїчних рівнянь другого роду, резонанси.

The acoustic potential of the velocity of the plane wave, scattered on the sphere. The sphere is constructed by two soft and hard spherical circular segments is analysed. To find the potential the mixed boundary problem for Helmholtz equation is solved. The method of regularization of matrix operator of the problem is used. The method is based on analytical solutions of auxiliary integral Abel's types equations. The discrete Fourier transform is applied. An infinite system of linear algebraic equations of Fredholm's second kind is obtained. The system is solvable numerically and analytically in Hilbert space l_2. Some variants of problem formulations and resonance properties of the structures are examined.
KEY WORDS: acoustics, soft and hard spherical segments, integral equations, system of algebraic equations of the second kind, resonances.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи акустики являются важными задачами, посвящёнными изучению волновых процессов в природе. В настоящее время интенсивно развиваются численно – аналитические методы решения и анализа различных акустических задач. Они используют наиболее эффективные методы математической физики, теоретической радиофизики, механики, моделирования. Большую роль в этом направлении играет исследование задач на классических, например, сферических поверхностях. Составные сферы, выполненные из различных материалов, имеют широкое применение, они могут рассматриваться прототипом многих устройств, в том числе и резонатора Гельмгольца. Жёсткая сферическая поверхность может рассматриваться, например, как модель пьезокерамического электроакустического преобразователя [1–4]. Электроакустика применяется в широком наборе приложений – от микро – и радиоакустики в мобильной связи, от акустики жилых помещений до акустики окружающей среды. Жёсткие и составные сферические поверхности в некотором приближении могут рассматриваться моделью плазменных образований. Механические и, в частности, звуковые процессы играют важную роль при конструировании антенной техники. Для решения задач излучения, распространения и приёма акустических волн различными, в том числе и сферическими поверхностями, известны современные новые методы решения широкого круга теоретических и прикладных задач. К таким методам относится, в частности, метод регуляризации (полуобращения) матричных, интегральных и интегро-дифференциальных операторов задач [5–13]. Метод полуобрашения сравнительно хорошо себя зарекомендовал при исследовании тонких резонансных эффектов, когда характерные размеры рассеивающих структур сравнимы с длинами падающих волн. Для задач акустики метод регуляризации, к сожалению, применяется не достаточно активно. В данной работе применяется метод полуобращения матричного и интегрального операторов задачи рассеяния плоской акустической волны на двух (мягком и жёстком) круговых сферических сегментах, составляющих замкнутую сферу. Получена и исследована бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с компактным матричным оператором в гильбертовом пространстве числовых последовательностей l_2 с некоторым весом. Рассмотрены варианты постановки задачи. Рассмотрены некоторые свойства резонансных частот структуры и обобщение задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Начало декартовой и сферической систем координат поместим в центр полой сферы радиуса a_0. Пусть ось OZ является общей для обеих систем координат. Полагаем сферу разрезанной на два круговых сегмента плоскостью, параллельной плоскости XOY. Пусть по линии разреза сегменты разделёны бесконечно тонкой звуконепроницаемой нитевидной круговой перегородкой. Полярный угол θ для нитевидной перегородки полагаем равным θ_0, радиус нити $r = a_0$, азимутальный угол $\varphi \in [0, 2\pi]$. Верхний сегмент сферы полагаем мягким; на сегменте полярный угол θ меняется от 0 до θ_0, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Нижний сегмент сферы полагаем жёстким, на нём $\theta \in (\theta_0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. На сферу вдоль оси OZ падает плоская акустическая волна, которая дифрагируя создаёт вторичные поля. Потенциалы скоростей U полных полей должны всюду вне поверхности сферы удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \tag{1}$$

