

УДК 537.87

## МІЖМОДОВЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ В НЕЛІНІЙНОМУ НЕОБМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

**О. М. Думін, Р. Д. Ахмедов**

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, м. Свободи, 4  
E-mail: [dumin@karazin.ua](mailto:dumin@karazin.ua)

Надійшла до редакції 14 березня 2017 р.

Розглянуто перехідні процеси поширення нестационарного електромагнітного поля у нелінійному середовищі. На основі методу еволюційних рівнянь отримані всі компоненти електромагнітного поля як явні функції простору-часу. Представлений аналіз компонентів поля, а також запропоновані чисельні методи для його розрахунку. На прикладі задачі випромінювання плоского диску з рівномірно розподіленим електричним струмом в однорідне стаціонарне середовище розглянуті ефекти перехідних процесів. На цьому прикладі продемонстровано ітеративний метод врахування нелінійності. Розглянуті ефекти самодії сильного поля у середовищі розповсюдження, що породжені вторинними джерелами електромагнітного поля.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** нестационарне електромагнітне поле, електромагнітний снаряд, плоский диск, слабка нелінійність, нелінійність Керра

Transient processes in nonstationary electromagnetic field for nonlinear medium are considered. All electric and magnetic field components are received by evolutionary approach to transient electrodynamics as functions of space-time domain. The analysis of field components and numerical approach for further field calculation are proposed. Transient effects in the problem of radiation into stationary homogeneous medium of plane disk of homogeneously distributed electric current are considered. The iterative method of nonlinearity accounting is demonstrated on this example. Self-effects generated by secondary sources of electromagnetic field in its propagation process in the medium are considered.

**KEY WORDS:** nonstationary electromagnetic field, electromagnetic missile, static magnetic field, plane disk, weak nonlinearity, Kerr nonlinearity

Рассмотрены переходные процессы распространения нестационарного электромагнитного поля в нелинейной среде. На основе метода эволюционных уравнений получены все компоненты электромагнитного поля как явные функции пространства-времени. Представлен анализ компонент поля, а также предложены численные методы для их расчета. На примере задачи излучения плоского диска с равномерно распределенным электрическим током в однородную стационарную среду рассмотрены эффекты переходных процессов. На этом примере продемонстрирован итеративный метод учета нелинейности. Рассмотрены эффекты самовоздействия сильного поля в среде распространения, которые порождены вторичными источниками электромагнитного поля.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** неустановившееся электромагнитное поле, электромагнитный снаряд, постоянное магнитное поле, плоский диск, слабая нелинейность, нелинейность Керра

### ВСТУП

В роботі [1] було описано підхід до побудови електромагнітного поля в слабонелінійному середовищі та аналізу його властивостей на прикладі задачі випромінювання поля в лінійному наближенні плоским диском з рівномірно розподіленим електричним струмом. Існуючі розв'язки даної задачі не підходять поставленій меті [2]: вони не покривають всіх значень простору-часу для всіх компонентів поля або отримані методом, який засновано на перетворенні Фур'є [3]. Дана стаття присвячена дослідженню нестационарного електромагнітного поля диска за допомогою методу еволюційних рівнянь і з використанням ітеративного підходу до врахування слабкої нелінійності середовища як джерела додаткового поля.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Вперше ця задача була розглянута в [4]. В якості джерела електромагнітного поля вибрано постійний однонаправлений рівномірно розподілений по уявному плоскому диску радіуса  $R$  електричний струм із амплітудою  $A_0$ , який включається в нульовий момент часу [4]. Початковий момент спостереження поля, що випромінюється, відповідає принципу причинності спеціальної теорії відносності [5], є моментом коли поле, породжене найближчою точкою джерела в момент увімкнення (подія), досягає точки спостереження.

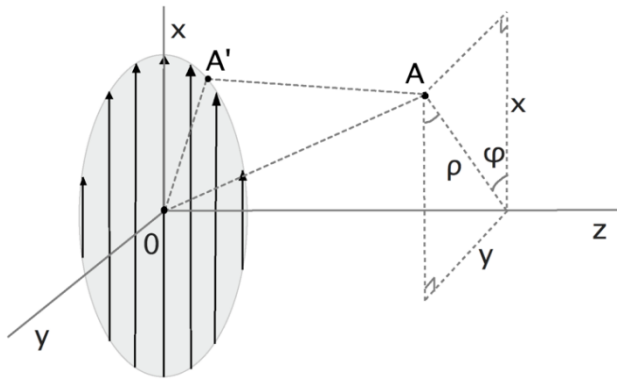


Рис. 1. Геометрія випромінювача

Математично джерело поля можна описати за допомогою дельта-функції Дірака  $\delta(z)$  та ступінчастої функції Хевісайда  $H(t)$  таким чином:

$$\vec{J}_0(\rho, z, t) = H(t)\delta(z)\{H(\rho) - H(\rho - R)\}\{\vec{\rho}_0 \cos\varphi - \vec{\varphi}_0 \sin\varphi\}.$$

Дане джерело містить неусувні розриви першого роду по граничному кільцю. Відомо, що поле достатньо сильної амплітуди породжує ефекти самодії через середовище [7]. В нашому випадку зона, що обмежена причинним зв'язком з джерелом, виступає в ролі нового джерела. Підхід до отримання слабких нелінійних ефектів поля буде побудований із використанням принципу суперпозиції, розглядаючи окремо реальне джерело та нелінійне [8]. Тобто наш наближений підхід полягає у знаходженні лінійного розв'язку та побудові нелінійної поправки на його основі.

Для зручності введемо нову змінну часу-простору  $\tau^2$ :

$$\tau^2 = \frac{c^2 t^2}{\epsilon\mu} - z^2.$$

Внаслідок принципу причинності для одновимірного випадку дана змінна  $\tau$  буде завжди додатною.

Для початку отримаємо та проаналізуємо розв'язок цієї задачі у відсутності нелінійних властивостей у середовища.

### АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО НАБЛИЖЕННЯ

Для застосування методу еволюційних рівнянь потрібно знайти модовий розклад розподілу струму нашого джерела. Підставивши отриманий розклад в праву частину рівняння Клейна-Гордона, запишемо еволюційні коефіцієнти за допомогою методу функції Рімана [9].

Підстановка отриманих еволюційних коефіцієнтів до розкладу електричного поля по базису дозволяє одержати аналітичні вирази для електричних компонент поля в інтегральній формі. Знайшовши значення інтегралу по спектральній змінній, отримаємо електричну компоненту поля, як функцію простору-часу [10]:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{A_0}{z} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \begin{bmatrix} I_1 \cos^2 \varphi + (I_2 - I_1) \sin^2 \varphi \\ I_1 \sin \varphi \cos \varphi + (I_2 - I_1) \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де  $I_1 = I_1(\rho, R, \tau)$  та  $I_2 = I_2(\rho, R, \tau)$  представляють собою кусково-визначені функції від циліндричних координат і часу. Саме з вигляду цих функцій, що є інтегралами від потроєного добутку функцій Бесселя першого роду, походить кусково-визначена природа випроміненого нестационарного поля:

$$I_1(\rho, R, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 < R < |\rho - \tau| \\ f_1, & |\rho - \tau| \leq R \leq \rho + \tau \\ 1/2, & R > \rho + \tau \end{cases}, \quad I_2(\rho, R, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 < R < |\rho - \tau| \\ f_2, & |\rho - \tau| \leq R \leq \rho + \tau \\ 1, & R > \rho + \tau \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{\rho^2 + R^2}{4\pi\rho^2} \arccos \frac{\tau^2 - \rho^2 - R^2}{2\rho R} - \frac{\sqrt{4\rho^2 R^2 - (\rho^2 + R^2 - \tau^2)^2}}{4\pi\rho^2} - \frac{|\rho^2 - R^2|}{4\pi\rho^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(\rho - R)^2 (\rho + R)^2 - \tau^2}{(\rho + R)^2 \tau^2 - (\rho - R)^2}},$$

$$f_2 = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\tau^2 + \rho^2 - R^2}{2\rho\tau}.$$