где $k = \omega / c$ – волновое число, ω – круговая частота, c – скорость звука. По условию зависимость потенциалов от времени полагаем экспоненциальной $\exp(-i\omega t)$. На верхнем сегменте сферы полные потенциалы должны удовлетворять “мягкому” граничному условию

$$U = 0,\ r = a_0,\ \theta \in [0,\ \theta_0), \tag{2}$$

а на нижней части сферы полные потенциалы должны удовлетворять “жёсткому” граничному условию

$$\frac{\partial}{\partial n}(U) = 0,\ r = a_0,\ \theta \in (\theta_0,\ \pi], \tag{3}$$

где n — внешняя нормаль к поверхности сферы. Полные потенциалы U должны иметь требуемоё поведение в окрестности рёбер сферических сегментов, а также убывать на бесконечности: $U = O(r^{-1}) \to 0,\ r \to \infty.$ Требуется найти полные потенциалы вне сферы при $r \geq a_0$, $\theta \in [0,\ \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi].$ Решение такой смешанной задачи для уравнения (1) существует и единственно.

ПАРНЫЕ СУММАТОРНЫЕ ФФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учтя (1), потенциал скоростей плоской волны $U_0 = U_0(r, \theta)$ в сферической системе координат представим рядом Фурье – Бесселя – Лежандра [4– 18]:

$$U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n j_n(kr) P_n(\cos\theta),\ r \in [0, \infty),\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi], \tag{4}$$

где

$$F_n = (-i)^n (2n+1),\ z < 0, \qquad F_n = (i)^n (2n+1),\ z > 0. \tag{5}$$

В (4) $j_n(kr)$ – сферические функции Бесселя первого рода порядка n аргумента kr в обозначениях Дебая, $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра первого рода порядка n нулевой степени аргумента $\cos\theta$. В (4), (5) заданные коэффициенты F_n определяют направление распространения плоской волны из бесконечности: из нижнего полупространства – при $z<0$, или из верхнего полупространства – при $z>0$. В результате возмущающего влияния сферы на плоскую волну возникают искомая вторичная волна. Потенциал вторичной волны U_1 вне сферы представим в виде ряда (4), (5):

$$U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta),\ r > a_0,\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi], \tag{6}$$

где $h_n^{(1)}(kr)$ – сферические функции Ханкеля первого рода порядка n аргумента kr в обозначениях Дебая. В (6), для выполнение условия конечности интеграла акустической энергии, искомые коэффициенты $A_n,\ n\geq 0$, должны принадлежать гильбертовому пространству $\tilde{l}^2$ с некоторым весом.

Для отыскания коэффициентов A_n потенциала (6) используем граничные условия (2) и (3). Из них получаем систему двух сумматорных функциональных уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \left\{A_n h_n^{(1)}(ka_0) + j_n(ka_0)\right\} P_n(\cos\theta) = 0, \qquad 0\leq\theta<\theta_0, \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \left\{A_n [h_n^{(1)}(ka_0)]' + [j_n(ka_0)]'\right\} P_n(\cos\theta) = 0, \qquad \theta_0<\theta\leq\pi, \tag{8}$$

где в формулах $[h_n^{(1)}(ka_0)]'$, $[j_n(ka_0)]'$ штрих обозначает дифференцирование по аргументу ka_0.

Система функциональных уравнений (7), (8) имеет единственное решение, так как поставленная акустическая задача дифракции звука имеет единственное решение. Требуется построить эффективный численно–аналитический алгоритм поиска коэффициентов A_n. Уравнения системы (7), (8) имеют сравнительно сложные ядра, содержащие функции и производные функций Бесселя и Ханкеля, и полиномы Лежандра. Для решения системы (7), (8) не эффективны различные конечно – разностные методы, а также прямые численные методы. Общего эффективного метода решения таких систем пока нет. Однако такая система допускает эффективную регуляризацию методом полуобращения матричных и интегральных операторов рассматриваемой задачи [5–13]. Основным моментом метода является получение и решение интегральных уравнений типа Абеля, а также конструирование параметра малости. В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода Фредгольмового типа. Система разрешима численно для любых геометрических и волновых параметров задачи акустики и аналитически для предельных значений параметров задачи.