Задача плоского диску неодноразово використовувалась для демонстрації ефекту електромагнітного снаряду [4], який проявляється у незмінності амплітуди випроміненого поля у прожекторній зоні. Аналогічний розв'язок був отриманий у часовому просторі за допомогою методу еволюційних рівнянь [2]. Із розв'язку (1) випливає, що даний ефект має місце в області  $R > \rho + \tau$  і забезпечує максимальну амплітуду поля

$$\vec{E} = \vec{x}_0 \frac{A_0}{4} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} ; \quad \vec{H} = \vec{y}_0 \frac{A_0}{4}.$$

Просторова тривалість явища електромагнітного снаряду в напрямку нормалі до диску дорівнює  $\sqrt{\epsilon \mu}(\sqrt{R^2 + z^2} - z)$  та на великих відстанях пропорційна  $1/z$  [3].

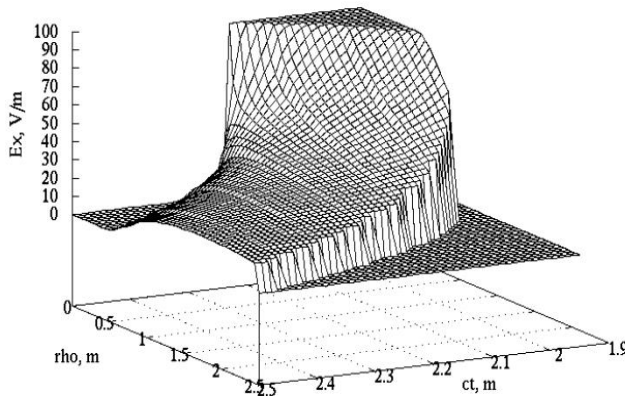


Рис.2. Залежність амплітуди поперечної компоненти електричного поля від поперечної радіальної координати та часу

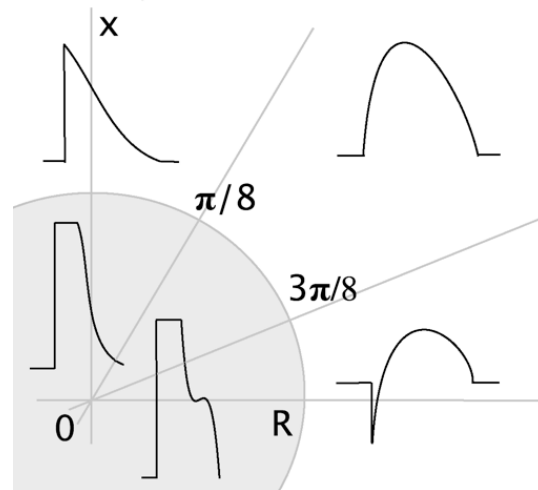


Рис.3. Кутова залежність поперечної електричної компоненти для  $z=2R$  та  $\rho = R/2$  і  $2R$

На рис. 2 зображена залежність амплітуди поперечної компоненти електричного поля від поперечної координати  $\rho$  та від часової змінної  $ct$ . Як видно на рис. 2, ближче до осі випромінювання просторова тривалість часового відрізка, де поле приймає максимальне значення, збільшується, починаючи з нульової тривалості при  $\rho = R$  і досягаючи максимального значення при  $\rho = 0$ .

На рис. 3 зображені характерні часові форми амплітуди електричної компоненти від кута при  $z = 2R$  та  $\rho = R/2$  і  $\rho = 2R$ , які відображають нестационарний характер випроміненого поля. Зауважимо, що в силу симетрії задачі зображено лише першу чверть поперечної проекції системи координат.

Для одержання магнітних компонент поля, проведемо підстановку отриманих раніше еволюційних коефіцієнтів до модового розкладу магнітного поля [13]

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \frac{A_0}{2} \begin{bmatrix} I_3 \sin \varphi \cos \varphi + (I_4 - I_3) \sin \varphi \cos \varphi \\ I_3 \cos^2 \varphi + (I_4 - I_3) \sin^2 \varphi \\ -2I_5 \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Відмінність цих виразів від розв'язків для електричного поля полягає в тому, що інтегральні форми  $I_3, I_4, I_5$  містять нескінченний ряд невластних інтегралів з так званим трибесселевим ядром. Як видно, поле розглянутого джерела породжує Н-хвилю, що проявляється в наявності поздовжньої компоненти магнітного поля.

Аналітичний вигляд магнітних компонент поля вдалося знайти лише для  $\rho = 0$ , що відповідає осі випромінювання, таким чином інтегральні форми  $I_3, I_4, I_5$  мають вигляд:

$$I_3|_{\rho=0} = \begin{cases} \frac{1}{2}, R^2 > \tau^2 \\ \frac{R^2}{\tau^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{ct - z\sqrt{\epsilon\mu}}{ct + z\sqrt{\epsilon\mu}} \right)^{m+1} P_m^{(1,0)} \left( 1 - \frac{2R^2}{\tau^2} \right), R^2 < \tau^2 \end{cases}$$

$$I_4|_{\rho=0} = \begin{cases} 1, R^2 > \tau^2 \\ \frac{2R^2}{\tau^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{ct - z\sqrt{\epsilon\mu}}{ct + z\sqrt{\epsilon\mu}} \right)^{m+1} P_m^{(1,0)} \left( 1 - \frac{2R^2}{\tau^2} \right), R^2 < \tau^2 \end{cases}$$

$$I_5|_{\rho=0} = 0.$$

Тут через  $P_m^{(\alpha,\beta)} = P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$  позначено поліном Якобі

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n C_{n+\alpha}^m C_{n+\beta}^{n-m} (x-1)^{n-m} (x+1)^m.$$

Для використання даної форми поліному при  $\alpha = 1$  та  $\beta = 0$  в чисельних методах при  $n > 18$  обов'язково необхідно застосовувати рекурентне співвідношення

$$f_0(n) = 1;$$

$$f_k(n) = C_{n+1}^k C_n^{n-k} = (f_{k-1}(n) \cdot (n-k+1) \cdot (n-k+2)) \div k^2,$$

а при  $n > 64$ , також і програмну реалізацію символічного обчислення коефіцієнтів ряду з метою недопущення накопичення помилок чисельних ітерацій.

Так як джерело електричного струму не вимикається і не змінюється, в просторі навколо нього буде сформований деякий розподіл статичного магнітного поля. Наприкінці цього процесу формування у певних точках простору амплітуда усіх компонент електричного поля буде дорівнювати нулю, тому що потік енергії електромагнітного поля також повинен бути нульовим, що і є ознакою кінця формування розподілу статичного поля. Таким чином, статичне магнітне поле

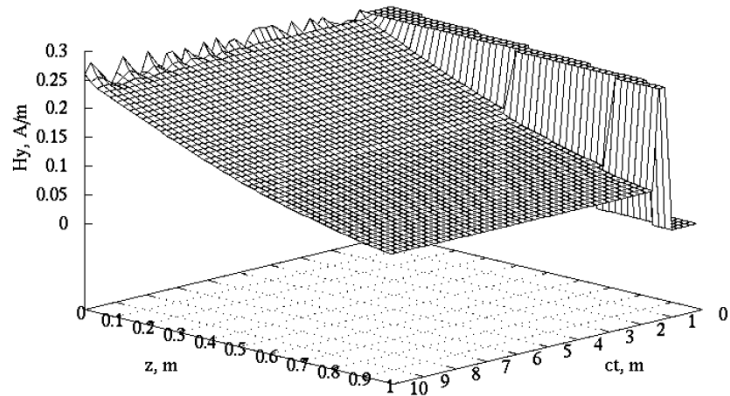


Рис. 4. Поперечне магнітне поле плоского диску, як функція поздовжньої координати та часу

можна отримати при великих значеннях часової змінної. Комп'ютерна побудова значень