В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода Фредгольмового типа. Система разрешима численно для любых геометрических и волновых параметров задачи акустики и аналитически для предельных значений параметров задачи.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Сначала отметим. что рассматриваемая здесь задача акустики отличается, насколько нам известно, от рассмотренных ранее акустических задач на сфере с круговым отверстием и не является их частным случаем [1, 12, 13, 18, 20, 21]. Поэтому полученные здесь функциональные уравнения (7), (8) требуют применения нового варианта метода частичного обращения матричного оператора задачи [5-13, 18, 19]. Для этого сначала преобразуем систему функциональных уравнений (7), (8) так, чтобы удобно было применить этот метод. Отметим, что впервые метод частичного обращения матричного оператора задачи дифракции электромагнитных волн был разработан и применён в работах [5-13, 18, 19] и с тех пор многократно переоткрывался и продолжает модифицироваться для широкого круга задач. Впервые применение варианта метода регуляризации для задач электродинамики на сфере с отверстием выполнено в работе [5] и сейчас активно развивается в Харьковской школе дифракции [5–19]. В нашей задаче операторное уравнение для системы (7), (8) есть уравнение первого рода $AX = C$ в пространстве $L_2(0,\pi)$ [11–16, 18, 19]. Здесь X – отыскиваемый вектор-столбец, A – известная

матрица, C – заданный вектор-столбец в $L_2(0,\pi)$. Требуется представить оператор A как сумму двух операторов $A = A^{(1)} + A^{(2)}$, из которых оператор $A^{(1)}$ может быть и неограниченным, но имеет обратный оператор $(A^{(1)})^{-1}$ и этот оператор может быть явно найден. При этом произведение операторов $(A^{(1)})^{-1} * A^{(2)}$ является вполне непрерывным оператором, а произведение операторов $(A^{(1)})^{-1} * C$ является ограниченным в $L_2(0,\pi)$. При этом важным требованием к методу полуобращения матричного оператора задачи (и других операторов аналогичных задач) является получение в итоге наиболее эффективного решения, в частности, такого, которое можно находить и аналитически и численно в наиболее широком диапазоне изменения параметров задачи, а также с наименьшими погрешностями вычислений и с наименьшими затратами ресурсов.

На первом шаге преобразования системы (7), (8) вводим новое обозначение $A_n^{(1)}$ вместо искомых коэффициентов A_n из (6):

$$A_n^{(1)} = A_n F_n h_n^{(1)}(ka_0). \tag{9}$$

Теперь, учтя свойства функций Ханкеля и их различные асимптотики [12–18], введём в (7), (8) акустический параметр малости $\varepsilon_n^{(ak)}$ (10):

$$\varepsilon_n^{(ak)} = 1 + \frac{2ka_0}{(2n+1)} \cdot \frac{[h_n^{(1)}(ka_0)]'}{h_n^{(1)}(ka_0)}. \tag{10}$$

Отметим, что параметр малости $\varepsilon_n^{(ak)}$ (10) убывает с различной скоростью при росте n. При этом важно, что для n >> 1 и n >> ka_0 параметр малости убывает до нуля быстрее, чем $O(\frac{1}{n}) \to 0$ при $n \to \infty$. Отметим, что для любых вещественных значений ka_0 параметр малости не имеет особенностей, так как функция $h_n^{(1)}(ka_0)$ не имеет вещественных корней.

Для следующего преобразования уравнения (8) используем связь между полиномами Лежандра и их производными:

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{d}{dx}P_{n+1}(x) - \frac{d}{dx}P_{n-1}(x)\right]. \tag{11}$$

Учтя запас сходимости в (8) и равенство (11), проинтегрируем почленно уравнение (8) по переменному θ. При этом возникает константа интегрирования D_0. Эта константа D_0 оказывается равной нулю, так как $P_0(x) \equiv 1,\ P_{-1}(x) = P_1(x) = x$ и для $x = \cos\theta$ при $\theta = \pi$ получаем

$$P_n(\cos\pi) = P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$P_{n+1}(\cos\pi) - P_{n-1}(\cos\pi) = (-1)^{n+1} - (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}[(-1)^2 - 1] = 0,\ n \ge 0.$$

Затем в разность (11) проинтегрированных полиномов Лежандра $P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)$ при $x = \cos\theta$ подставим известное интегральное представление Мелера – Дирихле [10– 14, 18]:

$$P_n(\cos\theta) = \pi^{-1}\sqrt{2}\int_\theta^\pi (\cos\theta - \cos x)^{-0.5}\sin(n+0.5)x\,dx, \qquad \theta \in (\theta_0, \pi].$$

Используя принадлежность проинтегрированного ряда в (8) пространству $L_2(0,\pi)$, изменим порядок суммирования и интегрирования. В итоге получим однородное интегральное уравнение первого рода типа Абеля

$$\int_{\theta}^{\pi} g(x)(\cos\theta - \cos x)^{-0.5} dx = 0, \quad \theta \in (\theta_0, \pi], \tag{12}$$

где функция $g(x)$ - есть ряд Фурье по тригонометрическим функциям в $L_2(0,\pi)$. Решение уравнения (12) можно найти несколькими способами. Применим здесь композицию с ядром [5, 12– 14] вида $(\cos x - \cos\theta)^{-0.5}\sin x$. В результате получаем единственное решение уравнения (12): $g(x) = 0$, $x \in (\theta_0, \pi]$. Этим в преобразованном функциональном уравнении (8) мы перешли от рядов Фурье по полиномам Лежандра в $L_2(0,\pi)$ к рядам Фурье по тригонометрическим функциям $\cos[(n+0.5)x]$, $n \geq 0$. Далее преобразуем функциональное уравнение (7). Для этого вместо полиномов Лежандра используем другое интегральные представления Мелера – Дирихле [5, 12– 14]

$$P_n(\cos\theta) = \pi^{-1}\sqrt{2}\int_0^{\theta} (\cos x - \cos\theta)^{-0.5}\cos(n+0.5)x dx, \quad \theta \in [0, \theta_0)$$

Изменим порядок суммирования и интегрирования в (7), так как ряд в (7) есть ряд Фурье в $L_2(0,\pi)$. При этом получаем новое однородное интегральное уравнение первого рода типа Абеля

$$\int_0^{\theta} f(x)(\cos x - \cos\theta)^{-0.5} dx = 0, \quad \theta \in [0, \theta_0) \tag{13}$$

Решение уравнения (13) находим с помощью композиции с ядром самого уравнения. Это решение тривиально: $f(x) = 0$, $x \in [0, \theta_0)$. Этим вместо (7), (8) получили функциональные уравнения по тригонометрическим функциям на обеих подинтервалах сегмента $[0,\pi]$. Учтя подстановку (9) и введение параметра малости (10), запишем полученную систему функциональных уравнений в виде новой нетривиальной системы второго рода так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \cos(n+\frac{1}{2})x =$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} [A_m^{(1)}\varepsilon_m^{(ac)} + 2(ka_0)F_m \dfrac{[j_m(ka_0)]'}{2m+1}]\cos(m+\dfrac{1}{2})x, x \in (\theta_0, \pi], \\ -\sum\limits_{m=0}^{\infty} F_m j_m(ka_0)\cos(m+\dfrac{1}{2})x, \qquad x \in [0, \theta_0). \end{cases} \tag{14}$$