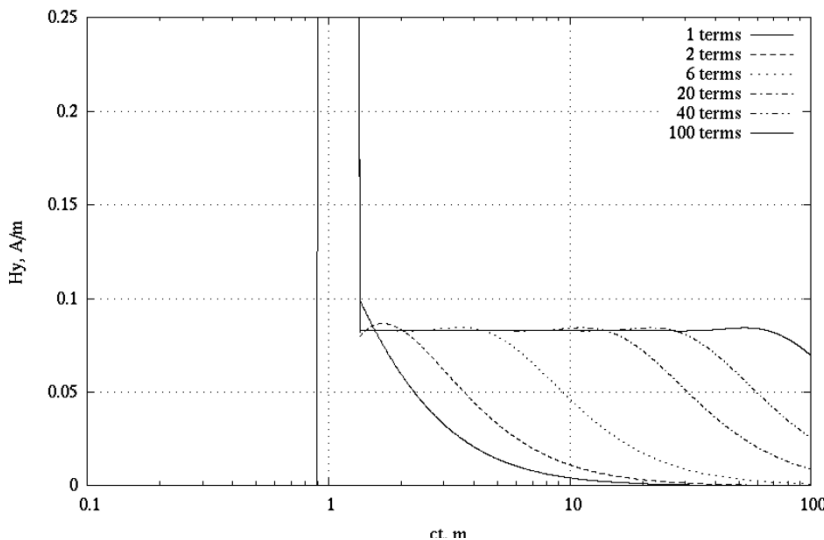


Рис. 5. Амплітуда поперечної компоненти магнітного поля, як функція часу при різній кількості врахованих доданків поліному

$H_y = H_y(ct, z)$ , що наведена на рис. 4, показала його стаціонарну природу. Видно, що затухання амплітуди статичного поля пропорційне до  $R/z$  та починається зі значення  $A_0/4$  безпосередньо перед джерелом поля.

Складний вид розв'язку (2) пояснюється тим, що базисні функції методу еволюційних рівнянь призводять до слабкої сходимості розв'язку для статичного поля, але, все ж таки, при достатньо великій кількості врахованих доданків наведений графік відповідає реальному просторовому розподілу. Невеликі відхилення при малих  $z$  є похибкою чисельного аналізу, причиною якої є наявність сингулярності біля джерела. Як видно на графіку, відносне значення похибки зменшується при віддаленні від джерела. Поблизу сингулярності треба враховувати більшу кількість доданків. На рис. 4, наприклад, враховано 263 члени ряду при невеликих  $z$ .

Хвильові процеси на графіку  $H_y(ct, z)$  можна аналізувати по певним інтервалам: зона, де поле ще не досягло точки спостереження; зона досягнення поля від усіх точок джерела, де і спостерігається ефект

електромагнітного снаряду; область статичного поля. На графіку  $E_x(ct, \rho)$ , що наведений на рис. 5, видно, що електричне поле має тільки перші дві зони. Також можна побачити вплив кількості врахованих доданків на амплітуду поля. З рис. 5 видно, що при малих інтервалах спостереження сигналу достатньо малої кількості доданків, чого не скажеш про великі проміжки часу спостереження.

### РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ВИПРОМІНЮВАННЯ В НАБЛИЖЕННІ СЛАБКОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Проведемо ітеративне врахування слабкої нелінійності середовища, для чого отримаємо аналітичний вигляд виразу вторинного джерела поля при наявності як нелінійності, так і омичних втрат:

$$\vec{J}' = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}'(\vec{E}, \vec{H}) + \sigma \vec{E},$$

де  $\vec{P}'$  є нелінійна складова вектору електричної індукції, яка і є причиною нелінійної самодії поля,  $\sigma$  є провідність середовища. Нехай нелінійні властивості середовища відповідають нелінійності Керра. Тоді вектор поляризації матиме такий вигляд:

$$\vec{P}'(\vec{E}) = \chi_3^e \vec{E}^3.$$

Для застосування методу еволюційних рівнянь необхідно представити вторинне джерело струму у вигляді розкладу по власним функціям  $\Psi_m = \Psi_m(v, \rho, \varphi)$  [11]:

$$j_m(v) = -\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \vec{J}'[\nabla_\perp \Psi_m^* \times \vec{z}_0].$$