Используя полноту и ортогональность функций $\cos(n+\frac{1}{2})x$, $n = 0,1,2,3,...$ в $L_2(0,\pi)$, систему (14) можно преобразовать различными методами [5, 6]. Здесь применим к системе (14) дискретное преобразование Фурье. В результате получаем искомую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$A_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(1)}\varepsilon_m^{(ak)}\alpha_{n,m}^{(1)}(\theta_0) - \sum_{m=0}^{\infty} F_m j_m(ka_0)\alpha_{n,m}(\theta_0) + \tag{15}$$
$$+2(ka_0)\sum_{m=0}^{\infty} F_m \frac{[j_m(ka_0)]'}{2m+1}\alpha_{n,m}^{(1)}(\theta_0), \quad n = 0,1,2,3,...,$$

где искомые коэффициенты $A_n^{(1)}$ переобозначены в (9), параметр малости $\varepsilon_m^{(ak)}$ введён в (10), аеличины F_m определены в (4), $\delta_{n,m}$ в (16) есть символ Кронекера, а величины $\alpha_{n,m}(\theta_0)$ и $\alpha_{n,m}^{(1)}(\theta_0)$ таковы:

$$\alpha_{n,m}^{(1)}(\theta_0) = \delta_{n,m} - \alpha_{n,m}(\theta_0), \tag{16}$$

$$\alpha_{n,m}(\theta_0) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m} + \frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1}\right\},\ n \neq m, \tag{17.а}$$

а также

$$\alpha_{m,m}(\theta_0) = \frac{1}{\pi}[\theta_0 + \frac{\sin(2m+1)\theta_0}{2m+1}],\quad n = m;\ n = 0,1,2,3,\dots . \tag{17.в}$$

В системе (15)-(17.в) волновое число ka_0 может принимать любые вещественные значения, а угол θ_0 разреза сферы на мягкую и жёсткую части может принимать любые значения на сегменте $[0,\pi]$.

ВЫВОДЫ

1. Получена итоговая бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода (СЛАУ– II) (15) – (17.а), (17.в), которую представим так

$$A^{(1)} = MA^{(1)} + B, \tag{18}$$

где $A^{(1)}$ – столбец неизвестных коэффициентов $A_n^{(1)}$ для потенциала (6),. матрица M в (18) такова

$$M = \left\{\varepsilon_m^{(ak)}\alpha_{n,m}^{(1)}(\theta_0)\right\},\ n,m = 0,2,3,... \tag{19}$$

В (18) в правом столбце B величину $n-$того элемента представим так:

$$b_n = 2(ka_0)F_n\frac{[j_n(ka_0)]'}{2n+1} - \sum_{m=0}^{\infty} F_m\left\{j_m(ka_0) + 2(ka_0)\frac{[j_m(ka_0)]'}{2m+1}\right\}\alpha_{n,m}(\theta_0). \tag{20}$$

2. Предельными (тестовыми) вариантами постановки задачи являются, в частности, два таких варианта [2.1), 2.2)], когда составная сфера превращается в мягкую замкнутую сферу либо в жёсткую замкнутую сферу. Рассмотрим сначала вариант 2.1) - превращение составной сферы в мягкую замкнутую сферу. При этом полярный угол θ_0 нитевидного соединения сегментов сферы стремится к π. Тогда, независимо отдельно решая задачу дифракции заданной плоской акустической волны на замкнутой мягкой сфере, получаем коэффициенты A_n вторичного потенциала (6) в явном виде:

$$A_n = -j_n(ka_0)/h_n^{(1)}(ka_0). \tag{21}$$

Теперь, получим тестовое решение (21) путём предельного перехода в системе (15) при $\theta_0 \to \pi$. Для этого в системе (15) в правой части рассмотрим пределы всех сумм при $\theta_0 \to \pi.$ Тогда получаем, что для $\theta_0 \to \pi$ пределы величин (16), (17а) и (17в) таковы: при $n = m$ $\lim\alpha_{n,n}(\theta_0) = 1$, а при $n \neq m$ $\lim\alpha_{n,m}(\theta_0) = 0.$ Затем получаем, что для $\theta_0 \to \pi$ пределы (при $n = m$ и при $n \neq m$) $\lim\alpha_{n,m}^{(1)}(\theta_0) = 0.$ В этом случае система (15) превращается в равенство $A_n^{(1)} = -F_n j_n(ka_0)$. Далее, учтя (9), получаем равенства $A_n^{(1)} = -F_n j_n(ka_0) = A_n F_n h_n^{(1)}(ka_0).$ Значит, в итоге получаем требуемое равенство (22). Теперь рассмотрим вариант 2.2) − превращение составной сферы в жёсткую замкнутую сферу, когда угол θ_0 нитевидного соединения сегментов сферы стремится к 0. Тогда, также отдельно решая задачу дифракции плоской акустической волны на замкнутой жёсткой сфере, получаем коэффициенты A_n вторичного потенциала (6) в явном виде:

$$A_n = -[j_n(ka_0)]'/[h_n^{(1)}(ka_0)]'. \tag{22}$$

Для проверки (22) аналогично варианту 2.1) рассмотрим в системе (15) пределы всех сумм при $\theta_0 \to 0$. Найдя пределы сумм, получаем, что система (15) преобразовывается в упрощённую следующего вида:

$$A_n^{(1)} = A_n^{(1)}\varepsilon_n^{(ak)} + 2(ka_0)[j_n(ka_0)]'/(2n+1). \tag{23}$$

Подставим в (23) величину $\varepsilon_n^{(ak)}$ (10) и коэффициенты $A_n^{(1)}$ (9). В итоге получаем требуемое равенство (22). Этим оба предельные варианты постановки задач (при $\theta_0 \to \pi$ и при $\theta_0 \to 0$) рассмотрены и найдены их явные тестовые решения, которые также следуют из полученной СЛАУ−II (15), (18).

3. Система (15), (18) имеет единственное решение [16]. Её матричный оператор, соответствующий матрице M (20), вполне непрерывен в пространстве l_2 и правый столбец B системы (15), (18) [и (21)] принадлежит l_2. Константа 1 не принадлежит спектру матричного оператора, соответствующего матрице M (20). Поэтому решение системы (15) может быть эффективно найдено численно для произвольных параметров задачи. Система (15) может быть решена и аналитически для двух важных предельных случаев − [3.1), 3.2)]. Для случая 3.1) отметим, что для сравнительно малых значений волнового числа ka_0 ($ka_0 << 1$) норма матрицы M (20) в пространстве l_2 равномерно (по углу θ_0 во всём диапазоне изменения $\theta_0 \in [0, \pi]$) ограничена единицей:

$$\|M\|_{l_2} < 1.$$

Для случая 3.2) отметим, частности, что для больших величин угла θ_0 ($0 \le \pi - \theta_0 << 1$) и даже до сравнительно больших значений ka_0 ($ka_0 \le 40$) норма матрицы M также ограничена единицей.

4. Отметим, что приведённые резонансные частоты ka составной замкнутой сферы при уменьшении θ_0 немонотонно возрастают, начиная от корней $ka_{n,m}^{(s)}$ уравнения $j_n(ka_{n,m}^{(s)}) = 0$ до корней $ka_{n,m}^{(h)}$ уравнения $[j_n(ka_{n,m}^{(h)})]' = 0$, где штрих обозначает, как и принято выше, дифференцирование по аргументу. Точные значения резонансных частот ka структуры при $\theta_0 \ne 0$ являются корнями определителя $\det(M) = 0$ матрицы M (20).

Некоторые приведённые резонансные частоты $(ka)_{n,m}^{(s)}$ – приближённые [11, 17-20] значения корней уравнения $j_n(ka_{n,m}^{(s)}) = 0$ – даны в таблице 1.