Виконавши інтегрування по азимутальному куту  $\varphi$ , отримаємо чотири непарні симетричні кутові моди  $j_{-1}, j_1, j_{-3}, j_3$ :

$$j_{-1} = i\delta_{m,-1}(-3N_1(m) - N_2(m) - N_3(m) + 3N_4(m) + N_5(m) + N_6(m));$$

$$j_1 = i\delta_{m,1}(-3N_1(m) - N_2(m) - N_3(m) + 3N_4(m) - N_5(m) - N_6(m));$$

$$j_{-3} = i\delta_{m,-3}(-N_1(m) + N_2(m) - N_4(m) + N_5(m));$$

$$j_3 = i\delta_{m,3}(N_1(m) + N_2(m) - N_4(m) + N_5(m)).$$

В порівнянні зі струмом плаского диску в лінійному наближенні з'явилися нові кутові моди: 3 та -3. Наявні у цих виразах інтегральні форми  $\{N_n\}_{n=1}^5$  мають параметричний аргумент  $m$  та містять циліндричні функції Бесселя:

$$N_1(m) = \frac{3m}{64} \frac{\sqrt{\mu_0} A_0 \chi_3^e(A_0)}{\sqrt{v}} \left( \frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\rho J_m(v\rho) I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial t};$$

$$N_2(m) = \frac{m}{64} \frac{\sqrt{\mu_0} A_0 \chi_3^e(A_0)}{\sqrt{v}} \left( \frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\rho (I_2 - I_1) \left( \frac{\partial I_1}{\partial t} (I_2 - I_1) + 2I_1 \left( \frac{\partial I_2}{\partial t} - \frac{\partial I_1}{\partial t} \right) \right);$$

$$N_3(m) = \frac{m}{4} \frac{\sqrt{\mu_0} \sigma A_0}{\sqrt{v}} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \int_0^\infty d\rho I_1 J_m(v\rho);$$

$$N_4(m) = \frac{3}{128} \sqrt{\mu_0} A_0 \chi_3^e(A_0) \sqrt{v} \int_0^\infty \rho d\rho (J_{m-1}(v\rho) - J_{m+1}(v\rho)) (I_2 - I_1)^2 \left( \frac{\partial I_2}{\partial t} - \frac{\partial I_1}{\partial t} \right);$$

$$N_5(m) = \frac{3}{128} \sqrt{\mu_0} A_0 \chi_3^e(A_0) \sqrt{v} \int_0^\infty \rho d\rho (J_{m-1}(v\rho) - J_{m+1}(v\rho)) \left( I_1 \left( \frac{\partial I_2}{\partial t} - \frac{\partial I_1}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial I_1}{\partial t} (I_2 - I_1) \right);$$

$$N_6(m) = \frac{\sigma \sqrt{\mu_0} A_0 \sqrt{v}}{8} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \int_0^\infty \rho d\rho (J_{m-1}(v\rho) - J_{m+1}(v\rho)) (I_2 - I_1).$$

На цьому етапі для побудови компонент нелінійного поля аналітичні перетворення доречно замінити на чисельні розрахунки. Очевидно, що нові кутові моди будуть з'являтися при проведенні

подальших ітерацій. З огляду на те, що  $\chi_k^e \gg \chi_{k+1}^e$ , можна вважати, що вплив подальших членів ряду у розкладі вектору поляризації не буде суттєвим.

### ВИСНОВКИ

Проаналізовано електричне та магнітне поле плоского диску з заданим електричним струмом із часовою залежністю у вигляді функції Хевісайда в наближенні лінійного середовища. Отримання статичного магнітного поля поблизу джерела потребує врахування великої кількості членів ряду. Аналіз впливу похибки розкладу сингулярності джерела показав, що чим ближче точка спостереження до випромінювача, тим більш нестабільна сходимість часового ряду.