Таблица 1. Резонансные частоты $ka_{n,m}^{(s)}$ замкнутой мягкой сферы.

	n=1	n=1	n=1	n=1	n=1
m=2	7.7252518	10.4171185	11.7049072	12.9665301	14.2073924
m=3	10.904125	13.6980231	15.0396647	16.3547096	17.6479740

5. Применённый вариант метода регуляризации [5–13, 18–20] задачи акустики на составной замкнутой сфере может быть обобщен [2, 8, 9, 22–25] для других видов источников полей, например, для различных, в том числе акустических и электрических диполей, и для других структур, например, для составных диэлектрических сфер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кайно Г. Акустические волны. – М: – Мир, – 1990.
2. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно – аналитические методы исследования волновых процессов. – Киев: – Наукова Думка. –2001. – 452 с.
3. Скучик Е. Основы акустики. Т.2. – М.: – Мир, – 1976. – 542 с.
4. Thomas D.P. Diffraction by a spherical cap. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1963, 59, c .197 – 209.
5. Радин А.М., Шестопалов В.П. Дифракция волн на сфере с отверстием// Докл. АН СССР. –1973. – Т.212,. – №.4– С. 838 – 841.
6. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: – Изд. ХГУ, – 1973. – 288 с.

7. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. – Харьков: – Основа, – 1997. – 284 с.
8. Кравченко В.Ф., Сиренко Ю.К., Сиренко К. Ю. Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами. – Москва: – Физматлит, 2011. – 318 С.
9. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур//Электромагнитные волны и электронные системы. – 2003. – Т.8, выпуск 10 – 11. – С. 4 – 78.
10. Свищёв Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах. // ДАН УССР, сер. А. – 1987. – Т.12. – С. 56 – 60.
11. Вязьмитинов И.А., Вязьмитинова С.С., Резуненко В.А. Расчёт потенциалов электронно – оптических систем с разгруженным сферическим катодом. // Радиотехника. – Изд. ХГУ – 1990. – Т.89. – С. 130 – 134.
12. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием// Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т.10, в.8. – С. 3 – 15.
13. Резуненко В.А. Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса// Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна, серія "Математика, прикладна математика і механіка "– 2006.– в. 749. – С. 50– 56.
14. Бейтмен Г. , Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: – Наука, – 1974. – 295 с.
15. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: – Наукова Думка, – 1977. – 362 с.
16. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: – Высшая школа, – 1999. – 368 с.
17. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовиц М., Стиган И.– М.:– ФМЛ, – 1979. – 832 с.
18. Резуненко В.А. Дифракция плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием// Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна, серія "Математика, прикладна математика і механіка ". – 2009.– в. 850. – С.71– 77.
19. Резуненко В.А. Расчёт поля витка электрического тока, рассеянного спирально проводящим сферическим диском// Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна.. Серія "Радіофізика та електроніка". – 2014. – № 1115. – вип. 24. – С. 41 – 48.
20. Vjazmitinov I.A., Rezunenko V.A., Udjanskaja L.V., Shestopalov V.P. Antennas characteristics of spherical reflector which is working at regime of Helmholtz resonance excitation// International. scientific and technical conf. "Contemporary Radiolocation", ─Kyiv . ─1994. ─PP.72─76.
21. Sirenko K.Yu., Sirenko Yu. K. The Exact Absorbing Conditions Method in the Analysis of Open Electrodynamic Structures Chapter Electromagnetic Waves in Complex Systems. – Volume 91 of the series Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics. – 25 May 2016. –PP. 225–326.
22. Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. – Киев: НАНУ, Институт Гидромеханики, –2009.–867 с.
23. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем/ Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74, № 4. – С. 645-654.
24. Zolotariov D., Nerukh A. Extension of approximation functions method for 2D nonlinear Volterra integral equations// Applied radio electronics.–2011.–V.10, №1.–P. 39–44.
25. Легенький М. Н., Бутрым А. Ю, Колчигин Н. Н. Расчет импульсного излучения круглой диэлектрической стержневой антенны методом согласования мод во временной области // Радиотехника. Всеукр. межвед. научно–техн. сб.–Харків:ХНУРЕ.–2010.–Вып.62.– С. 5–12.