Побудовано вторинне джерело нелінійного поля у вигляді поправок для поля лінійного наближення. Вигляд цього джерела свідчить про появу нових кутових мод у випроміненому електромагнітному полі.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dumin O.M., Akhmedov R.D., Katrich V.A., Dumina O.O. Transient Radiation of Circle with Uniform Current Distribution // 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), May 29-June 2, 2017, Kyiv, Ukraine.- P. 261-265.
2. Третьяков О.А., Думин А.Н. Излучение нестационарных электромагнитных полей плоским излучателем // Электромагнитные волны & электронные системы. – 1998. – Т.3, N1. – С.12-22.
3. Содин Л.Г. Импульсное излучение антенны с круглой апертурой, возбуждённой единичным скачком тока (переходная диаграмма) // Радиотехника и электроника. – 1992. – Т.37, №10. – С.1783–1787.
4. Wu T.T. Electromagnetic missiles // J. Appl. Phys. – 1985. – V. 57, N7, P. 2370-2373.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Том II: Теория поля. – Москва: Физматлит, 2012. – 536 с.
6. Tretyakov O., Dumin A., Dumina O., Katrich V. Modal basis method in radiation problems // Proc. International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET–2004). – Dnepropetrovsk (Ukraine). – 2004. – P.312–314.
7. Dumin O., Dumina O., Katrich V. Evolution of transient electromagnetic fields in spherical coordinate system // Proc. XI-th International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET–2006). – Kharkiv (Ukraine, June 26-29). – 2006. – P.363–365.
8. Dumin O.M., Katrich V.A., Akhmedov R.D., Tretyakov O.A., Dumina O.O. Evolutionary Approach for the Problems of Transient Electromagnetic Field Propagation in Nonlinear Medium // Proc. XV International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET–2014). – Dnipropetrovsk (Ukraine, Aug. 26-28). – 2014. – P. 57-60.
9. Dumin O.M., Tretyakov O.A., Akhmedov R.D., Stadnik Yu.B., Katrich V.A., and Dumina O.O. Modal Basis Method for Propagation of Transient Electromagnetic Fields in Nonlinear Medium// Proc. 7<sup>th</sup> International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS–2014). – Kharkiv (Ukraine, September 15-19). – 2014. – P. 100–103.
10. Dumin O.M., Tretyakov O.A., Akhmedov R.D., and Dumina O.O. Transient electromagnetic field propagation through nonlinear medium in time domain // Proc. 10<sup>th</sup> International Conference on Antenna Theory and Techniques (ICATT-2015), 21-24 April, 2015, Kharkiv, Ukraine.- P. 93-95.
11. Борисов В.В. Неустоявшиеся поля в волноводах. – Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1991, 156 с.
12. Dumin O.M., Tretyakov O.A., Akhmedov R.D., and Dumina O.O. Evolutionary approach for the problem of electromagnetic field propagation through nonlinear medium // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Радіофізика та електроніка. – 2014. – Вип. 24. – №1115. – С.23–28.
13. Dumin O.M., Akhmedov R.D., Katrich V.A., and Dumina O.O. Propagation of transient field radiated from plane disk in nonlinear medium // Proc. 8<sup>th</sup> International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS–2016). – Odessa (Ukraine, September 5-11). – 2016. – P. 77–80.
14. Dumin O., Akhmedov R., Dumina O.O. Transient field radiation of plane disk into nonlinear medium // Праці IEEE Міжнародної конференції з інформаційно-телекомунікаційних технологій та радіоелектроніки (UkrMiCo'2016). – Київ (Україна, вересень 11-15). – 2016. – P. 148–151.
15. Черногор Л. Ф., Милованов Ю. Б. Амплитудное самовоздействие мощных непрерывных проходящих радиоволн в ионосфере: результаты численного моделирования // Радиофизика и радиоастрономия. - 2015. - Т. 20, № 2. - С. 122-132.
16. Smirnov Yu G., Valovik D. V. Nonlinear Effects of Electromagnetic TM Wave Propagation in Anisotropic Layer with Kerr Nonlinearity // Advances in Mathematical Physics, Vol. 2012, – 2012. – 21 p.